

ОБНАРУЖЕНИЕ ОШИБОК В МОДУЛЯРНОМ АРИФМЕТИЧЕСКОМ УСТРОЙСТВЕ НА ОСНОВЕ ПРИМЕНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОГО ОСНОВАНИЯ

к.т.н. Л.А. Овчаренко, С.С. Чекалин
(представил д.т.н. В.П. Ирхин)

Предложен алгоритм обнаружения ошибок в модулярном арифметическом устройстве путем сравнения остатка по дополнительному (контрольному) основанию с расчетным значением остатка по этому основанию, полученному из остатков исходной системы оснований с применением только модульных арифметических операций.

Высокое быстродействие выполнения арифметических операций в сочетании с возможностью контроля ошибок в работе арифметических устройств (АУ) является неотъемлемым признаком наиболее перспективных современных систем цифровой обработки сигналов (ЦОС) [1]. В этой связи в ходе проектирования АУ аппаратных средств ЦОС весьма эффективно применение модулярной системы счисления (МСС), которая за счет присущего ей внутреннего параллелизма позволяет, во-первых, реализовать вычислительные структуры максимального быстродействия, и, во-вторых, обнаруживать ошибки в ходе вычислительного процесса [1, 2].

Один из способов обнаружения ошибок заключается в расширении диапазона МСС за счет включения в модулярное АУ контрольного блока, выполняющего параллельно с основными блоками арифметические операции [2]. В случае искажения цифры по любому из оснований (в том числе и контрольному), происходит выход результата арифметической операции за пределы диапазона представления чисел основной системы оснований, а обнаружение ошибки, соответственно, осуществляется путем сравнения остатка по дополнительному (контрольному) основанию с расчетным значением остатка по этому основанию, полученному на основании остатков исходной системы оснований.

Однако в известных алгоритмах расчета значения остатка по дополнительному основанию используются "неудобные" в модулярной арифметике немодульные операции, что в конечном итоге приводит к существенному снижению быстродействия АУ в целом [2].

Цель статьи – предложить алгоритм определения остатка по дополнительному основанию, содержащий только модульные арифметические операции.

Постановка задачи. Пусть задана система оснований $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_n$ с диапазоном $\mathbf{M} = \prod_{i=1}^n \mathbf{m}_i$, и в этой системе представлено число

$$\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad (1)$$

где $0 \leq \mathbf{A} < \mathbf{M}$;

$$\alpha_i = \mathbf{A} - \left\lfloor \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{m}_i} \right\rfloor \cdot \mathbf{m}_i = |\mathbf{A}|_{\mathbf{m}_i}, \quad i = \overline{1, n}; \quad (2)$$

$\lfloor \bullet \rfloor$ – целая часть числа.

Введем дополнительное основание \mathbf{m}_{n+1} , такое, что:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_i < \mathbf{m}_{n+1}, \quad i = \overline{1, n}; \\ \left\lfloor \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{m}_{n+1}} \right\rfloor \equiv 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Соответственно, диапазон расширенной системы будет в \mathbf{m}_{n+1} раз больше диапазона исходной системы

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M} \cdot \mathbf{m}_{n+1}, \quad (4)$$

а число \mathbf{A} представится остатками

$$\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}). \quad (5)$$

Требуется по известным цифрам α_i ($i = \overline{1, n}$) исходной системы оснований определить значение $\alpha_{n+1} = |\mathbf{A}|_{\mathbf{m}_{n+1}}$ в расширенной системе.

Решение задачи. Рассмотрим расширенное представление числа $\mathbf{A} \cdot \mathbf{m}_{n+1}$, $0 \leq \mathbf{A} \cdot \mathbf{m}_{n+1} < \mathbf{M}^*$. В модулярном коде такого числа остаток по основанию \mathbf{m}_{n+1} равен 0, т.е.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{m}_{n+1} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, 0), \quad (6)$$

где $\gamma_i = |\alpha_i \cdot \mathbf{m}_{n+1}|_{\mathbf{m}_i}$, $i = \overline{1, n}$.

