

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ СРЕДСТВ РЕЗЕРВА

к.т.н. В.Б. Кононов, Ю.И. Рафальский, А.П. Гурин
(представил д.т.н., проф. Б.Ф. Самойленко)

В статье излагается метод решения задачи оптимального управления распределением средств резерва.

В [1] сформулирована задача управления распределением средств резерва конфликтующих сторон исходя из условия максимального поражения оперирующих средств стороны **B**:

$$\begin{aligned} y(T) &\rightarrow \min ; \\ \frac{dx(t)}{dt} &= -by(t) + u(t); \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -ax(t) + v(t); \end{aligned} \quad (1)$$

$$x(0) = x_0 ; \quad y(0) = y_0 ; \quad 0 \leq u(t) \leq c ; \quad \int_0^T u(t) dt \leq \Lambda_0,$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – математические ожидания количества боевых средств сторон **A** и **B**, сохранившихся к моменту времени t ; $a = \alpha P$ и $b = \beta Q$ – эффективные скорострельности группировок **A** и **B**; α и β – средние скорострельности (число выстрелов в единицу времени) сторон **A** и **B**; P и Q – вероятности поражения одним выстрелом боевых средств сторон **A** и **B**; $u(t)$ – интенсивность поступления средств резерва стороны **A**; $v(t)$ – интенсивность поступления средств резерва стороны **B**; T – заданное время боя; c – ограничение, определяющее темпы поступления резерва; Λ_0 – ограничение, определяющее общее количество средств резерва.

Решение дифференциальных уравнений получено в виде:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \operatorname{ch} \sqrt{abt} - y_0 \sqrt{\frac{b}{a}} \operatorname{sh} \sqrt{abt} + \int_0^t \left[\operatorname{ch} \sqrt{ab}(t-\tau) u(\tau) - \sqrt{\frac{b}{a}} \operatorname{sh} \sqrt{ab}(t-\tau) v(\tau) \right] d\tau ; \\ y(t) &= y_0 \operatorname{ch} \sqrt{abt} - x_0 \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{sh} \sqrt{abt} + \int_0^t \left[-\sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{sh} \sqrt{ab}(t-\tau) u(\tau) + \operatorname{ch} \sqrt{ab}(t-\tau) v(\tau) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (2)$$

Количество боевых средств стороны **B** к моменту времени T опре-

делим следующим образом:

$$y(T) = y_0 \operatorname{ch} \sqrt{ab} T - x_0 \sqrt{a/b} \operatorname{sh} \sqrt{ab} T + \int_0^T \left[-\sqrt{a/b} \operatorname{sh} \sqrt{ab} (T-\tau) u(\tau) + \operatorname{ch} \sqrt{ab} (T-\tau) v(\tau) \right] d\tau. \quad (3)$$

Отсюда задача минимизации терминального функционала $y(T)$ сводится к следующей задаче:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}[u] &= \int_0^T \left[-\sqrt{a/b} \operatorname{sh} \sqrt{ab} (T-\tau) u(\tau) \right] d\tau \rightarrow \min; \\ 0 &\leq u(\tau) \leq c; \quad \int_0^T u(\tau) d\tau \leq A_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Если $cT \leq A_0$, то из $\sqrt{a/b} \operatorname{sh} \sqrt{ab} (\tau - T) \leq 0$, $\tau \in [0, T]$ следует, что

$$u^*(\tau) \equiv c, \quad \tau \in [0, T].$$

Рассмотрим случай $cT > A_0$. Функционал $\mathbf{H}[u]$ линеен и, следовательно, выпукл. Допустимое множество задачи (4) выпукло, поэтому она является задачей выпуклой оптимизации. Кроме того, для данной задачи очевидно выполняется условие регулярности Слейтера, т.е. существует

функция $u(\tau)$, для которой $0 < u(\tau) < c$; $\int_0^T u(\tau) d\tau < A_0$.

