УДК 623. 021: 005

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ СРЕДСТВ РЕЗЕРВА

к.т.н. В.Б. Кононов, Ю.И. Рафальский, А.П. Гурин
(представил д.т.н., проф. Б.Ф. Самойленко)

В статье излагается метод решения задачи оптимального управления распределением средств резерва.

В [1] сформулирована задача управления распределением средств резерва конфликтующих сторон исходя из условия максимального поражения оперирующих средств стороны **B**:

$$\begin{gathered}\mathbf{y(T) \to min}\ ;\\ \frac{\mathbf{dx(t)}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{-by(t) + u(t)}\ ;\\ \frac{\mathbf{dy(t)}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{-ax(t) + v(t)}\ ;\\ \mathbf{x(0) = x_0}\ ; \quad \mathbf{y(0) = y_0}\ ; \quad \mathbf{0 \le u(t) \le c}\ ; \quad \int_0^T \mathbf{u(t)dt \le A_0,}\end{gathered} \tag{1}$$

где $\mathbf{x(t)}$ и $\mathbf{y(t)}$ – математические ожидания количества боевых средств сторон **A** и **B**, сохранившихся к моменту времени **t**; $\mathbf{a = \alpha P}$ и $\mathbf{b = \beta Q}$ – эффективные скорострельности группировок **A** и **B**; α и β – средние скорострельности (число выстрелов в единицу времени) сторон **A** и **B**; **P** и **Q** – вероятности поражения одним выстрелом боевых средств сторон **A** и **B;** $\mathbf{u(t)}$ – интенсивность поступления средств резерва стороны **A**; $\mathbf{v(t)}$ – интенсивность поступления средств резерва стороны **B**; **T** – заданное время боя; **c** – ограничение, определяющее темпы поступления резерва; $\mathbf{A_0}$ – ограничение, определяющее общее количество средств резерва.

Решение дифференциальных уравнений получено в виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{x(t)} &= \mathbf{x_0 ch\sqrt{ab}t - y_0\sqrt{\frac{b}{a}}sh\sqrt{ab}t + \int_0^t\left[ch\sqrt{ab}(t-\tau)u(\tau) - \sqrt{\frac{b}{a}}sh\sqrt{ab}(t-\tau)v(\tau)\right]d\tau}\ ;\\ \mathbf{y(t)} &= \mathbf{y_0 ch\sqrt{ab}t - x_0\sqrt{\frac{a}{b}}sh\sqrt{ab}t + \int_0^t\left[-\sqrt{\frac{a}{b}}sh\sqrt{ab}(t-\tau)u(\tau) + ch\sqrt{ab}(t-\tau)v(\tau)\right]d\tau.}\end{aligned} \tag{2}$$

Количество боевых средств стороны **B** к моменту времени **T** определим следующим образом:

$$\mathbf{y(T) = y_0 ch\sqrt{ab}T - x_0 \sqrt{a/b}\ sh\sqrt{ab}T +}$$
$$\mathbf{+\int_0^T \left[-\sqrt{a/b}\ sh\sqrt{ab}(T-\tau)u(\tau) + ch\sqrt{ab}(T-\tau)v(\tau)\right]d\tau.} \qquad (3)$$

Отсюда задача минимизации терминального функционала **y(T)** сводится к следующей задаче:

$$\mathbf{H[u] = \int_0^T \left[-\sqrt{a/b}\ sh\sqrt{ab}(T-\tau)u(\tau)\right]d\tau \to min}\ ;$$
$$\mathbf{0 \le u(\tau) \le c}\ ; \quad \mathbf{\int_0^T u(\tau)d\tau \le A_0}. \qquad (4)$$

Если $\mathbf{cT \le A_0}$, то из $\mathbf{\sqrt{a/b}\, sh\sqrt{ab}(\tau - T) \le 0,\ \ \tau \in [0,\ T]}$ следует, что

$$\mathbf{u^*(\tau) \equiv c,\ \ \tau \in [0,\ T].}$$

Рассмотрим случай $\mathbf{cT > A_0}$. Функционал **H[u]** линеен и, следовательно, выпукл. Допустимое множество задачи (4) выпукло, поэтому она является задачей выпуклой оптимизации. Кроме того, для данной задачи очевидно выполняется условие регулярности Слейтера, т.е. существует функция $\mathbf{u(\tau)}$, для которой $\mathbf{0 < u(\tau) < c}$; $\mathbf{\int_0^T u(\tau)d\tau < A_0}$.

