УДК 681.5.015

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ МНОЖЕСТВ И ИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПОСРЕДСТВОМ АНАЛОГИЙ

к.т.н. А.Л. Ерохин, В.Н. Бурцев
(представил д.т.н. Н.М. Зацеркляный)

Рассматриваются различные подходы для построения моделей дискретных топологических пространств. Обосновано применение трех видов аналогий представления дискретных множеств первого и второго классов и их отображений. Предложенные модели могут использоваться для разработки алгоритмов генерирования детерминированных хаотических процессов, которые используются для системного анализа сложноорганизованных эргастических систем.

При функционировании сложноорганизованых эргастических систем (СОЭС) возникает вопрос возврата в устойчивый фокус при возникновении аварийной ситуации. Например, в [1] моделируются детерминированные хаотические процессы (ДХП) в сложных системах энергетики методом комбинаторных преобразований, образующих группу подстановок. При моделировании ДХП посредством комбинаторно-топологических преобразований (КТП) [2] использованы представления двух классов дискретных множеств.

Первый из них – это представление компактных дискретных множеств, заданных в двумерном метрическом пространстве, отображаемых на себя. В этом классе исходное дискретное множество будем определять как вход некоторой СОЭС, а любое его отображение на себя – как множество выхода.

В качестве основного отображения рассматриваемого класса дискретных множеств выберем множество комбинаторных подстановок элементов с сохранением условия взаимно-обратных отношений между элементами a_i входа и b_j выхода

$$\left(a_i\right) \leftrightarrow \left(b_j\right). \tag{1}$$

При фиксации элементов входа и их отображений на выходе структуры связей-отношений (1) между элементами множеств являются инвариантными.

Второй класс – это множества, полученные при отображении исходной двумерной информации на входах и выходах дискретных множеств первого класса. Если в качестве отображаемой исходной информации рассматривать изображения, то они, будучи заданными, в континуальном пространстве, являются бесструктурными. Тогда при отображении изображения на вход дискретного множества первого класса, структура входа индуцирует на бесструктурном изображении дискретную структуру с эквивалентными мощностью и метрикой.

В содержательном аспекте модели отображения дискретных множеств первого класса на себя являются инструментом преобразования любой двумерной, регулярной информации. Параметры отображений информации на выходе множества первого класса определяются числом комбинаторных перестановок и вероятностью распределения его элементов после отображения множества входа на себя.

При отображении информации $F(x, y)$ на входе формируется образ информации в виде компактного объединения дискретных элементов с индуцированной структурой “входа”

$$F'(a_i) \in \bigcup_{i \in M^2} f'(a_i), \tag{2}$$

где (a_i) – элемент входа множества первого класса, на котором отображается фрагмент $f'(a_i)$ информации.

После отображения на множестве выхода образ (2) формирует прообраз в виде компактного объединения дискретных фрагментов $f^*(b_j)$:

$$F^*(b_j) \in \bigcup_{j \in M^2} f^*(b_j), \tag{3}$$

где (b_j) – элемент выхода множества первого класса, на котором отображается фрагмент прообраза $f^*(b_j)$.

Отображенная информация, в силу фиксированности элементов множеств, не изменяет систему связей, поэтому фрагменты образов-прообразов информации также становятся связанными между собой системой взаимно-обратных отношений $f'(a_i) \leftrightarrow f^*(b_k)$, структурно эквивалентных системе $(a_i) \leftrightarrow (b_j)$. Система связей-отношений образует топологическую структуру комбинаторных подстановок.

Анализ моделей дискретных множеств первого класса показывает, что они являются всегда эквивалентными друг другу, независимо от числа преобразований подстановок по критерию инвариантности структуры. Эквивалентность определяется тем, что мощность множества, метрика элементов, система связей между элементами, а также их компактность, не нарушаются при отображениях самих на себя.

Рассмотрим поведение множеств второго класса при их отображениях на дискретных множествах первого класса. Наличие в дискретном множестве, по крайней мере, одной комбинаторной подстановки, разрушает регулярность исходной информации. Количество разрывов регулярности задается счетным множеством комбинаторных подстановок элементов на множестве первого класса [2].

Проанализируем характер связей топологических инвариантов упорядоченности множеств первого класса и регулярности отображенных множеств второго класса. Упорядоченность является характеристикой любого непустого множества, если может быть задано некоторое правило, устанавливающее порядок элементов [3]. Регулярность для рассматриваемых множеств первого класса определяется замкнутостью его одноточечных элементов.

Для построения визуальных моделей дискретных множеств первого и второго классов воспользуемся тремя аналогиями.

Аналогия 1 – компактное дискретное множество, организовано на двумерной плоскости счетным количеством шаров (мощность множества) одного и того же диаметра (метрика множества), окрашенных в “белый цвет”. Множество является аналогом двумерной регулярной структуры (топологическое пространство класса T_3 [3]) элементов множества.