Используя теорему Куна-Такера запишем следующие необходимые и достаточные условия оптимальности [2]:

$$\begin{cases} \min_{0 \leq u(\tau) \leq c} \int_0^T \left[-\sqrt{a/b} \operatorname{sh} \sqrt{ab} (T-\tau) + \lambda \right] u(\tau) d\tau = \int_0^T \left[-\sqrt{a/b} \operatorname{sh} \sqrt{ab} (T-\tau) + \lambda \right] u^*(\tau) d\tau; \\ \lambda \left(\int_0^T u^*(\tau) d\tau - A_0 \right) = 0, \quad \lambda \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Используя принцип минимума, получим:

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & -\sqrt{a/b} \operatorname{sh} \sqrt{ab} (T-t) + \lambda \geq 0; \\ c, & -\sqrt{a/b} \operatorname{sh} \sqrt{ab} (T-t) + \lambda < 0, \end{cases}$$

следовательно, $u^*(t) = \frac{c}{2} \left\{ 1 - \operatorname{sign} \left[-\sqrt{a/b} \operatorname{sh} \sqrt{ab} (T-t) + \lambda \right] \right\}$.

При этом, $\lambda \neq 0$, так как в противном случае

$$u^*(t) = \frac{c}{2} \left\{ 1 - \operatorname{sign} \left[-\sqrt{a/b} \operatorname{sh} \sqrt{ab} (T-t) \right] \right\} = c,$$

что противоречит условию $cT > A_0$. Следовательно, из условия допол-

няющей нежесткости в (5) вытекает уравнение

$$\int_0^T u^*(\tau) d\tau = A_0 \quad (6)$$

или

$$\frac{c}{2} \int_0^T \left\{ 1 - \operatorname{sign} \left[-\sqrt{a/b} \operatorname{sh} \sqrt{ab} (T - \tau) + \lambda \right] \right\} d\tau = A_0. \quad (7)$$

Уравнение $-\sqrt{a/b} \operatorname{sh} \sqrt{ab} (T - \tau) + \lambda = 0$ (8)

имеет единственный корень t_A на промежутке $[0, T]$. Действительно, если $-\sqrt{a/b} \operatorname{sh} \sqrt{ab} (T - \tau) + \lambda > 0$, $\tau \in [0, T]$, то $u^*(\tau) \equiv 0$, $\tau \in [0, T]$, что противоречит (6). Если $-\sqrt{a/b} \operatorname{sh} \sqrt{ab} (T - \tau) + \lambda < 0$, $\tau \in [0, T]$, то $u^*(\tau) \equiv 0$, $\tau \in [0, T]$, что противоречит $cT > A_0$. Единственность корня следует из монотонности функции в левой части уравнения (8). Тогда из соотношения (7) получим:

$$\frac{c}{2} \int_{\tau_A}^T 2dt = A_0; \quad \tau_A = T - \frac{A_0}{c}, \quad \text{причём } u^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T - \frac{A_0}{c}; \\ c, & T - \frac{A_0}{c} \leq \tau \leq T. \end{cases}$$

Таким образом, чем больше величина максимальной интенсивности поступления средств резерва, тем в более поздний момент времени должны подключаться средства резерва.

Результаты решения уравнений системы (1) дают возможность проанализировать процесс конфликтной ситуации в зависимости от темпа пополнения сил и обосновать соответствующие требования к темпу пополнения своей группировки для того, чтобы завершить конфликтную ситуацию разгромом противника в заданное время, и могут быть положены в основу разработки алгоритма оптимального управления распределением средств резерва по критерию минимума среднего количества средств стороны **B**.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кононов В.Б., Кушнерук Ю.И., Евстрат Д.И. Распределение однородных средств резерва в ходе встречной конфликтной ситуации двух группировок // Системы обработки информации. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вып 4(20). – С. 96 – 101.
2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 518 с.

Поступила 8.07.2002

КОНОНОВ Владимир Борисович, канд. техн. наук, доцент, зам. нач. факультета ХВУ. В 1987 году окончил ХВВКИУ РВ. Область научных интересов – исследование операций.

РАФАЛЬСКИЙ Юрий Иванович, нач. факультета ХВУ. В 1991 году окончил Военную командную академию ПВО им. Жукова. Область научных интересов – исследование операций.

ГУРИН Артём Петрович – курсант ХВУ.