

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-СВЯЗАННЫХ ЭКОНОМИКО-ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

Н.Э. Хомякова
(представил д.т.н., проф. В.И. Карпенко)

Рассмотрены математические модели двумерных дифференциально-связанных процессов в окрестности экспоненциальных переходных программных траекторий в непрерывном и дискретном времени. Сформулирована задача оптимального корректирующего управления дифференциально-связанными процессами применительно к задаче управления проектами коррекции производства.

Введение. На практике часто встречаются дифференциально-связанные экономико-производственные процессы. К таким процессам, в частности, относятся:

- производительность и объем производства;
- производительность и объем продаж.

Оценка таких процессов представляет большой интерес, особенно в связи с необходимостью управления ими с учетом как возмущающих факторов, так и погрешностей наблюдения.

Задача управления решается, как правило, в два этапа. На первом этапе игнорируются возмущения, действующие на объект управления, а также погрешности наблюдения. При этом определяются программные траектории и управляющие функции. На втором этапе решается задача синтеза корректирующего управления. При этом, как правило, используется квадратичный критерий оптимальности [1].

Ниже рассматривается частная задача разработки моделей двумерных дифференциально-связанных процессов с целью решения задачи синтеза оптимального управления ими и последующей разработки имитационной модели системы управления в целом. В качестве примера рассматриваются вопросы управления производительностью производства и его объемом при использовании экспоненциальных переходных траекторий.

1. Экспоненциальные переходные траектории для дифференциально-связанных процессов. Рассмотрим двумерный процесс:

$$\bar{\lambda}(t) = \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix},$$

$$\frac{dp(t)}{dt} = q(t); \tag{1}$$

где

$$p(t) = p(t_0) + \int_{t_0}^t q(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Пусть $q(t)$ – производительность производства, а $p(t)$ – объем его в момент времени t . Пусть задана требуемая постоянная производительность производства q_{00} . При этом требуемое поведение процесса $p(t)$ определяется выражением

$$p_0(t) = p_{00} + q_{00}(t - t_0). \quad (3)$$

Рассмотрим экспоненциальную стратегию плавного изменения производительности, т.е. процесса $\Delta q_0(t)$ от начального значения

$$\Delta q_0(t_0) = q_0 - q_{00} = \Delta q_0$$

в соответствии с дифференциальным уравнением

$$\frac{d\Delta q_0(t)}{dt} = -\alpha \cdot \Delta q_0(t). \quad (4)$$

Решение уравнения (4) имеет вид

$$\Delta q_0(t) = \Delta q_0 \cdot \exp\{-\alpha(t - t_0)\}. \quad (5)$$

Параметр α характеризует скорость изменения процесса $\Delta q_0(t)$. Его можно выбирать из условия обеспечения заданной длительности T_n переходного процесса, например, из условия

$$0,01\Delta q_0 = \Delta q_0(t_0 + T_n) = \Delta q_0 \cdot e^{-\alpha \cdot T_n}, \quad (6)$$

т.е.

$$e^{\alpha \cdot T_n} = 100; \quad \alpha = \frac{2 \ln 10}{T_n} \approx \frac{4,6}{T_n}. \quad (7)$$

В соответствии с (2) и (5) получим

$$\Delta p_0(t) = \Delta p_0 + \frac{\Delta q_0}{\alpha} \left[1 - e^{-\alpha(t - t_0)} \right], \quad (8)$$

где $\Delta p_0 = \Delta p_0(t_0)$ – начальное значение процесса $\Delta p_0(t)$.

Для реализации планового развития процесса $p_0(t)$ целесообразно обеспечить выполнение условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta p_0(t) = 0. \quad (9)$$

Из выражения (8) следует, что данное условие выполняется, если

$$\Delta p_0 = p_0 - p_{00} = -\frac{\Delta q_0}{\alpha}. \quad (10)$$

Именно при этом условии процесс

$$p_0(t) = p_{00}(t) - \Delta p_0(t) = p_{00}(t) - \frac{\Delta q_0}{\alpha} e^{-\alpha(t-t_0)}$$

будет со временем изменяться требуемым образом (3).

Следовательно, необходима коррекция начального состояния объема производства.

Величина p_0 должна быть в соответствии с (10) равна

$$p_0 = p_{00} - \frac{\Delta q_0}{\alpha}.$$

Полные программные процессы:

$$p_0(t) = p_{00}(t) + \Delta p_0(t);$$

$$q_0(t) = q_{00}(t) + \Delta q_0(t),$$

где $\Delta p_0(t) = -\frac{\Delta q_0}{\alpha} e^{-\alpha(t-t_0)}$, показаны на рис. 1 пунктирными линиями, а сплошными линиями показаны стратегические программные функции $p_{00}(t)$ и $q_{00}(t) = q_{00}$.

