УДК 681.3

АЛГЕБРА ДИАГНОСТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ

д.т.н., проф. В.Я. Жихарев, А.В. Чечуй, В.Н. Торчило

Предлагается алгебра диагностических алгоритмов, предназначенная для разработки алгоритмов диагностирования объектов контроля, а также ее основные положения с привидением примеров.

Поиск и обнаружение неисправностей осуществляется с помощью элементарных проверок, под которыми понимается минимальный, не подлежащий расчленению в данных конкретных условиях эксперимент над объектом диагностирования.

В общем случае, алгоритм диагностирования задает совокупность элементарных проверок, последовательность их реализации и правила обработки результата с целью получения диагноза. Для безусловных алгоритмов диагностирования существенным является множество элементарных проверок, входящих в алгоритм, а диагноз осуществляется по результатам их выполнения [1].

Для анализа и разработки безусловных диагностических алгоритмов была разработана алгебра диагностических алгоритмов (АДА). Рассмотрим ее основные положения.

Пусть k – количество состояний объекта, n – количество проверок, $A = (a_1, \ldots, a_k)$ – множество состояний объекта, $P = (P_1,\ldots, P_n)$ – множество элементарных проверок.

Проверка, принимающая значение «0» обозначается P^0 с нижним индексом, соответствующим ее номеру, а принимающая значение «1» – P^1. Если значение проверки не является существенным, то она обозначается P^*, т.е. $P^* \in \{P^0, P^1\}$. Если значение проверки фиксировано (например, α) , то она обозначается P^α.

Термом называется произведение элементарных проверок. Термы будем обозначать буквами T. Примеры термов: $T_1 = P_1^0P_4^1P_5^1$; $T_2 = P_i^\alpha P_j^\beta$.

Рангом терма T называется количество элементарных проверок, входящих в конъюнкцию, ему соответствующую, и обозначается $/T/$. Например, ранг терма $T = P_2^*P_3^0P_5^1$, $/T/ = 3$. Терм, имеющий ранг 0, называется нуль-термом и обозначается T_0. Для проверок, входящих в состав терма, при исследовании безусловных алгоритмов диагностирования, выполняются свойства коммутативности и ассоциативности.

На множестве проверок введены следующие операции.

1. Произведение термов. Пусть $T1$ и $T2$ – термы, терм $T3$ называется произведением термов (обозначается $T3 = T1*T2$) , если он образован произведением конъюнкций проверок каждого из термов. Полученный терм преобразуется с помощью следующих правил:

$$P_i^{\alpha} P_i^{\alpha} = P_i^{\alpha};\ P_i^{0} P_i^{1} = T_0;\ T_0 * T = T_0.$$

Пример 1. Пусть $T_1 = P_1 * P_3^0 P_4^1$; $T_2 = P_3^0 P_4^1 P_5 * P_7^1 P_9^1$;
$T_3 = P_3^1 P_4^1 P_6 * P_8^1$. Найти $T_4 = T_1 * T_2$; $T_5 = T_1 * T_3$.

$$T_4 = T_1 * T_2 = P_1 * P_3^0 P_4^1 P_3^0 P_4^1 P_5 * P_7^1 P_9^1 = P_1 * P_3^0 P_4^1 P_5 * P_7^1 P_9^1;$$
$$T_5 = T_1 * T_3 = P_1 * P_3^0 P_4^1 P_3^1 P_4^1 P_6 * P_8^1 = P_1 * (P_3^0 P_3^1)(P_4^1 P_4^1) P_6 * P_8^1 = T_0.$$

2. Пересечение термов. Пусть T_1 и T_2 – термы. Множества проверок, входящих в них, соответственно E_1 и E_2. Пересечением термов T_1 и T_2 называется терм $T_3 = T_1 \cap T_2$, соответствующий конъюнкции проверок, входящих в множество $E_1 \cap E_2$, если для любой проверки

$$P_i \in (E_1 \cap E_2),\quad P_i^a * T_1 \neq T_0 \quad \text{и} \quad P_i^a * T_2 \neq T_0.$$

Пример 2. Пусть $T_1 = P_1^1 P_2^0 P_4^1 P_5^1$; $T_2 = P_1^1 P_4^1 P_5^* P_7^0$.
$T_3 = T_1 \cap T_2 = P_1^1 P_2^0 P_4^1 P_5^1$; $T_2 \cap P_1^1 P_4^1 P_5^* P_7^0 = P_1^1 P_4^1$.

