УДК 623.746.2.

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА БЕЗАБЕРРАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ПЕРЕДАЧИ МОДУЛЯЦИИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ АПЕРТУРЕ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

к.т.н. С.В. Черный, А.А. Жевтюк
(представил д.т.н., проф. Д.В. Голкин)

Представлен алгоритм расчета безаберрационной функции передачи модуляции при произвольной апертуре оптической системы.

Известно, что оптические системы передают изображение предметов с искажениями, которые называют аберрациями (А). Вследствие этого лучи, выходящие из данной точки объекта, не будут сходиться в одной точке, а создадут кружок, называемый кружком рассеяния. Необходимо учитывать, что все А минимальны в области, близкой к оптической оси, с удалением от нее А возрастают. На формирование кружка рассеяния одновременно воздействует дифракция на входном отверстии оптической системы. Так как размеры отверстий оптических систем всегда ограниченны, то из-за дифракции, изображение точки получаем в виде дифракционного пятна рассеяния, даже если отсутствуют аберрации.

Пусть в параллельных световых лучах расположена апертура в плоскости зрачка данной системы, фокусирующей лучи в плоскости изображения (**x, y**) на фокусном расстоянии **f′** от апертуры (рис. 1). На данной апертуре происходит дифракция Фраунгофера, так, что свет попадает не только в фокус **F'**, но и в некоторые точки **M′(x)** вблизи фокуса. Амплитуда в точке **M´(x)** пропорциональна **P(u)du** от каждого элемента **du**. **P(u)** представляет собой функцию зрачка [4]:

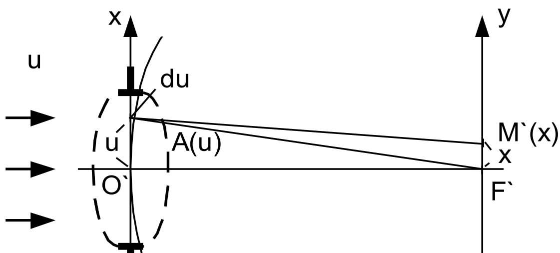

Рис. 1. Дифракция световой волны на апертуре оптической системы

$$\mathbf{P(u)}=\sqrt{\tau(\mathbf{u})}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\mathbf{W(u)}}, \qquad (1)$$

где модуль $\sqrt{\tau(\mathbf{u})}$ (т.е. коэффициент пропускания отверстия) определяет уменьшение амплитуды световой волны, а аргумент определяет сдвиг фазы волны, обусловленный волновой аберрацией **W(u)**. Фаза в **M´(x)** по сравнению с фазой в центре **F`** дифракционной картины определяется разностью хода **Δ** от каждой точки **A(u)** на сфере сравнения к точке **F`** и **M´(x)**, т.е. **Δ = AF` – AM`**.

Как видно из рисунка эта разность хода определяется как

$$\Delta = AF`\text{-}\ AM` = \sqrt{f`^2 + u^2} - \sqrt{f`^2 + (u-x)^2} = f`\sqrt{1+\frac{u^2}{f`^2}} - f`\sqrt{1+\frac{(u-x)^2}{f`^2}}\ .$$

Если ограничиться случаем не очень больших апертур оптической системы и малой областью в плоскости изображений, то можно считать $u^2 << f`^2$, а $x^2 << f`^2$. Тогда справедливо

$$\sqrt{1+a} \approx 1 + \frac{a}{2} \text{ при } a << 1.$$

Применяя данную формулу, получим

$$\Delta \approx f`\left(1+\frac{u^2}{2f`^2}\right) - f`\left(1+\frac{(u-x)^2}{2f`^2}\right) = \frac{ux}{f`} - \frac{x^2}{2f`}\ .$$

Фазу в точке **M´(x)** можно записать как

$$e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\Delta} = e^{i(2\pi)\frac{ux}{\lambda f`}} \cdot e^{-i\pi\frac{x^2}{\lambda f`}}\ . \qquad (2)$$

Вклад каждого элемента сферы в сравнении к комплексной амплитуде в точке **M´(x)** будет пропорционален величине

$$P(u)\, e^{i(2\pi)\frac{ux}{\lambda f`}} \cdot e^{-i\pi\frac{x^2}{\lambda f`}}\, du.$$

Пусть $\lambda f` = 1$ для облегчения вычислений. Тогда просуммировав вклады всех элементов опорной сферы, получим, что комплексная амплитуда в точке изображения может быть выражена с точностью до постоянного множителя следующим интегралом:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(u) e^{i2\pi ux} du\ . \qquad (3)$$

Данная формула представляет собой преобразование Фурье от зрачковой функции.