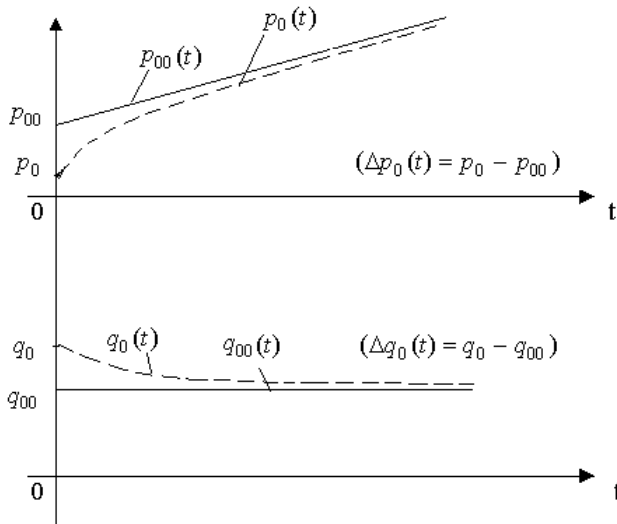


Рис. 1. Стратегические $p_{00}(t)$, $q_{00}(t)$, и полные $p_0(t)$, $q_0(t)$ программные траектории

Поведение переходных программных процессов $\Delta p_0(t)$, $\Delta q_0(t)$ показано на рис. 2.

2. Модель поведения системы в окрестности экспоненциальных программных траекторий в непрерывном времени. На практике процессы $\Delta p_0(t)$, $\Delta q_0(t)$ будут отличаться от своих программных значений

$\Delta p_0(t)$, $\Delta q_0(t)$ из-за наличия возмущений $\xi_q(t)$ производительности производства.

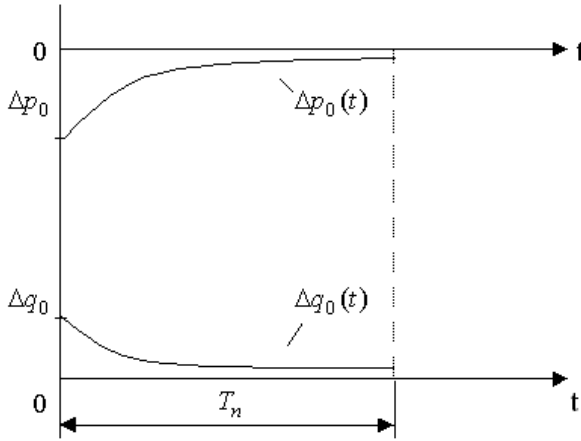


Рис. 2. Переходные экспоненциальные программные траектории $\Delta p_0(t_0)$, $\Delta q_0(t_0)$

Введем вектор $\delta \bar{\lambda}(t)$ отклонений процессов $\Delta p(t)$, $\Delta q(t)$ от программных значений $\Delta p_0(t)$, $\Delta q_0(t)$:

$$\delta \bar{\lambda}(t) = \begin{pmatrix} \delta p(t) \\ \delta q(t) \end{pmatrix},$$

где $\delta p(t) = \Delta p(t) - \Delta p_0(t)$; $\delta q(t) = \Delta q(t) - \Delta q_0(t)$.

С учетом возмущений $\xi_q(t)$ и корректирующих функций $\delta U_p(t)$, $\delta U_q(t)$ запишем основные уравнения для управляемого процесса $\delta \bar{\lambda}(t)$ в виде

$$\begin{cases} \frac{d \delta p(t)}{dt} = \delta q(t) + \delta U_p(t); \\ \frac{d \delta q(t)}{dt} = -\alpha \cdot \delta q(t) + \delta U_q(t) + \xi_q(t). \end{cases} \quad (11)$$

В частном случае $\delta U_p(t) = 0$, и управление осуществляется только функцией $\delta U_q(t)$. Это вариант “мягкого” управления процессами $\delta p(t)$, $\delta q(t)$.

Уравнения (11) учитывают наличие возмущений $\xi_q(t)$, а также наличие управляющих функций $\delta U_p(t)$, $\delta U_q(t)$.

