УДК 681.51

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОИЗВОДСТВЕННО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ МОДЕЛЯМИ

д.т.н., проф. В.М. Вартанян, к.т.н. В.Г. Кучмиев, Ю.А. Романенков

Исследуется проблема параметрического анализа и синтеза производственных и экономических процессов, которые могут быть описаны полиномиальными моделями. Предложены методы определения допустимых интервалов первичных параметров на основе алгебраических критериев Гурвица и Кларка.

Под устойчивостью производственно-экономических процессов, описываемых полиномиальными моделями, будем понимать задачу попадания некоторых итоговых характеристик этих процессов в заданный коридор с учетом возможных отклонений исходных параметров от заданных номинальных значений.

Пусть известно полиномиальное уравнение

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\dots\sum_{k=0}^{n} a_{ij\dots k}\,\mu_1^i\,\mu_2^j\dots\mu_m^k = 0\,. \qquad (1)$$

Зафиксируем все параметры $\mu_l,\ l = 1,\dots,m$, кроме произвольных двух:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}^{*}\,\mu_1^i\,\mu_2^j = 0\,. \qquad (2)$$

Пусть μ_1 является некоторой результирующей характеристикой производственно-экономического процесса, задачей которого является удержание ее в определенном диапазоне, ограниченном заданными нижним и верхним значениями, т.е. $\mu_1 = [\underline{\mu_1}, \overline{\mu_1}]$ – интервальное число, причем, исходя из физической сущности параметров математической модели, $\underline{\mu_1} > 0,\ \overline{\mu_1} > 0$. Тогда:

$$\sum_{j=0}^{n}[b_j]\mu_2^j = 0\,; \qquad (3)$$

$$[b_j] = a_{0j} + a_{1j}[\mu_1] + a_{2j}[\mu_1^2] + \dots + a_{nj}[\mu_1^n] = a_{0j} + a_{1j}[\underline{\mu_1}, \overline{\mu_1}] +$$

$$+ a_{2j}[\underline{\mu_1}^2, \overline{\mu_1}^2] + \dots + a_{nj}[\underline{\mu_1}^n, \overline{\mu_1}^n] = a_{1j}[\underline{\mu_1} + a_{0j}, \overline{\mu_1} + a_{0j}] +$$

$$+ a_{2j}[\underline{\mu_1}^2, \overline{\mu_1}^2] + \dots + a_{nj}[\underline{\mu_1}^n, \overline{\mu_1}^n] = [\underline{b_j}, \overline{b_j}].$$

© д.т.н., проф. В.М. Вартанян, к.т.н. В.Г. Кучмиев, Ю.А. Романенков, 2002

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к определению диапазона изменения $\mu_2 > 0$, обеспечивающего попадание μ_1 в заданный интервал, $\mu_1 = [\underline{\mu_1}, \overline{\mu_1}]$.

Метод Эрмита позволяет выяснить число корней полинома (3) в широком классе областей плоскости комплексного переменного, состоящем из всевозможных полуплоскостей и открытых кругов. Обозначим через Ω одну из таких областей. Всегда найдется дробно-линейное преобразование

$$\mu_2^* = \frac{\alpha\mu_2 + \beta}{\gamma\mu_2 + \lambda},\ \alpha\beta - \gamma\lambda \neq 0, \tag{4}$$

переводящее точки μ_2 из области Ω в точки μ_2^* из левой полуплоскости плоскости комплексного переменного. Проверку принадлежности корней полиномов соответствующей области комплексной плоскости можно выполнить используя один из следующих критериев.