Аналогия 2 – компактное дискретное множество, организовано тем же количеством белых шаров, которые упорядочены (пронумерованы возрастающим рядом натуральных чисел). Поскольку условие близости элементов множества не нарушено, мощность и метрика остаются такими же, как в *Аналогии 1*, то моделируется двумерное регулярное (по признаку цвета), упорядоченное дискретное множество.

Аналогия 3 – компактное дискретное множество, организовано в виде упорядоченного регулярного множества пронумерованных шаров, половина которых окрашена в белый цвет, а вторая половина – в черный цвет. Аналогия моделирует двумерное, дискретное, упорядоченное и регулярное множество первого класса, на котором отображено упорядоченное, регулярное, дискретное множество второго класса в виде полуплоскости.

Для трех аналогий дискретных множеств произведем преобразования комбинаторных подстановок. Это достигается случайными изменениями положений шаров на плоскости.

Для *Аналогии 1* комбинаторные перестановки шаров не изменяют отношений близости, структура компактно размещенных шаров остается без изменения. Перестановки во множествах не изменяют мощности и метрики множества, остается без изменения и признак цвета шаров. При перестановках не изменилась и регулярность множества, так как из-за отсутствия нумерации шаров не было нарушено условие упорядоченности. В результате таких преобразований получим новое дискретное множество, тождественное исходному. Для *Аналогии 1* отображение комбинаторных подстановок множества является изоморфным.

Для *Аналогии 2* наличие упорядоченности шаров определяется локальной системой координат, в которой задана последовательность натуральных чисел $i=1, 2, \ldots, n$, либо парами чисел (i, j), посредством которых задается декартово произведение. После комбинаторных перестановок шаров их исходная упорядоченность во множестве, заданная в локальной системе координат, оказывается нарушенной.

Поскольку рассматривается множество белых шаров без изменения их цвета, то для преобразованного множества можно ввести новую систему локальных координат, например, произвести новую нумерацию шаров или ввести новую систему декартовых координат (новую упорядоченность).

Для *Аналогии 2* регулярность множества по признаку цвета шара не изменилась. Поскольку мощности этих множеств, их метрика и признак «цвет шаров» не изменились, то исходное и преобразованные множества, благодаря введению новой упорядоченности, являются эквивалентными. Для *Аналогии 2* отображения комбинаторных подстановок также могут рассматриваться изоморфными.

Для *Аналогии 3* преобразования перестановок разноцветных шаров дискретного множества влекут нарушение упорядоченности и нарушают регулярность изображения полуплоскости, так как черные и белые шары, как фрагменты изображения, оказываются случайным образом распределенными по всей двумерной поверхности. Минимально возможной комбинаторной перестановкой шаров является единичный разрыв регулярности изображения полуплоскости, когда один белый и один черный шар меняются местами. Максимально возможным вариантом является вариант случайных перестановок с равномерным распределением черных и белых шаров. Если после перестановки шаров для них ввести новую упорядоченность, то это не изменит их взаимного расположения, так как признак цвета шаров остается заданным в исходной системе координат. Таким образом, регулярность отображенной полуплоскости на дискретном множестве не восстанавливается, а введение новой локальной системы координат восстанавливает упорядоченность элементов множества.

По признаку упорядоченности и мощности исходное и отображенное множества шаров можно считать эквивалентными. Однако, если совокупность белых и черных шаров организует дискретное “изображение” полуплоскости, то между исходным изображением и его образом после преобразований не может быть ни тождественности, ни эквивалентности.

Таким образом, предложенные аналогии позволяют получить визуальные модели топологических инвариантов регулярности и упорядоченности дискретных множеств и их отображений. На основе представленных аналогий можно разработать алгоритмы генерации детерминированных хаотических процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурцев В.М., Єрохін А.Л. Застосування теорії груп підстановок для моделювання детермінованих хаотичних процесів // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2001. – Вип. 6(16). – С. 47 – 51.*
2. *Бурцев Вал. Н., Бурцев Вл. Н., Ерохин А. Л. Исследование стохастических процессов комбинаторно-топологического преобразования информации. Сообщение 1 // Радиоэлектроника и информатика – 2000. – № 4(13). – С. 44 – 48.*
3. *Кэлли Дж. А. Общая топология. – М.: Наука, 1968. – 383 с.*

Поступила 07.10.2002

ЕРОХИН Андрей Леонидович*, канд. техн. наук, доцент кафедры информатики Национального университета внутренних дел (Харьков). В 1988 году окончил ХИРЭ. Область научных интересов – синергетика, детерминированные хаотические процессы в аварийных ситуациях.* e-mail: *eal@adm.univd.kharkov.ua*

***БУРЦЕВ Валерий Николаевич**, аспирант кафедры программного обеспечения Харьковского национального университета радиоэлектроники. В 1974 году окончил ХГУ. Область научных интересов – моделирование нестационарных процессов, психология.*