3. Исключение проверки P_i из терма T (обозначается $P_i \leftarrow T$). В результате получаем терм T_2, определяемый следующим образом:
пусть $T = p_1^a \ldots p^c{}_{(i-1)}\, p_i^* p^d{}_{(i+1)} \ldots p_h^e$; тогда $T_2 = P_i \leftarrow T = p_1^a \ldots p^c{}_{(i-1)}\, p^d{}_{(i+1)} \ldots p_h^e$;
Свойства: $(P_i \leftarrow T)*(P_j \leftarrow T) = (P_i * P_j \leftarrow T)$; $(P_i \leftarrow T_1) \vee (P_i \leftarrow T_2) = P_i \leftarrow (T_1 \vee T_2)$.

Пример 3. Пусть $T_1 = P_1^* P_3^* P_5^1 P_6^0 P_7^1$, $T_2 = P_3^0 P_4^1 P_6^* P_8^1$
$P_3 * P_6 \leftarrow (T_1 \vee T_2), = P_1^* P_5^1 P_7^1 \vee P_4^1 P_8^1$.

4. Расстоянием между термами $T_1 = P_1^{r1} \ldots P_h^{rh}$, и $T_2 = P_1^{b1} \ldots P_h^{bh}$, содержащими одинаковые множества входящих в них элементарных проверок, называется значение $\rho(T1, T2)$, определяемое следующим образом:

$$\rho(T1, T2) = (r1 \oplus b1) + (r2 \oplus b2) + \ldots + (rh \oplus bh),$$

где $\oplus$ – операция «неравнозначность».

Пример 4. Пусть $T_1 = P_1^0 P_2^0 P_3^1 P_4^0 P_5^1$, $T_2 = P_1^1 P_2^0 P_3^0 P_4^1 P_5^0$.

$$\rho(T1, T2) = (r1 \oplus b1) + (r2 \oplus b2) + (r3 \oplus b3) + (r4 \oplus b4) + (r5 \oplus b5) =$$
$$= (0 \oplus 1) + (0 \oplus 0) + (1 \oplus 0) + (0 \oplus 1) + (1 \oplus 0) = 4.$$

Безусловные диагностические алгоритмы (ДА) на заданном множестве состояний A и множестве проверок $E = (P_1, P_2, \ldots, P_w)$ будем обозначать $C(E)$ или $C(P_1, P_2, \ldots, P_w)$. Проверка P_i, входящая в диагностический алгоритм E ($P_i \in E$) производит разбиение множества состояний A на два подмножества B_1 и B_2, соответственно необнаруживаемых и обнаруживаемых ею состояний, причем

$$B_1 \cap B_2 = \varnothing,\ B_1 \cup B_2 = A.$$

Указанное разбиение, записанное как

$$C(P_i) = P^0{}_i B_1 \vee P^1{}_i B_2$$

назовем дизъюнктивной формой диагностического алгоритма (ДНФ ДА).

Мощность подмножеств, получаемых в результате разбиения множества состояний, будем обозначать Z с индексом, соответствующим рассматриваемому множеству. Пустое подмножество будем обозначать N.

В общем случае, ДНФ ДА $C(P_1, P_2, \ldots, P_w)$ имеет вид

$$C(P_1, P_2, \ldots, P_w) = T_1B_1 \vee T_2B_2 \vee \ldots \vee T_hB_h,$$

где $T_i = P_1^{r1}P_2^{r2}\ldots.P_w^{rw}$ – термы, $i = 1, \ldots, h$; $B_i \cap B_j = N$; $i, j = 1, \ldots, h$; $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_h = A$; $Z_1 + Z_2 + \ldots Z_h = k$.

ДНФ ДА обладают следующими свойствами:

$$T_0 * B = N;\ T_iB_i = B_iT_i;\ T_iN = N;\ T_iB_i \vee N = T_iB_i;$$

$$P_1^{r1}P_2^{r2}\ldots P_{i-1}^{ri-1}P_i^0P_{i+1}^{ri+1}\ldots P_h^{rh}B \vee P_1^{r1}P_2^{r2}\ldots P_{i-1}^{ri-1}P_i^1P_{i+1}^{ri+1}\ldots P_h^{rh}B = \\ = P_1^{r1}P_2^{r2}\ldots P_{i-1}^{ri-1}P_{i+1}^{ri+1}\ldots P_h^{rh}B.$$

Диагностические модели, заданные, например, в виде матрицы неисправностей, являются ДА и им соответствует ДНФ ДА, которые записываются следующим образом. Пусть ДМ задана в виде матрицы неисправностей:

$P\backslash A$	a_1	a_2	...	a_k
$P1$	$b11$	$b12$	...	$b1k$
$P2$	$b21$	$b22$	...	$b2k$
...	...	...	...	...
Pn	$bn1$	$bn2$	...	bnk

Тогда $C(P_1, P_2, \ldots, P_n) = T_1a_1 \vee T_2a_2 \vee \ldots \vee T_ka_k$,

$T_j = P_1^{bj1}P_2^{bj2}\ldots P_n^{bnj}$, $j = 1, \ldots, k$.