Критерий Гурвица. Согласно критерию Гурвица корни полинома имеют положительные вещественные части, если составленный из его коэффициентов $b_i > 0$ определитель

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \dots & 0 \\ 1 & b_{n-2} & b_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & b_{n-1} & b_{n-3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 \end{vmatrix} \tag{5}$$

и все его диагональные миноры $\Delta_i = |c_{ij}|_{n\times n} = |b_{i-2j+n}|_{n\times n}$, $i = 1, ..., n$:

$$\Delta_1 = b_{n-1};\ \cdots\ ;\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} \\ 1 & b_{n-2} & b_{n-4} \\ 0 & b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix};\ \cdots\ ;\Delta_n = b_n\Delta_{n-1} \tag{6}$$

отрицательны. Следовательно, границе области соответствуют предельные условия, а именно, равенство нулю всех коэффициентов полинома и всех определителей Гурвица.

Диагональным минором порядка k определителя Δ_n называется определитель, элементы которого лежат на пересечении первых k строк и первых k столбцов определителя. Так, если в определителе Δ_n вычеркнуть правый столбец и нижнюю строку, то получим диагональный минор Δ_{n-1}. Вычеркивая в этом определителе снова правый столбец и нижнюю строку, находим Δ_{n-2}.

Критерий Кларка. Пусть D_n – квадратная матрица размером $[n\times n]$.

Отделим от нее внешние, окаймляющие ее столбцы и строки, и получим внутреннюю матрицу $\mathbf{D_{n-2}}$ размером $\mathbf{[n-2]\times[n-2]}$.

Продолжая отделение, найдем внутреннюю матрицу $\mathbf{D_{n-4}}$ и т.д.

Квадратная матрица $\mathbf{D_n}$ размером $\mathbf{[n\times n]}$ называется внутренне положительной, если ее определитель и определители всех внутренних матриц положительны.

Согласно критерию Кларка, корни полинома лежат внутри единичной окружности, если выполняются условия:

$$\mathbf{A(1)=\sum_{i=0}^{n} b_i\,(\mu_1) > 0;\qquad A(-1)=\sum_{i=0}^{n} b_i\,(\mu_1)\,(-1) > 0;} \tag{7}$$

$$\mathbf{\det D^{+}_{i} > 0;\ \det D^{-}_{i} > 0\ ;\ \ i = n-1,\ n-3,\ ...,}$$

где $\mathbf{D^{+}_{i}}$, $\mathbf{D^{-}_{i}}$ – внутренние матрицы для $\mathbf{D^{+}_{n-1}}$, $\mathbf{D^{-}_{n-1}}$, алгоритм формирования которых имеет следующий вид:

$$\mathbf{\left|\left((b_{j-i})_{k\times k} + b_{2n-i-j}\right)\right|_{\,k\times k} > 0;}$$

$$\mathbf{\left|\left((b_{j-i})_{k\times k} - b_{2n-i-j}\right)\right|_{\,k\times k} > 0\ ,\quad k = n-1,\ n-3,\ n-5,\ ....} \tag{8}$$

Иначе:

$$\mathbf{D^{-}_{n-1}} = \begin{vmatrix} \mathbf{b_n} & \mathbf{b_{n-1}} & \mathbf{...} & \mathbf{b_2 - b_0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b_n} & \mathbf{...} & \mathbf{b_3 - b_1} \\ \mathbf{...} & \mathbf{...} & \mathbf{...} & \mathbf{...} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-b_0} & \mathbf{...} & \mathbf{b_{n-1} - b_{n-3}} \\ \mathbf{b_0} & \mathbf{-b_1} & \mathbf{...} & \mathbf{b_n - b_{n-2}} \end{vmatrix};\ \mathbf{D^{+}_{n-1}} = \begin{vmatrix} \mathbf{b_n} & \mathbf{b_{n-1}} & \mathbf{...} & \mathbf{b_2 + b_0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b_n} & \mathbf{...} & \mathbf{b_3 + b_1} \\ \mathbf{...} & \mathbf{...} & \mathbf{...} & \mathbf{...} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b_0} & \mathbf{...} & \mathbf{b_{n-1} + b_{n-3}} \\ \mathbf{b_0} & \mathbf{b_1} & \mathbf{...} & \mathbf{b_n + b_{n-2}} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Эти условия выполняются при расположении корней полинома (1) внутри окружности единичного радиуса.

