УДК 62.505

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-СВЯЗАННЫХ ЭКОНОМИКО-ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

Н.Э. Хомякова
(представил д.т.н., проф. В.И. Карпенко)

Рассмотрены математические модели двумерных дифференциально-связанных процессов в окрестности экспоненциальных переходных программных траекторий в непрерывном и дискретном времени. Сформулирована задача оптимального корректирующего управления дифференциально-связанными процессами применительно к задаче управления проектами коррекции производства.

Введение. На практике часто встречаются дифференциально-связанные экономико-производственные процессы. К таким процессам, в частности, относятся:

– производительность и объем производства;

– производительность и объем продаж.

Оценка таких процессов представляет большой интерес, особенно в связи с необходимостью управления ими с учетом как возмущающих факторов, так и погрешностей наблюдения.

Задача управления решается, как правило, в два этапа. На первом этапе игнорируются возмущения, действующие на объект управления, а также погрешности наблюдения. При этом определяются программные траектории и управляющие функции. На втором этапе решается задача синтеза корректирующего управления. При этом, как правило, используется квадратичный критерий оптимальности [1].

Ниже рассматривается частная задача разработки моделей двумерных дифференциально-связанных процессов с целью решения задачи синтеза оптимального управления ими и последующей разработки имитационной модели системы управления в целом. В качестве примера рассматриваются вопросы управления производительностью производства и его объемом при использовании экспоненциальных переходных траекторий.

1. Экспоненциальные переходные траектории для дифференциально-связанных процессов. Рассмотрим двумерный процесс:

$$\vec{\lambda}(t) = \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix},$$

где
$$\frac{dp(t)}{dt} = q(t)\,; \tag{1}$$

$$p(t) = p(t_0) + \int_{t_0}^{t} q(\tau)d\tau . \qquad (2)$$

Пусть $q(t)$ – производительность производства, а $p(t)$ – объем его в момент времени t. Пусть задана требуемая постоянная производительность производства q_{00}. При этом требуемое поведение процесса $p(t)$ определяется выражением

$$p_0(t) = p_{00} + q_{00}(t - t_0) . \qquad (3)$$

Рассмотрим экспоненциальную стратегию плавного изменения производительности, т.е. процесса $\Delta q_0(t)$ от начального значения

$$\Delta q_0(t_0) = q_0 - q_{00} = \Delta q_0$$

в соответствии с дифференциальным уравнением

$$\frac{d\Delta q_0(t)}{dt} = -\alpha \cdot \Delta q_0(t) . \qquad (4)$$

Решение уравнения (4) имеет вид

$$\Delta q_0(t) = \Delta q_0 \cdot \exp\{-\alpha(t - t_0)\}. \qquad (5)$$

Параметр α характеризует скорость изменения процесса $\Delta q_0(t)$. Его можно выбирать из условия обеспечения заданной длительности T_n переходного процесса, например, из условия

$$0{,}01\Delta q_0 = \Delta q_0(t_0 + T_n) = \Delta q_0 \cdot e^{-\alpha \cdot T_n} , \qquad (6)$$

т.е.

$$e^{\alpha \cdot T_n} = 100; \quad \alpha = \frac{2\ln 10}{T_n} \approx \frac{4{,}6}{T_n} . \qquad (7)$$

В соответствии с (2) и (5) получим

$$\Delta p_0(t) = \Delta p_0 + \frac{\Delta q_0}{\alpha}\left[1 - e^{-\alpha(t - t_0)}\right], \qquad (8)$$

где $\Delta p_0 = \Delta p_0(t_0)$ – начальное значение процесса $\Delta p_0(t)$.

Для реализации планового развития процесса $p_0(t)$ целесообразно обеспечить выполнение условия

$$\lim_{t \to \infty} \Delta p_0(t) = 0 . \qquad (9)$$

Из выражения (8) следует, что данное условие выполняется, если

$$\Delta p_0 = p_0 - p_{00} = -\frac{\Delta q_0}{\alpha} . \qquad (10)$$

Именно при этом условии процесс

$$p_0(t) = p_{00}(t) - \Delta p_0(t) = p_{00}(t) - \frac{\Delta q_0}{\alpha} e^{-\alpha(t-t_0)}$$

будет со временем изменяться требуемым образом (3).

Следовательно, необходима коррекция начального состояния объема производства.