Пример 5. Записать СДНФ ДА для матрицы неисправности:

$P\backslash A$	$a0$	$a1$	$a2$	$a3$	$A4$	$a5$	$a6$	$a7$	$a8$
$P1$	0	0	0	0	0	1	1	1	0
$P2$	0	0	1	1	0	0	1	0	1
$P3$	0	1	0	0	1	0	0	1	1
$P4$	0	1	0	1	0	1	0	0	1
$P5$	0	0	1	0	1	0	1	1	1
$P6$	0	1	1	1	0	0	0	1	0

$$C(P_1, \ldots, P_6) = a_0P_1^0P_2^0P_3^0P_4^0P_5^0P_6^0 \vee a_1P_1^0P_2^0P_3^1P_4^1P_5^0P_6^1 \vee \\ \vee a_2P_1^0P_2^1P_3^0P_4^0P_5^1P_6^1 \vee a_3P_1^0P_2^1P_3^0P_4^1P_5^0P_6^1 \vee \\ \vee a_4P_1^0P_2^0P_3^1P_4^0P_5^1P_6^0 \vee a_5P_1^1P_2^0P_3^0P_4^1P_5^0P_6^0 \vee \\ \vee a_6P_1^1P_2^1P_3^0P_4^0P_5^1P_6^0 \vee a_7P_1^1P_2^0P_3^1P_4^0P_5^1P_6^1 \vee a_8P_1^0P_2^1P_3^1P_4^1P_5^1P_6^0.$$

С помощью приведенных выше свойств ДНФ ДА может быть преобразована в ДНФ ДА, в которой присутствуют все возможные термы для заданного множества проверок.

Пример 6. Преобразовать ДНФ ДА

$$C(P1,P2,P3) = P_1^0P_2^1P_3^1B1 \vee P_1^1P_2^0P_3^1B2 \vee P_1^0P_2^1P_3^0B3$$

в ДНФ ДА с полным множеством термов.

$$C(P1, P2, P3) = P_1^0P_2^1P_3^1B1 \ \text{v}\ P_1^1P_2^0P_3^1B2 \ \text{v}\ P_1^0P_2^1P_3^0B3 =$$
$$= P_1^0P_2^1P_3^1B1 \ \text{v}\ P_1^1P_2^0P_3^1B2 \ \text{v}\ P_1^0P_2^1P_3^0B3 \ \text{v}\ P_1^1P_2^1P_3^1N \ \text{v}$$
$$\text{v}\ P_1^0P_2^0P_3^0N \ \text{v}\ P_1^0P_2^0P_3^1N \ \text{v}\ P_1^1P_2^0P_3^0N \ \text{v}\ P_1^1P_2^1P_3^0N.$$

Преобразуем ДНФ ДА с полным множеством термов таким образом, чтобы двоичные слова, образованные значениями проверок для каждого терма, были лексикографически упорядоченными.

Для примера 6 ДНФ ДА, упорядоченная описанным выше способом, имеет вид:

$$C(P1, P2, P3) = P_1^0P_2^0P_3^0N \ \text{v}\ P_1^0P_2^0P_3^1N \ \text{v}\ P_1^0P_2^1P_3^0B3 \ \text{v}$$
$$\text{v}\ P_1^0P_2^1P_3^1B1 \ \text{v}\ P_1^1P_2^0P_3^0N \ \text{v}\ P_1^1P_2^0P_3^1B2 \ \text{v}\ P_1^1P_2^1P_3^0N \ \text{v}\ P_1^1P_2^1P_3^1N.$$

Для приведенного выше представления ДНФ ДА каждому терму соответствует определенное фиксированное положение в ДНФ ДА и различные ДНФ ДА для заданного множества проверок будут отличаться только соответствующими подмножествами разбиений. Поэтому для описания ДА можно не указывать вид термов, а только указать соответствующие подмножества. Такое представление будем называть канонической формой ДА (КФ ДА).