Используя теорему Куна-Такера запишем следующие необходимые и достаточные условия оптимальности [2]:

$$\begin{cases} \mathbf{\min\limits_{0 \le u(t) \le c} \int_0^T \left[-\sqrt{a/b}\ sh\sqrt{ab}(T-\tau) + \lambda\right]u(\tau)d\tau = \int_0^T \left[-\sqrt{a/b}\ sh\sqrt{ab}(T-\tau) + \lambda\right]u^*(\tau)d\tau}\ ; \\ \mathbf{\lambda\left(\int_0^T u^*(\tau)dt - A_0\right)d\tau = 0,\ \ \lambda \ge 0.} \end{cases} \qquad (5)$$

Используя принцип минимума, получим:

$$\mathbf{u^*(t) = \begin{cases} 0,\ -\sqrt{a/b}\ sh\sqrt{ab}(T-\tau) + \lambda \ge 0\ ; \\ c,\ -\sqrt{a/b}\ sh\sqrt{ab}(T-\tau) + \lambda < 0, \end{cases}}$$

следовательно, $\mathbf{u^*(t) = \frac{c}{2}\left\{1 - sign\left[-\sqrt{a/b}\ sh\sqrt{ab}(T-\tau) + \lambda\right]\right\}}$.

При этом, $\mathbf{\lambda \ne 0}$, так как в противном случае

$$\mathbf{u^*(t) = \frac{c}{2}\left\{1 - sign\left[-\sqrt{a/b}\ sh\sqrt{ab}(T-\tau)\right]\right\} = c,}$$

что противоречит условию $\mathbf{cT > A_0}$. Следовательно, из условия дополняющей нежесткости в (5) вытекает уравнение

$$\int_0^T \mathbf{u}^*(\tau)\,d\tau = \mathbf{A_0} \qquad (6)$$

или

$$\frac{c}{2}\int_0^T \left\{1 - \operatorname{sign}\left[-\sqrt{a/b}\,\operatorname{sh}\sqrt{ab}(T-\tau)+\lambda\right]\right\}d\tau = A_0 . \qquad (7)$$

Уравнение

$$-\sqrt{a/b}\,\operatorname{sh}\sqrt{ab}(T-\tau)+\lambda = 0 \qquad (8)$$

имеет единственный корень $\mathbf{t_A}$ на промежутке [0, T]. Действительно, если $-\sqrt{a/b}\,\operatorname{sh}\sqrt{ab}(T-\tau)+\lambda > 0,\ \tau \in [0,\ T]$, то $u^*(\tau) \equiv 0,\ \tau \in [0, T]$, что противоречит (6). Если $-\sqrt{a/b}\,\operatorname{sh}\sqrt{ab}(T-\tau)+\lambda < 0,\ \tau \in [0, T]$, то $u^*(\tau) \equiv 0,\ \tau \in [0, T]$, что противоречит $\mathbf{cT > A_0}$. Единственность корня следует из монотонности функции в левой части уравнения (8). Тогда из соотношения (7) получим:

$$\frac{c}{2}\int_{\tau_A}^T 2dt = A_0 \ ; \quad \tau_A = T - \frac{A_0}{c}\ , \text{ причём } u^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le \tau < T - \dfrac{A_0}{c}; \\ c, & T - \dfrac{A_0}{c} \le \tau \le T. \end{cases}$$

Таким образом, чем больше величина максимальной интенсивности поступления средств резерва, тем в более поздний момент времени должны подключаться средства резерва.

Результаты решения уравнений системы (1) дают возможность проанализировать процесс конфликтной ситуации в зависимости от темпа пополнения сил и обосновать соответствующие требования к темпу пополнения своей группировки для того, чтобы завершить конфликтную ситуацию разгромом противника в заданное время, и могут быть положены в основу разработки алгоритма оптимального управления распределением средств резерва по критерию минимума среднего количества средств стороны **В**.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кононов В.Б., Кушнерук Ю.И., Евстрат Д.И. Распределение однородных средств резерва в ходе встречной конфликтной ситуации двух группировок // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип 4(20). – С. 96 – 101.*
2. *Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 518 с.*

Поступила 8.07.2002

***КОНОНОВ Владимир Борисович**, канд. техн. наук, доцент, зам. нач. факультета ХВУ. В 1987 году окончил ХВВКИУ РВ. Область научных интересов – исследование операций.*

***РАФАЛЬСКИЙ Юрий Иванович**, нач. факультета ХВУ. В 1991 году окончил Военную командную академию ПВО им. Жукова. Область научных интересов – исследование операций.*

***ГУРИН Артём Петрович** – курсант ХВУ.*