Из представления числа $\mathbf{A} \cdot \mathbf{m}_{n+1}$ в позиционном коде, полученном на основании китайской теоремы об остатках [1, 2]:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{m}_{n+1} = \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \mu_i^* \cdot \mathbf{M}_i^* - \mathbf{R}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{m}_{n+1}) \cdot \mathbf{M}^*, \quad (7)$$

видно, что

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \mu_i^* \cdot \mathbf{M}_i - \mathbf{R}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{m}_{n+1}) \cdot \mathbf{M}, \quad (8)$$

где $\mathbf{M}_i^* = \mathbf{M}^* / \mathbf{m}_i$; $\mathbf{M}_i = \mathbf{M} / \mathbf{m}_i$; μ_i^* – константа, определяемая из решения сравнения $|\mu_i^* \cdot \mathbf{M}_i^*|_{\mathbf{m}_i} \equiv 1$, $i = \overline{1, n+1}$; $\mathbf{R}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{m}_{n+1})$ – ранг числа

$A \cdot m_{n+1}$, показывающий во сколько раз диапазон расширенной системы M^* был превзойден при переходе из модулярного кода в позиционный код.

Соответственно, на основании (3) и (8) получаем

$$\alpha_{n+1} = |A|_{m_{n+1}} = \left| \sum_{i=1}^n \left| \gamma_i \cdot \mu_i^* \cdot M_i \right|_{m_{n+1}} - |R(A \cdot m_{n+1})|_{m_{n+1}} \right|_{m_{n+1}}. \quad (9)$$

Один из способов оценки значения ранга $R(A \cdot m_{n+1})$ в (9) базируется на конструировании числа из минимальных псевдоортогональных компонент [2].

Минимальным псевдоортогональным числом $P(\gamma_i)$ называется число, модулярный код которого в расширенной системе оснований равен

$$P(\gamma_i) = (0, \dots, 0, \gamma_i, 0, \dots, 0, S(\gamma_i)), \quad i = \overline{1, n}, \quad (10)$$

его значение лежит в диапазоне

$$0 \leq P(\gamma_i) < M, \quad (11)$$

а ранг вычисляется по формуле

$$R(P(\gamma_i)) = \left\lfloor \frac{\gamma_i \cdot \mu_i^* \cdot M_i^* + S(\gamma_i) \cdot M_{n+1}^*}{M^*} \right\rfloor, \quad (12)$$

где $S(\gamma_i)$ – остаток числа $P(\gamma_i)$ по основанию m_{n+1} :

$$S(\gamma_i) = \left\| \left| \gamma_i \cdot \mu_i^* \cdot M_i^* \right|_M \right\|_{m_{n+1}}. \quad (13)$$

Суммируя минимальные псевдоортогональные компоненты $P(\gamma_i)$ (10), получим число

$$P(A \cdot m_{n+1}) = \sum_{i=1}^n P(\gamma_i) = \left(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \left| \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_{m_{n+1}} \right), \quad (14)$$

модулярный код которого в общем случае отличается от кода числа $A \cdot m_{n+1}$ (6) цифрой по дополнительному основанию.

Ранг числа $P(A \cdot m_{n+1})$ определяется через ранги чисел $P(\gamma_i)$ как [2]:

$$R(P(A \cdot m_{n+1})) = \sum_{i=1}^n R(P(\gamma_i)) - \left\lfloor \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) / m_{n+1} \right\rfloor. \quad (15)$$

Если $n < m_{n+1}$, то с учетом (11) число $P(A \cdot m_{n+1})$ всегда лежит в диапазоне

$$0 \leq P(A \cdot m_{n+1}) < n \cdot M < M^*. \quad (16)$$

В этом случае при конструировании числа $P(A \cdot m_{n+1})$ из минимальных псевдоортогональных компонент нет выхода за пределы диапазона $[0, M^*]$. Поэтому расчетный ранг числа $P(A \cdot m_{n+1})$ (15) всегда совпадает с истинным значением ранга [2]. Согласно теореме о рангах элементов числовых последовательностей [2] при $|M|_{m_{n+1}} \equiv 1$ ранг