Для примера 5 КФ ДА имеет вид

$$C(P_1, \ldots, P_6) = (a_0, N, N, N, N, N, N, N, N, N, N, a_4, N, N, a_1, N, N, N, N, N, a_2, N, a_3, N, N, N, N, N, N, N, N, a_8, N, N, N, N, N, a_5, N, N, N, N, N, N, a_7, N, N, N, N, N, N, a_6, N, N, N, N, N, N, N, N, N, N, N, N, N),$$

а для примера 6 :

$$C(P1, P2, P3) = (N, N, B3, B1, N, B2, N, N).$$

Пример 7. Построить все возможные варианты построения ДА и соответствующие им КФ ДА для ДМ, заданной в виде следующей матрицы неисправностей:

P\A	*a0*	*a1*	*a2*	*a3*	*a4*	*a5*	*a6*
P1	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*
P2	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*
P3	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*
P4	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*
P5	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*

Результаты приведены в табл. 1.

Рассмотрим операции на множестве ДА.

Произведением двух ДА

$$C_1(E_1) = T_{11}B_1 \ \text{v}\ \ldots\ \text{v}\ T_{1h1}B_{h1} \text{ и } C_2(E_2) = T_{21}D_1 \ \text{v}\ \ldots\ \text{v}\ T_{2h2}D_{h2},$$

определенных на множестве состояний A, называется ДА

$$C_3(E_3) = C_1(E_1) * C_2(E_2) = T_{31}U_1 \ \text{v}\ \ldots\ T_{3h3}U_{h3},$$

определяемый следующим образом:

$$h3 = h1 * h2;\ E_3 = E_1 \cup E_2;\ T_{31} = T_{11} * T_{21},\ T_{21} = T_{11} * T_{22}\ldots;$$
$$U_1 = B_1 \cap D_1;\ U_2 = B_1 \cap D_2,\ \ldots .$$

Таблица 1

Канонические формы для вариантов построения ДА

E	Каноническая форма ДА
P_1	($a0$, $a1$, $a4$, $a6$), ($a2$, $a3$, $a5$)
P_2	($a0$, $a2$, $a3$, $a4$), ($a1$, $a5$, $a6$)
P_3	($a0$, $a3$, $a4$), ($a1$, $a2$, $a5$, $a6$)
P_4	($a0$, $a1$, $a3$, $a5$), ($a2$, $a4$, $a6$)
P_5	($a0$, $a2$, $a4$, $a6$), ($a1$, $a3$, $a5$)
$P_1\ P_2$	($a0$, $a4$), ($a1$, $a6$), ($a2$, $a3$), ($a5$)
$P_1\ P_3$	($a0$, $a4$), ($a1$, $a6$), ($a3$), ($a2$, $a5$)
$P_1\ P_4$	($a0$, $a1$), ($a4$, $a6$), ($a3$, $a5$), ($a2$)
$P_1\ P_5$	($a0$, $a4$, $a6$), ($a1$), ($a2$), ($a3$, $a5$)
$P_2\ P_3$	($a0$, $a3$, $a4$), ($a2$), N, ($a1$, $a5$, $a6$)
$P_2\ P_4$	($a0$, $a3$), ($a2$, $a4$), ($a1$, $a5$), ($a6$)
$P_2\ P_5$	($a0$, $a2$, $a4$), ($a3$), ($a6$), ($a1$, $a5$)
$P_3\ P_4$	($a0$, $a3$), ($a4$), ($a1$, $a5$), ($a2$, $a6$)
$P_3\ P_5$	($a0$, $a4$), ($a3$), ($a2$, $a6$), ($a1$, $a5$)
$P_4\ P_5$	($a0$), ($a1$, $a3$, $a5$), ($a2$, $a4$, $a6$), N
$P_1\ P_2\ P_3$	($a0$, $a4$), N, N, ($a1$, $a6$), ($a3$), ($a2$), N, ($a5$)
$P_1\ P_2\ P_4$	($a0$), ($a4$), ($a1$), ($a6$), ($a3$), ($a2$), ($a5$), N
$P_1\ P_2\ P_5$	($a0$, $a4$), N, ($a6$), ($a1$), ($a2$), ($a3$), N, ($a5$)
$P_1\ P_3\ P_4$	($a0$), ($a4$), ($a1$), ($a6$), ($a3$), N, ($a5$), ($a2$)
$P_1\ P_3\ P_5$	($a0$, $a4$), N, ($a6$), ($a1$), N, ($a3$), ($a2$), ($a5$)
$P_1\ P_4\ P_5$	($a0$), ($a1$), ($a4$, $a6$), N, N, ($a3$, $a5$), ($a2$), N
$P_2\ P_3\ P_4$	($a0$, $a3$), ($a4$), N, ($a2$), N, N, ($a1$, $a5$), ($a6$)
$P_2\ P_3\ P_5$	($a0$, $a4$), ($a3$), ($a2$), N, N, N, ($a6$), ($a1$, $a5$)
$P_2\ P_4\ P_5$	($a0$), ($a3$), ($a2$, $a4$), N, N, ($a1$, $a5$), ($a6$), N
$P_3\ P_4\ P_5$	($a0$), ($a3$), ($a4$), N, N, ($a1$, $a5$), ($a2$, $a6$), N
$P_1\ P_2\ P_3\ P_4$	($a0$), ($a4$), N, N, N, N, ($a1$), ($a6$), ($a3$), N, N, ($a2$), N, N, ($a5$), N
$P_1\ P_2\ P_3\ P_5$	($a0$, $a4$), N, N, N, N, N, ($a6$), ($a1$), N, ($a3$), ($a2$), N, N, N, N, ($a5$)
$P_1\ P_2\ P_4\ P_5$	($a0$), N, ($a4$), N, N, ($a1$), ($a6$), N, N, ($a3$), ($a2$), N, N, ($a5$), N, N
$P_1 P_2\ P_3\ P_4\ P_5$	($a0$), N, ($a4$), N, N, N, N, N, N, N, N, N, N, ($a1$), ($a6$), N, N, ($a3$), N, N, N, N, ($a2$), N, N, N, N, N, N, ($a5$), N, N