Дифракционная картина принципиально не изменится, если оптическую ось системы заменить линией, соединяющей точки **M** и **M′**, т.е. можно считать, что ось совпадает с **O′M′** и **M′** – начало координаты **x**.

В данном случае распределение световой волны **F(x)** представляет собой амплитудную функцию рассеяния точки **M** объекта. Амплитудная функция рассеяния связана с функцией рассеяния точки **A(x)**, выражающей распределение интенсивности, соотношением:

$$A(x) = F(x)\ F^*(x). \qquad (4)$$

Известно [1, 4], что интенсивность, протекающая в единицу времени через единицу площади, пропорциональна квадрату амплитуды световой волны, а произведение величины **F(x)** на её комплексное значение **F*(x)** представляет собой квадрат модуля данной величины.

Так как прямое ПФ от функции рассеяния точки **A(x)** есть оптическая передаточная функция (ОПФ), запишем [1, 3 – 5]:

$$\mathbf{T_0(\nu) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(x) e^{-i2\pi u_0 x} dx} \ , \tag{5}$$

где в правой части уравнения вместо пространственной частоты $\boldsymbol{\nu}$ запишем пропорциональную ей величину $\mathbf{u_0}$, то ОПФ оптической системы можно представить как

$$\mathbf{T_0(\nu) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x) F^*(x) e^{-i2\pi u_0 x} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x) \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} P^*(u) e^{-i2\pi ux} du \right] e^{-i2\pi u_0 x} dx} . \tag{6}$$

Интеграл в квадратных скобках выражения (6) равняется **F*(x)**, так как

$$\mathbf{\int\limits_{-\infty}^{\infty} P^*(u)\, e^{i2\pi ux}\, du = F^*(-x)} . \tag{7}$$

Учитывая (7) получим, что ОПФ оптической системы представляет собой

$$\mathbf{T_0(\nu) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P^*(u)\, P(u + u_0)\, du} . \tag{8}$$

Данное выражение называют автокорреляционной функцией (АКФ). Для определения физического смысла сдвига $\mathbf{u_0}$ необходимо отказаться от условия $\boldsymbol{\lambda} \mathbf{f\,` = 1}$. Тогда фазовый член, входящий в (3) при произвольных $\boldsymbol{\lambda}$ и $\mathbf{f\,`}$, будет выглядеть: $\mathbf{2\pi ux/(\lambda f\,`)}$.

Так как интеграл (8) является функцией $\mathbf{u_0}$, то значению пространственной частоты $\boldsymbol{\nu}$ соответствует

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\mathbf{u_0}}{\boldsymbol{\lambda} \mathbf{f\,`}} \ , \text{ т.е. } \ \mathbf{u_0} = \boldsymbol{\lambda} \mathbf{f\,'} \boldsymbol{\nu} \ .$$

Таким образом, ОПФ оптической системы можно определить, если известно световое поле на сфере на выходе из системы, созданное объектом.

Известно [1, 3 – 5], что модуль ОПФ представляет собой функцию передачи модуляции (ФПМ):

$$\mathbf{\left| T_0(\nu) \right| = T(\nu), \quad T(\nu) = \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} P^*(u) P(u + u_0) du \right| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P(u) P(u + u_0) du} .$$

Для более точного определения безаберрационной ФПМ, рассмотрим функции $\mathbf{y_1(x)}$ и $\mathbf{y_2(x) = y_1(x - \tau)}$, которые характеризуют половину единичной апертуры, смещенной на величину $\boldsymbol{\tau}$ (рис. 2). Для нахождения АКФ необходимо найти площадь заштрихованной области ABC, которая ограничена кривыми $\mathbf{\Delta y1}$ и $\mathbf{\Delta y2}$. Площадь данной области найдем как сумму площадей AB под кривой $\mathbf{\Delta y2}$ и BC – $\mathbf{\Delta y1}$:

$$\Delta y1 + \Delta y2 =$$

$$= \int_{\tau}^{0} \left(\mathrm{signum}\left[\left(y1(x) - y2(x)\right) + 1\right] y2(x) + \mathrm{signum}\left[\left(y2(x) - y1(x)\right) + 1\right] y1(x)\right) dx . \quad (9)$$

Так как для нулевой пространственной частоты значение ФПМ равно единице, то АКФ (8) необходимо нормировать с помощью деления на ее наибольшее значение $\int_{-\infty}^{\infty} [P(u)]^2 du$. Таким образом, соотношение для определения дифракционной ФПМ примет вид:

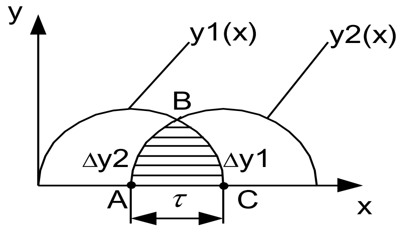

Рис. 2. Определение площади ABC

$$T(\upsilon) = \frac{1}{\int_0^1 \left(y1(x)\right)^2 dx} \int_{\tau}^{0} (\mathrm{signum}\ \left[\left(y1(x) - y2(x) \right) + 1\right] y2(x) +$$

$$+ \mathrm{signum}\ \left[\left(y2(x) - y1(x) \right) + 1\right]\ y1(x))\, dx . \quad (10)$$

Для единичной апертуры в форме круга алгоритм расчета дифракционной ФПМ имеет следующий вид.

1. Зададим функцию единичной апертуры: $\mathbf{y(x) = \left[b^2 - x^2\right]^{1/2}}$, где $\mathbf{b}$ – радиус апертуры;

2. Для исключения неопределенности и результата в комплексной форме $\mathbf{y(x)}$ необходимо ограничить по оси $\mathbf{x}$, предлагается ограничивать с помощью функции $\mathbf{z(x)}$ (рис. 3), таким образом $\mathbf{y(x)}$ принимает значения, отличные от нуля в диапазоне от 0 до 1:

$$z(x) = \frac{1}{2}\left[\ \mathrm{signum}(x) - \mathrm{signum}\,(x - n)\ \right], \quad y1(x) = y(x)\ z(x),$$

где $\mathbf{n}$ – числовой коэффициент;

3. Подставляя в выражение 10, функцию $\mathbf{y1(x)}$, получаем дифракционную ФПМ единичной апертуры в форме круга (рис. 4).

Из литературы [1, 4 ,5] известно, что уравнение ФПМ дифракционного качества для апертуры в форме круга имеет вид

$$\mathbf{T_d(\nu) = \frac{2}{\pi}\left(\arccos\nu - \nu\sqrt{1-\nu^2}\right)}. \qquad (11)$$

Сравнивая представленные на рис. 4 кривые, приходим к выводу об их идентичности. Значит представленный алгоритм работает верно.

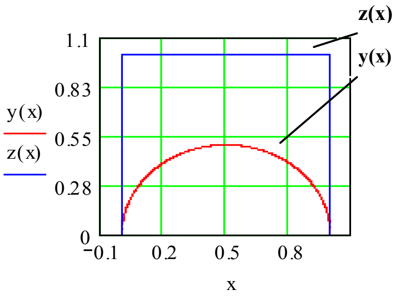

Рис. 3. Апертура входного отверстия (представлена половина апертуры)

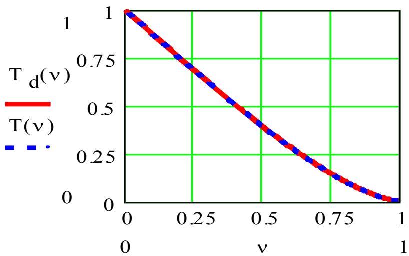

Рис. 4. Дифракционные ФПМ единичной апертуры в форме круга

Представленный алгоритм позволяет рассчитывать дифракционную ФПМ (определяющую ФПМ объектива оптической системы) любой апертуры, при этом учитываются дифракционные явления, возникающие в случае применения дополнительных оптических деталей (светофильтров).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ребрин Ю.К. Оптико-электронное разведывательное оборудование летательных аппаратов. – К.: КВВАИУ, 1988. – 448 с.*
2. *Применение методов Фурье-оптики / Под ред. Г. Старка. Пер. с англ. под ред. И.Н. Компанца. – М.: Радио и связь, 1988. – 536 с.*
3. *Алексеев В.И., Бондарский И.А. Разведывательное и светотехническое оборудование летательных аппаратов. – М.: ВВИА им. Жуковского, 1971. – 595 с.*
4. *Шульман М.Я. Измерение передаточных функций оптических систем. – Л.: Машиностроение, 1980. – 206 с.*
5. *Кононов В.И., Федоровский А.Д., Дубинский Г.П. Оптические системы построения изображения. – К.: Техніка, 1981. – 133 с.*

Поступила 13.08.2002

ЧЁРНЫЙ Сергей Вячеславович, *канд. техн. наук, доцент, нач. кафедры Харьковского института Военно-Воздушных Сил. Окончил Киевское ВВАИУ в 1977 году. Области научных интересов – оптика, оптико-электронные системы, теория дифракции.*

ЖЕВТЮК Александр Анатольевич*, адъюнкт Харьковского института ВВС. Окончил Киевский институт ВВС в 1998 году. Области научных интересов – оптико-электронные системы, оптика, теория дифракции.*