$R(P(A \cdot m_{n+1}))$ числа $P(A \cdot m_{n+1}) = \left(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \left| \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_{m_{n+1}} \right)$ равен ран-

гу $R(A \cdot m_{n+1}|_M)$ числа $A \cdot m_{n+1}|_M$, если $\left| \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_{m_{n+1}} \geq \|A \cdot m_{n+1}|_M\|_{m_{n+1}}$, а

в противном случае $R(A \cdot m_{n+1}|_M) = R(P(A \cdot m_{n+1})) + 1$.

Лемма. Если $0 \leq A < M$ и $|M|_{m_{n+1}} \equiv 1$, то $\|A \cdot m_{n+1}|_M\|_{m_{n+1}} = 0$ при

$0 \leq A < \frac{M-1}{m_{n+1}}$ и $\|A \cdot m_{n+1}|_M\|_{m_{n+1}} = m_{n+1} - \left\lfloor \frac{A \cdot m_{n+1}}{M} \right\rfloor$ при других A .

Доказательство леммы вытекает из определения модуля числа (2).

Поскольку при $|M|_{m_{n+1}} \equiv 1$ числа $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, x)$ и $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, |x+1|_{m_{n+1}})$, $x = \overline{0, m_{n+1} - 1}$, находятся в соседних интервалах $[(j-1) \cdot M, j \cdot M)$ и $[j \cdot M, (j+1) \cdot M)$, $j = 1, 2, \dots, m_{n+1}$ [2], из утверждения леммы и неравенства (16) могут быть сформулированы следующие следствия:

Следствие 1. Если $0 \leq A < \frac{M-1}{m_{n+1}}$ и $n < m_{T+1}$, то

$$\left| \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_{m_{n+1}} \geq \|A \cdot m_{n+1}|_M\|_{m_{n+1}} = 0.$$

Следствие 2. Если $\frac{M-1}{m_{n+1}} \leq A < \frac{(n-1) \cdot (M-1)}{m_{n+1}}$ и $n < m_{T+1}$, то

$$\left| \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_{m_{n+1}} \geq \|A \cdot m_{n+1}|_M\|_{m_{n+1}} > 0 \text{ или } 0 \leq \left| \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_{m_{n+1}} < \|A \cdot m_{n+1}|_M\|_{m_{n+1}}.$$

Следствие 3. Если $\frac{(n-1) \cdot (M-1)}{m_{n+1}} \leq A < M$ и $n < m_{T+1}$, то

$$\left| \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_{m_{n+1}} \geq \left| A \cdot m_{n+1} \right|_M \Big|_{m_{n+1}} > 0, \text{ либо } \left| \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_{m_{n+1}} = 0.$$

Теорема. Если задана система оснований m_1, m_2, \dots, m_n с диапазоном $M = \prod_{i=1}^n m_i$, в которой число A ($0 \leq A < M$) представляется остатками $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, и введено дополнительное основание m_{n+1} , такое, что $m_i < m_{n+1}, i = \overline{1, n}, n < m_{n+1}$ и $|M|_{m_{n+1}} \equiv 1$, то значение остатка по дополнительному основанию при $(n-1) \cdot (M-1) / m_{n+1} \leq A < M$ определяется как

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} \left| \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \mu_i^* \cdot M_i - R(P(\gamma_i)) \right|_{m_{n+1}} + \left| r \cdot \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_q - r \cdot \left| \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_{m_{n+1}} \Big|_q \Big|_{m_{n+1}}, \\ \text{если } \left| \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_{m_{n+1}} = 0; \\ \left| \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \mu_i^* \cdot M_i - R(P(\gamma_i)) \right|_{m_{n+1}} + \left| r \cdot \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_q - r \cdot \left| \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_{m_{n+1}} \Big|_q \Big|_{m_{n+1}} + 1, \\ \text{в иных случаях,} \end{cases}$$

где q – целое положительное число, взаимно простое с числом m_{n+1} , $q \geq n$; r – константа, определяемая как решение сравнения $|r \cdot m_{n+1}|_q \equiv 1$.