Рассмотрим некоторые пути решения поставленной задачи. Для $\mathbf{n} = 2$:

$$\mathbf{\sum_{i=0,\,j=0}^{2} \overset{*}{a}_{ij}\mu_1^i\,\mu_2^j = \overset{*}{a}_{00} + \overset{*}{a}_{01}\,\mu_2 + \overset{*}{a}_{02}\,\mu_2^2 + \overset{*}{a}_{10}\,\mu_1 + \overset{*}{a}_{11}\,\mu_1\,\mu_2 + \overset{*}{a}_{12}\,\mu_1\,\mu_2^2 +}$$

$$\mathbf{+\,\overset{*}{a}_{20}\,\mu_1^2 + \overset{*}{a}_{21}\,\mu_1^2\,\mu_2 + \overset{*}{a}_{22}\,\mu_1^2\,\mu_2^2 = (\overset{*}{a}_{00} + \overset{*}{a}_{10}\,\mu_1 + \overset{*}{a}_{20}\,\mu_1^2) +} \tag{10}$$

$$\mathbf{+\,(\overset{*}{a}_{00} + \overset{*}{a}_{10}\,\mu_1 + \overset{*}{a}_{20}\,\mu_1^2)\cdot\mu_2 + (\overset{*}{a}_{00} + \overset{*}{a}_{10}\,\mu_1 + \overset{*}{a}_{20}\,\mu_1^2)\cdot\mu_2^2 =}$$

$$\mathbf{= b_0 + b_1\,\mu_2 + b_2\,\mu_2^2.}$$

Установим интервал изменения параметра $\mathbf{\mu_2}$ при условии, что параметр $\mathbf{\mu_1}$ находится в интервале $1 \le \mathbf{\mu_1} \le 2$, или $\mathbf{\mu_1 = [1, 2]}$.

Построение корневого годографа. Из (10) следует, что символьная связь между параметрами $\mathbf{\mu_1}$ и $\mathbf{\mu_2}$ имеет вид:

$$\mathbf{\mu_2 = 1/2\cdot(a_{02} + a_{12}\,\mu_1 + a_{22}\,\mu_1^{\,2})^{-1}(-a_{21}\,\mu_1^{\,2} - a_{01} + 2a_{02} - a_{11}\,\mu_1 \pm}$$
$$\mathbf{\pm(4a_{12}\,\mu_1 a_{00} - 4a_{02}a_{10}\,\mu_1 - 4a_{22}\,\mu_1^{\,2} + a_{21}^{\,2}\,\mu_1^{\,4} + 2a_{21}\,\mu_1^{\,3}a_{11} - 4a_{12}\,\mu_1^{\,2}a_{10} -}$$
$$\mathbf{-4a_{12}\,\mu_1^{\,3}a_{20} - 4a_{22}\,\mu_1^{\,3}a_{10} - 4a_{22}\,\mu_1^{\,4}a_{20} + 2a_{21}\,\mu_1^{\,2}a_{01} + 2a_{01}a_{11}\,\mu_1 -}$$
$$\mathbf{-\,4a_{02}a_{20}\,\mu_1^{\,2} + a_{01}^{\,2} - 4a_{02}a_{00} + a_{11}^{\,2}\,\mu_1^{\,2})^{1/2}).}$$

Для конкретных параметров $\mathbf{a_{ij}}$ может быть построена кривая зависимости исследуемых параметров или ветви корневого годографа с учетом их вещественности и положительности в силу экономической природы рассматриваемых переменных. Так, при $\mathbf{a_{00}} = -2.1$, $\mathbf{a_{01}} = 1.2$, $\mathbf{a_{02}} = 1.1$, $\mathbf{a_{10}} = -2.5$, $\mathbf{a_{11}} = 1.2$, $\mathbf{a_{12}} = 1.3$, $\mathbf{a_{20}} = -2.7$, $\mathbf{a_{21}} = -4.9$, $\mathbf{a_{22}} = 1$, график такой зависимости представлен на рис. 1.