Процесс $\xi_q(t)$, как правило, можно аппроксимировать белым гауссовским шумом с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$\langle \xi_q(t_1) \cdot \xi_q(t_2) \rangle = \frac{1}{2} \Theta_{\xi_q} \cdot \delta(t_1 - t_2). \quad (12)$$

Начальные условия для системы уравнений (11) задаются в виде:

$$\begin{cases} \langle \delta p_0 \rangle = \delta v_p; & \langle (\delta p_0 - \delta v_p)^2 \rangle = \sigma_{vp}^2; \\ \langle \delta q_0 \rangle = \delta v_q; & \langle (\delta q_0 - \delta v_q)^2 \rangle = \sigma_{vq}^2; \\ \langle (\delta p_0 - \delta v_p)(\delta q_0 - \delta v_q) \rangle = 0. \end{cases} \quad (13)$$

В векторно-матричной записи получим

$$\frac{d \delta \vec{\lambda}(t)}{dt} = \underline{A} \cdot \delta \vec{\lambda}(t) + \underline{B} \cdot \delta \vec{U}(t) + \vec{\xi}(t), \quad (14)$$

где

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix};$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ при "жестком" управлении;}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ при "мягком" управлении.}$$

Вектор $\vec{\xi}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_q(t) \end{pmatrix}$ имеет характеристики

$$\begin{cases} \langle \vec{\xi}(t) \rangle = \vec{0}; \\ \langle \vec{\xi}(t_1) \cdot \vec{\xi}^T(t_2) \rangle = \frac{1}{2} \underline{\Theta}_{\xi} \cdot \delta(t_1 - t_2), \end{cases}$$

$$\text{где } \underline{\Theta}_{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{\xi_q} \end{bmatrix}.$$

Начальные условия имеют вид:

$$\langle \delta \vec{\lambda}(t_0) \rangle = \delta \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} \delta v_p \\ \delta v_q \end{pmatrix};$$

$$\langle \delta \bar{\lambda}(t_0) - \delta \bar{v}_0 \rangle \langle \delta \bar{\lambda}(t_0) - \delta \bar{v}_0 \rangle^T = \underline{M}_0,$$

$$\text{где } \underline{M}_0 = \begin{bmatrix} \sigma_{vp}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{vq}^2 \end{bmatrix}.$$

3. Модель поведения системы в окрестности экспоненциальных программных траекторий в дискретном времени. С использованием известных результатов теории дифференциальных уравнений получим

$$\delta \bar{\lambda}_k = \underline{\Phi}_{k,k-1} \cdot \delta \bar{\lambda}_{k-1} + \underline{B}_{k,k-1} \cdot \delta \bar{U}_{k-1} + \bar{\eta}_k, \quad (15)$$

где $k = 1, 2, \dots, M$;

$$\underline{\Phi}_{k,k-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1 - \exp\{-\alpha(t_k - t_{k-1})\}}{\alpha} \\ 0 & \exp\{-\alpha(t_k - t_{k-1})\} \end{bmatrix};$$

$$\underline{B}_{k,k-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha(t_k - t_{k-1}) - 1 + \exp\{-\alpha(t_k - t_{k-1})\}}{\alpha^2} \\ 0 & \frac{1 - \exp\{-\alpha(t_k - t_{k-1})\}}{\alpha} \end{bmatrix}$$

для режима “мягкого” управления и

$$\underline{B}_{k,k-1} = \begin{bmatrix} \frac{1 - \exp\{-\alpha(t_k - t_{k-1})\}}{\alpha} & \frac{\alpha(t_k - t_{k-1}) - 1 + \exp\{-\alpha(t_k - t_{k-1})\}}{\alpha^2} \\ 0 & \frac{1 - \exp\{-\alpha(t_k - t_{k-1})\}}{\alpha} \end{bmatrix}$$

для режима “жесткого” управления.

В частном случае, когда $\Delta t = t_k - t_{k-1} = \text{Const}$ и $\alpha \cdot \Delta t \ll 1$, имеем:

$$\underline{\Phi}_{k,k-1} \approx \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\underline{B}_{k,k-1} \approx \begin{bmatrix} 0 & \frac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & \Delta t \end{bmatrix} \quad \text{для “мягкого” управления;}$$

$$\underline{B}_{k,k-1} \approx \begin{bmatrix} \Delta t & \frac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & \Delta t \end{bmatrix} \quad \text{для “жесткого” управления.}$$

Вектор $\bar{\eta}_k$ имеет нулевое математическое ожидание и дисперсион-

но-ковариационную матрицу

$$\underline{\Theta}_\eta = \langle \bar{\eta}_k \cdot \bar{\eta}_k^T \rangle = \begin{bmatrix} \theta_{\eta_{11}} & \theta_{\eta_{12}} \\ \theta_{\eta_{21}} & \theta_{\eta_{22}} \end{bmatrix},$$