Доказательство. Так как остаток числа $A \cdot m_{n+1}$ по основанию m_{n+1} равен 0, то в соответствии с условием теоремы и следствием 3 леммы,

$$\left| \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_{m_{n+1}} = |A \cdot m_{n+1}|_{m_{n+1}} = 0 \quad \text{либо}$$

$$\left| \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_{m_{n+1}} \geq |A \cdot m_{n+1}|_M \Big|_{m_{n+1}} > |A \cdot m_{n+1}|_{m_{n+1}} = 0. \text{ Тогда, применяя}$$

теорему о рангах элементов числовых последовательностей [2], можно утверждать, что расчетный ранг $R(P(A \cdot m_{n+1}))$ числа

$$P(A \cdot m_{n+1}) = \left(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \left| \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_{m_{n+1}} \right) \text{ связан с рангом } R(A \cdot m_{n+1})$$

числа $A \cdot m_{n+1} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, 0)$ соотношением

$$R(A \cdot m_{n+1}) = \begin{cases} R(P(A \cdot m_{n+1})), & \text{если } \left| \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_{m_{n+1}} = 0; \\ R(P(A \cdot m_{n+1})) - 1, & \text{в иных случаях,} \end{cases} \quad (17)$$

где $R(P(A \cdot m_{n+1}))$ вычисляется по формуле (15), в которой целая часть суммы определяется выражением

$$\left[\sum_{i=1}^n S(\gamma_i) / m_{n+1} \right] = \left(\sum_{i=1}^n S(\gamma_i) - \left| \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_{m_{n+1}} \right) / m_{n+1}. \quad (18)$$

Поскольку $S(\gamma_i) < m_{n+1}$, то результат округления в меньшую сторону значения дроби (18) всегда будет меньше величины n . В связи с этим, выражение в правой части (18) может быть определено формальным делением числителя дроби на m_{n+1} по модулю q [2]:

$$\left(\sum_{i=1}^n S(\gamma_i) - \left| \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_{m_{n+1}} \right) / m_{n+1} = \left| r \cdot \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_q - \left| r \cdot \left| \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_{m_{n+1}} \right|_q, \quad (19)$$

где q – целое положительное число, взаимно простое с числом m_{n+1} , $q \geq n$; r – константа, найденная из решения сравнения $|r \cdot m_{n+1}|_q \equiv 1$.

Подставляя (15), (17) и (19) в (9), приходим к утверждению теоремы.

Пример. Рассмотрим систему оснований:

$$m_1 = 2; m_2 = 3; m_3 = 5; m_4 = 7 \quad (n = 4; M = 210),$$

в которую введено дополнительное основание $m_{n+1} = m_5 = 11$, $|210|_{11} \equiv 1$.

Находим значения констант: $(n-1) \cdot (M-1) / m_{n+1} = 57$; $\mu_1^* = 1$; $\mu_2^* = 2$; $\mu_3^* = 3$; $\mu_4^* = 1$; $M_1 = 105$; $M_2 = 70$; $M_3 = 42$; $M_4 = 30$ и выбираем $q = n = 4$. Из сравнения $|r \cdot m_{n+1}|_q \equiv 1$ значение $r = 3$. Пусть в результате выполнения арифметической операции в модулярном АУ получено число $A = 119$, которое представлено в расширенной системе оснований остатками $A = (1, 2, 4, 0, 9)$. Определим, используя остатки по основаниям m_1, m_2, m_3 и m_4 ,

остаток числа A по основанию m_5 . С учетом (6), (12) и (13) вычисляем:
 $\gamma_1 = 1$; $\gamma_2 = 1$; $\gamma_3 = 4$ и $\gamma_4 = 0$; $S(\gamma_1) = 6$; $S(\gamma_2) = 4$; $S(\gamma_3) = 7$ и $S(\gamma_4) = 0$;
 $R(P(\gamma_1)) = 1$; $R(P(\gamma_2)) = 1$; $R(P(\gamma_3)) = 3$ и $R(P(\gamma_4)) = 0$.