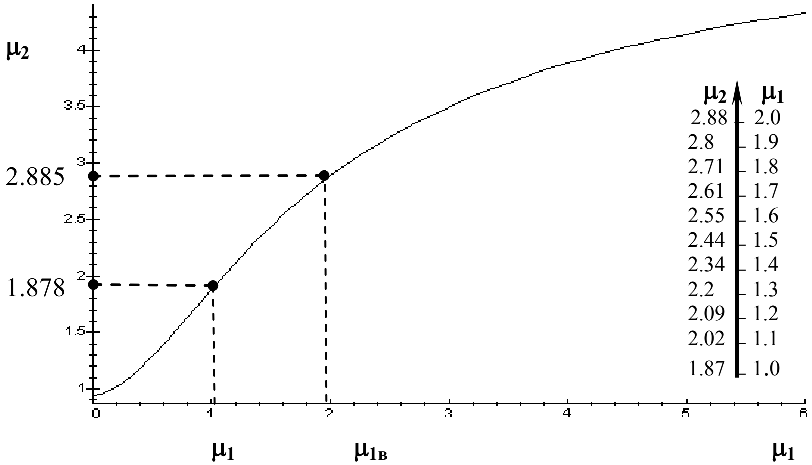

Рис. 1. График зависимости между исследуемыми параметрами

В тех случаях, когда непосредственное определение корней полинома представляет определенную сложность, целесообразно использовать косвенные критерии оценки расположения вещественных положительных корней.

Использование преобразования смещения. Рассмотрим два преобразованных полинома, полученных линейным смещением:

$$1)\ \boldsymbol{\mu_1 = \mu_1^{*} + 1;} \qquad 2)\ \boldsymbol{\mu_1 = \mu_1^{**} + 2.}$$

Соответствующие им коэффициенты преобразованных полиномов равны:

$\mathbf{b_{0(1)}} = -7.3 - 2.5\ \boldsymbol{\mu_2} + 3.4\ \boldsymbol{\mu_2}^2 = 3.4\ (\boldsymbol{\mu_2} + 1.143055818)\ (\boldsymbol{\mu_2} - 1.878349936)$;

$\mathbf{b_{1(1)}} = -7.9 - 8.6\ \boldsymbol{\mu_2} + 3.3\ \boldsymbol{\mu_2}^2 = 3.3\ (\boldsymbol{\mu_2} + .7197962749)\ (\boldsymbol{\mu_2} - 3.325856881)$;

$\mathbf{b_{2(1)}} = -2.7 - 4.9\ \boldsymbol{\mu_2} + \boldsymbol{\mu_2}^2 = (\ \boldsymbol{\mu_2} + .5000000000)\ (\boldsymbol{\mu_2} - 5.400000000)$;

$\mathbf{b_{0(2)}} = -17.9 - 16\ \boldsymbol{\mu_2} + 7.7\ \boldsymbol{\mu_2}^2 = 7.7\ (\boldsymbol{\mu_2} + .8060634501)\ (\boldsymbol{\mu_2} - 2.883985528)$;

$\mathbf{b_{1(2)}} = -13.3 - 18.4\ \boldsymbol{\mu_2} + 5.3\ \boldsymbol{\mu_2}^2 = 5.3\ (\boldsymbol{\mu_2} + .6141734772)\ (\boldsymbol{\mu_2} - 4.08587159)$;

$\mathbf{b_{2(2)}} = -2.7 - 4.9\ \boldsymbol{\mu_2} + \boldsymbol{\mu_2}^2 = (\ \boldsymbol{\mu_2} + .5000000000)\ (\boldsymbol{\mu_2} - 5.400000000)$.