где при $\alpha \cdot \Delta t \ll 1$:

$$\underline{\Theta}_\eta = \sigma_q^2 \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{3} & -\frac{\Delta t}{2} \\ -\frac{\Delta t}{2} & 1 \end{bmatrix};$$

$$\sigma_q^2 = \frac{\theta_{\xi q} \cdot \Delta t}{2}.$$

В скалярной записи имеем при $\alpha \cdot \Delta t \ll 1$:

$$\begin{cases} \delta p_k = \delta p_{k-1} + \Delta t \cdot \delta p_{k-1} + \Delta t \cdot \delta U_{p_{k-1}} + \frac{\Delta t^2}{2} \delta U_{q_{k-1}} + \eta_{pk}; \\ \delta q_k = \delta q_{k-1} + \Delta t \cdot \delta U_{q_{k-1}} + \eta_{qk}. \end{cases} \quad (16)$$

При “мягком” управлении имеем

$$\begin{cases} \delta p_k = \delta p_{k-1} + \Delta t \cdot \delta q_{k-1} + \frac{\Delta t^2}{2} \delta U_{q_{k-1}} + \eta_{pk}; \\ \delta q_k = \delta q_{k-1} + \Delta t \cdot \delta U_{q_{k-1}} + \eta_{qk}. \end{cases} \quad (17)$$

4. Постановка задачи оптимального корректирующего управления двумерным дифференциально-связанным процессом при использовании квадратичного критерия оптимальности. Пусть процесс $\delta \bar{\lambda}_k$, определенный уравнением (15), наблюдается с процессом \bar{n}_k погрешностей наблюдения

$$\delta \bar{u}_k = \delta \bar{\lambda}_k + \bar{n}_k, \quad (18)$$

где \bar{n}_k – гауссовская случайная последовательность, причем:

$$\langle \bar{n}_k \rangle = \vec{0};$$

$$\langle \bar{n}_k \cdot \bar{n}_k^T \rangle = \underline{N} = \begin{bmatrix} \sigma_{np}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{nq}^2 \end{bmatrix};$$

$$\langle \bar{n}_k \cdot \bar{n}_l^T \rangle = \underline{O} \text{ при } l \neq k.$$

Задача оптимального корректирующего управления заключается в нахождении функции $\delta \bar{U}_i$, которая минимизирует квадратичный функцио-

нал

$$E_{k,M} = \left\langle \delta \bar{\lambda}_M^T \cdot \underline{F} \cdot \delta \bar{\lambda}_M + \frac{1}{M-k} \sum_{i=k}^{M-1} \left[\delta \bar{\lambda}_i^T \cdot \underline{Q} \cdot \delta \bar{\lambda}_i + \delta \bar{U}_i^T \cdot \underline{P} \cdot \delta \bar{U}_i \right] \delta \bar{u}_i \right\rangle, \quad (19)$$

$$0 \leq l \leq k,$$

где матрицы \underline{F} , \underline{Q} , \underline{P} положим диагональными, а именно:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}; \quad \underline{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{bmatrix}; \quad \underline{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix}.$$

При этом

$$E_{k,M} = \left\langle \delta p_M^2 \cdot F_{11} + \delta q_M^2 \cdot F_{22} + \frac{1}{M-k} \sum_{i=k}^{M-1} \left[\delta p_i^2 \cdot Q_{11} + \delta q_i^2 \cdot Q_{22} + \delta U_i^2 \cdot P_{11} + \delta U_i^2 \cdot P_{22} \right] \delta \bar{u}_i \right\rangle. \quad (20)$$

Заключительным шагом является вычисление минимального значения критерия оптимальности, которое характеризует точность корректирующего управления.

Заключение. Для двумерных дифференциально-связанных процессов можно определить стратегические программные функции $p_0(t)$, $q_0(t)$, переходные экспоненциальные программные функции $\Delta p_0(t)$, $\Delta q_0(t)$. Задача тактического управления заключается в наилучшей реализации этих переходных функций.

В конкретной постановке система корректирующего управления осуществляет управление векторным процессом $\delta \bar{\lambda}(t)$, компоненты которого $\delta p(t)$, $\delta q(t)$ характеризуют погрешность реализации переходных траекторий.

Решение данной задачи при использовании квадратичного критерия оптимальности можно получить на основе известных результатов теории управления линейными стохастическими системами [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / Под ред. К.Т. Леондеса.* – М.: Мир, 1980. – 408 с.
2. *Управление проектами / И.И. Мазур, В.Д. Шапиро, Н.Г. Ольдерогге.* – М.: Экономика, 2001. – 574 с.

Поступила 28.10.2002

ХОМЯКОВА Надежда Эдуардовна, ассистент кафедры Национального аэрокосмического университета «ХАИ». Окончила ГАКУ «ХАИ» в 1999 году. Область научных

интересов – моделирование динамических процессов.