Величина p_0 должна быть в соответствии с (10) равна

$$p_0 = p_{00} - \frac{\Delta q_0}{\alpha}.$$

Полные программные процессы:

$$p_0(t) = p_{00}(t) + \Delta p_0(t);$$
$$q_0(t) = q_{00}(t) + \Delta q_0(t),$$

где $\Delta p_0(t) = -\frac{\Delta q_0}{\alpha} e^{-\alpha(t-t_0)}$, показаны на рис. 1 пунктирными линиями, а сплошными линиями показаны стратегические программные функции $p_{00}(t)$ и $q_{00}(t) = q_{00}$.

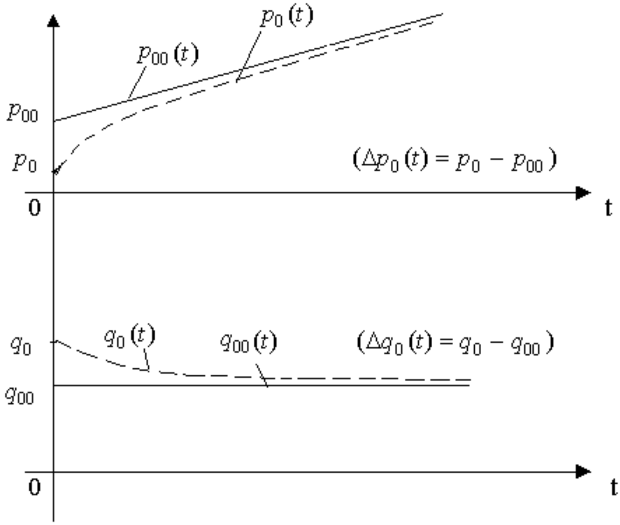

Рис. 1. Стратегические $p_{00}(t)$, $q_{00}(t)$, и полные $p_0(t)$, $q_0(t)$ программные траектории

Поведение переходных программных процессов $\Delta p_0(t)$, $\Delta q_0(t)$ показано на рис. 2.

2. Модель поведения системы в окрестности экспоненциальных программных траекторий в непрерывном времени. На практике процессы $\Delta p_0(t)$, $\Delta q_0(t)$ будут отличаться от своих программных значений

$\Delta p_0(t)$, $\Delta q_0(t)$ из-за наличия возмущений $\xi_q(t)$ производительности производства.

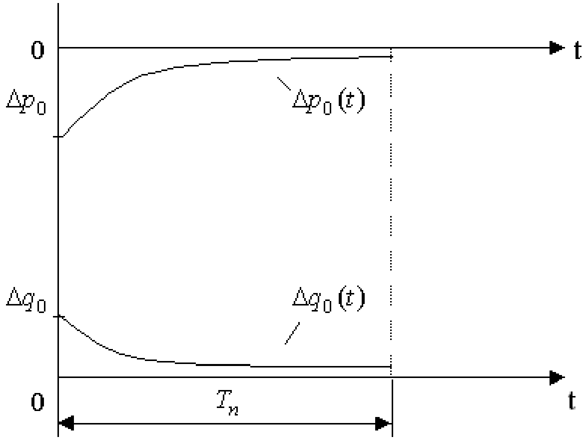

Рис. 2. Переходные экспоненциальные программные траектории $\Delta p_0(t_0)$, $\Delta q_0(t_0)$

Введем вектор $\delta\vec{\lambda}(t)$ отклонений процессов $\Delta p(t)$, $\Delta q(t)$ от программных значений $\Delta p_0(t)$, $\Delta q_0(t)$:

$$\delta\vec{\lambda}(t) = \begin{pmatrix} \delta\, p(t) \\ \delta\, q(t) \end{pmatrix},$$

где $\delta\, p(t) = \Delta p(t) - \Delta p_0(t)$; $\delta\, q(t) = \Delta q(t) - \Delta q_0(t)$.

С учетом возмущений $\xi_q(t)$ и корректирующих функций $\delta U_p(t)$, $\delta U_q(t)$ запишем основные уравнения для управляемого процесса $\delta\vec{\lambda}(t)$ в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d\,\delta\, p(t)}{dt} = \delta\, q(t) + \delta\, U_p(t); \\ \dfrac{d\,\delta\, q(t)}{dt} = -\alpha \cdot \delta\, q(t) + \delta\, U_q(t) + \xi_q(t). \end{cases} \qquad (11)$$

В частном случае $\delta\, U_p(t) = 0$, и управление осуществляется только функцией $\delta\, U_q(t)$. Это вариант “мягкого” управления процессами $\delta\, p(t)$, $\delta\, q(t)$.

Уравнения (11) учитывают наличие возмущений $\xi_q(t)$, а также наличие управляющих функций $\delta\, U_p(t)$, $\delta\, U_q(t)$.