Таким образом, необходимые условия положительности вещественной части параметра $\boldsymbol{\mu_2}$, согласно критерия Гурвица, сводятся к выполнению системы неравенств:

$$\mathbf{b_{0(1)} \le 0;\quad b_{1(1)} \le 0;\quad b_{2(1)} \le 0;\quad b_{0(2)} \ge 0;\quad b_{1(2)} \ge 0;\quad b_{2(2)} \ge 0}.$$

В общем случае, нарушение любого из этих условий означает переход одного вещественного корня или пары комплексно сопряженных корней за пределы рассматриваемой области. В рассматриваемой постановке задачи имеет смысл рассмотрение только первой ситуации и лишь для положительных значений переменных. Установление значимых в этом смысле условий легко проводится после факторизации получаемых условий. Так, например, некоторое условие

$$\begin{gathered}
G_1 \geq -3a_0^4a_3^2 - a_0^4a_1^2 - 2a_0^4a_2^2 + a_0^2a_2^4 + 3a_0^2a_3^4 - a_3^6 + a_0^6 - 2a_3a_0^2a_1^3 + \\
+ 2a_0^3a_1^2a_2 + a_0^2a_2^2a_3^2 - a_0^2a_2^2a_1^2 + 2a_0a_3^2a_2^3 - a_3^2a_0^2a_1^2 + a_3^4a_2^2 + \\
+ 2a_3^4a_1^2 - a_3^2a_1^4 + 6a_0^3a_3a_2a_1 - 2a_0a_2^3a_3a_1 - 6a_0a_3^3a_2a_1 + 4a_0a_3^2a_1^2a_2 + \\
+ 2a_0a_3a_2a_1^3 - 4a_0^2a_1a_3a_2^2 + a_3^2a_2^2a_1^2 - 2a_3^3a_1a_2^2
\end{gathered}$$

после факторизации приобретает вид

$$G_1 \geq -(a_3 + a_2 + a_1 + a_0)(a_3 - a_2 + a_1 - a_0)(a_3^2 - a_3a_1 + a_2a_0 - a_0^2)^2,$$

распадаясь на несколько условий, достаточно легко поддающихся анализу.

Выводы. Рассмотрены подходы к оценке устойчивости производственно-экономических процессов, описываемых полиномиальными моделями, как к задаче попадания некоторых итоговых характеристик этих процессов в заданный коридор с учетом возможных отклонений исходных параметров от заданных номинальных значений.

Предложены методы определения допустимых интервалов изменения первичных параметров производственно-экономических процессов, описываемых полиномиальными моделями, основанные как на прямом анализе корней уравнения (метод корневого годографа), так и на косвенных критериях принадлежности их определенной области (критерии Гурвица и Кларка).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жабко А.П., Харитонов В.Л. Необходимые и достаточные условия устойчивости линейного семейства полиномов // Автоматика и телемеханика. – 1994. – № 10. – С. 125 – 134.*
2. *Петров Ю.П. Устойчивость линейных систем при вариациях параметров // Автоматика и телемеханика. – 1994. – № 11. – С.186 – 189.*
3. *Подкучаев В.А., Светлов И.М. Аналитический метод построения гурвицевых интервальных полиномов // Автоматика и телемеханика. – 1996. – № 2. – С. 89 – 97.*

Поступила 19.06.2002

***ВАРТАНЯН Василий Михайлович**, доктор техн. наук, профессор, профессор кафедры Национального аэрокосмического университета «ХАИ». В 1977 году окончил ХАИ. Область научных интересов – автоматизированные системы обработки информации и управления.*

***КУЧМИЕВ Владимир Гавриилович**, канд. техн. наук, доцент кафедры Национального аэрокосмического университета «ХАИ». В 1976 году окончил ХАИ. Область научных интересов – автоматизированные системы обработки информации и управления.*

***РОМАНЕНКОВ Юрий Александрович**, аспирант кафедры менеджмента НАУ «ХАИ». В 2000 году окончил НАУ «ХАИ». Область научных интересов – применение аналитических мето-*

дов анализа систем в системах поддержки принятия решений.