Пример 8. Пусть $C_1(P_1) = (B_1, B_2)$, $C_2(P_2) = (B_3, B_4)$, определить $C(P_1,P_2)= C_1(P_1) * C_2(P_2)$.

$$C_3(P_1P_2) = C_1(P1) * C_2(P2) =$$

$$= P_1^0P_2^0(B_1 \cap B_3) \vee P_1^0P_2^1(B_1 \cap B_4) \vee P_1^1P_2^0(B_2 \cap B_3) \vee P_1^1P_2^1(B_2 \cap B_4).$$

КФ ДА $C_3(P_1,P_2)$ имеет вид $((B_1 \cap B_3), (B_1 \cap B_4), (B_2 \cap B_3), (B_2 \cap B_4))$.

В результате операции исключения проверки P_i из ДА $C(E) = T_1B_1 \vee \vee T_2B_2 \vee \ldots \vee T_hB_h$, образуется ДА $C_2(P_i \leftarrow E)$, определяемый следующим образом:

$$C_2(P_i \leftarrow E) = (P_i \leftarrow T_1)B_1 \vee (P_i \leftarrow T_2)B_2 \vee \ldots \vee (P_i \leftarrow T_h)Bh.$$

В общем случае, в результате выполнения этой операции в полученную ДНФ ДА могут войти одинаковые термы, при этом множество состояний которое они идентифицируют представляет собой объединение множеств состояний, идентифицируемых каждым из термов, т.е.

$$TrBr \vee TjBj = T(Br \cup Bj).$$

При $(Pi \leftarrow Tr) = (Pi \leftarrow Tj) = T$.

Пример 9. Пусть $E = (P1,\ldots,P5)$ и ДА представлен в в КФ ДА

$$C(E) = ((a0), N, (a4), N, N, N, N, N, N, N, N, N, N, (a1), (a6), N, N, (a3), N, N, N, N, (a2), N, N, N, N, N, N, (a5), N, N).$$

Определить $C(P4,P5 \leftarrow E)$.

$$C(P4,P5 \leftarrow E) = ((a0)\ , (a1, a3, a5)\ , (a2, a4, a6)\ , N).$$

Предложенная АДА является многоосновной алгеброй, так как это система, состоящая из некоторого семейства множеств M и набора конечноместных операций. Для каждой n-местной операции $F(x1,\ldots, xn)$ из этого семейства любой аргумент xi $(i = 1, .., n)$, а также результат операции определены на некотором одном (своем для каждого аргумента и каждой функции) множестве из M.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жихарев В.Я., Илюшко В.М., Чумаченко И.В. Математические основы проектирования рекурсивных автоматов с программируемой логикой: Монография. – Х.: Факт, 1999. – 144 с.*

Поступила 04.10.2002

ЖИХАРЕВ Владимир Яковлевич*, доктор техн. наук, профессор, профессор кафедры Национального аэрокосмического университета "ХАИ", который окончил в 1967 году. Область научных интересов – информационные технологии.*

ЧЕЧУЙ Александр Викторович*, адъюнкт Харьковского института ВВС, который окончил в 1995 году. Область научных интересов – информационные технологии.*

ТОРЧИЛО Владимир Никитович*, соискатель Национального аэрокосмического университета "ХАИ". Область научных интересов – информационные технологии.*