Соответственно

$$\sum_{i=1}^n \left| \gamma_i \cdot \mu_i^* \cdot M_i - R(P(\gamma_i)) \right|_{m_{n+1}} = 18; \quad \left| \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_{m_{n+1}} = 6; \quad \left| \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_q = 1;$$

$$\left| \left| r \cdot \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_q - \left| r \cdot \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_{m_{n+1}} \right|_q = 1.$$

Применяя утверждение доказанной теоремы, рассчитываем на основании полученных результатов остаток по дополнительному основанию $\alpha_5 = |18 + 1 + 1|_{11} = 9$, который совпадает с истинным значением.

Пусть в результате выполнения арифметической операции произошло искажение цифры по основанию m_4 : $\tilde{\alpha}_4 = 2$.

С учетом (6), (12) и (13) получаем:

$\gamma_1 = 1$; $\gamma_2 = 1$; $\gamma_3 = 4$ и $\tilde{\gamma}_4 = 1$; $S(\gamma_1) = 6$; $S(\gamma_2) = 4$; $S(\gamma_3) = 7$ и $S(\tilde{\gamma}_4) = 10$;
 $R(P(\gamma_1)) = 1$; $R(P(\gamma_2)) = 1$; $R(P(\gamma_3)) = 3$ и $R(P(\tilde{\gamma}_4)) = 1$.

Соответственно $\sum_{i=1}^n \left| \gamma_i \cdot \mu_i^* \cdot M_i - R(P(\gamma_i)) \right|_{m_{n+1}} = 25$; $\left| \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_{m_{n+1}} = 5$;

$$\left| \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_q = 3; \quad \left| \left| r \cdot \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_q - \left| r \cdot \sum_{i=1}^n S(\gamma_i) \right|_{m_{n+1}} \right|_q = 2, \text{ а остаток по допол-}$$

нительному основанию равен $\tilde{\alpha}_5 = |25 + 2 + 1|_{11} = 6$. Так как полученный результат не совпадает с истинным значением цифры α_5 , то принимается решение о наличии сбоя в работе модулярного АУ.

Следует отметить, что для приведенных в примере исходных данных утверждение теоремы справедливо при $32 \leq A < M$, т.е. в более широком диапазоне, чем $(n-1) \cdot (M-1) / m_{n+1} = 57 \leq A < M$.

Таким образом, ценой незначительного уменьшения диапазона изменения данных в модулярном АУ получен алгоритм расчета цифры по дополнительному (контрольному) основанию, содержащий только модульные арифметические операции, которые достаточно просто реализуются таблично на базе матриц логических вентилей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чернявский А.С., Данилевич В.В., Коляда А.А., Селянинов М.Ю. *Высокоскоростные методы и системы цифровой обработки информации*. – Мн.: БГУ, 1996. – 376 с.
2. Акушский И.Я., Юдицкий Д.И. *Машинная арифметика в остаточных классах*. – М.: Сов. радио, 1968. – 440 с.

Поступила 8.07.2002

ОВЧАРЕНКО Леонид Александрович, канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, докторант Военного института радиоэлектроники (г. Воронеж). В 1983 году окончил Череповецкое высшее военное инженерное училище радиоэлектроники. Область научных интересов – высокопроизводительные и отказоустойчивые вычислительные структуры цифровой обработки сигналов.

ЧЕКАЛИН Сергей Сергеевич, ст. преподаватель, зав. лаб. Российского государственного открытого технического университета путей сообщения (Воронежский филиал), который окончил в 2000 году. Область научных интересов – высокопроизводительные и отказоустойчивые вычислительные структуры цифровой обработки сигналов.