Процесс $\xi_q(t)$, как правило, можно аппроксимировать белым гауссовским шумом с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$\left\langle \xi_q(t_1)\cdot\xi_q(t_2)\right\rangle = \frac{1}{2}\Theta_{\xi_q}\cdot\delta(t_1 - t_2)\,. \tag{12}$$

Начальные условия для системы уравнений (11) задаются в виде:

$$\begin{cases} \left\langle \delta\, p_0\right\rangle = \delta\,\nu_p\;; \;\; \left\langle \left(\delta\, p_0 - \delta\,\nu_p\right)^2\right\rangle = \sigma^2_{\nu p}\;; \\ \left\langle \delta\, q_0\right\rangle = \delta\,\nu_q\;; \;\; \left\langle \left(\delta\, q_0 - \delta\,\nu_q\right)^2\right\rangle = \sigma^2_{\nu q}\;; \\ \left\langle \left(\delta\, p_0 - \delta\,\nu_p\right)\left(\delta\, q_0 - \delta\,\nu_q\right)\right\rangle = 0\,. \end{cases} \tag{13}$$

В векторно-матричной записи получим

$$\frac{d\,\delta\,\vec{\lambda}(t)}{dt} = \underline{A}\cdot\delta\,\vec{\lambda}(t) + \underline{B}\cdot\delta\,\vec{U}(t) + \vec{\xi}(t)\,, \tag{14}$$

где

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix};$$

$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ при “жестком” управлении;

$\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ при “мягком” управлении.

Вектор $\vec{\xi}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_q(t) \end{pmatrix}$ имеет характеристики

$$\begin{cases} \left\langle \vec{\xi}(t)\right\rangle = \vec{0}\;; \\ \left\langle \vec{\xi}(t_1)\cdot\vec{\xi}^{\,T}(t_2)\right\rangle = \frac{1}{2}\underline{\Theta}_{\xi}\cdot\delta(t_1 - t_2)\,, \end{cases}$$

где $\underline{\Theta}_{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{\xi_q} \end{bmatrix}$.

Начальные условия имеют вид:

$$\left\langle \delta\,\vec{\lambda}(t_0)\right\rangle = \delta\,\vec{\nu}_0 = \begin{pmatrix} \delta\,\nu_p \\ \delta\,\nu_q \end{pmatrix};$$

$$\left\langle \delta\,\vec{\lambda}(t_0) - \delta\,\vec{v}_0 \right\rangle \left\langle \delta\,\vec{\lambda}(t_0) - \delta\,\vec{v}_0 \right\rangle^T = \underline{M}_0 ,$$

где $\underline{M}_0 = \begin{bmatrix} \sigma_{vp}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{vq}^2 \end{bmatrix}$.

3. Модель поведения системы в окрестности экспоненциальных программных траекторий в дискретном времени. С использованием известных результатов теории дифференциальных уравнений получим

$$\delta\vec{\lambda}_k = \underline{\Phi}_{k,k-1} \cdot \delta\,\vec{\lambda}_{k-1} + \underline{B}_{k,k-1} \cdot \delta\,\vec{U}\lambda_{k-1} + \vec{\eta}_k , \tag{15}$$

где $k = 1, 2, \ldots, M$;

$$\underline{\Phi}_{k,k-1} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1-\exp\{-\alpha(t_k - t_{k-1})\}}{\alpha} \\ 0 & \exp\{-\alpha(t_k - t_{k-1})\} \end{bmatrix};$$

$$\underline{B}_{k,k-1} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\alpha(t_k - t_{k-1}) - 1 + \exp\{-\alpha(t_k - t_{k-1})\}}{\alpha^2} \\ 0 & \dfrac{1-\exp\{-\alpha(t_k - t_{k-1})\}}{\alpha} \end{bmatrix}$$

для режима "мягкого" управления и

$$\underline{B}_{k,k-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1-\exp\{-\alpha(t_k - t_{k-1})\}}{\alpha} & \dfrac{\alpha(t_k - t_{k-1}) - 1 + \exp\{-\alpha(t_k - t_{k-1})\}}{\alpha^2} \\ 0 & \dfrac{1-\exp\{-\alpha(t_k - t_{k-1})\}}{\alpha} \end{bmatrix}$$

для режима "жесткого" управления.

В частном случае, когда $\Delta t = t_k - t_{k-1} = Const$ и $\alpha \cdot \Delta t \ll 1$, имеем:

$$\underline{\Phi}_{k,k-1} \approx \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\underline{B}_{k,k-1} \approx \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & \Delta t \end{bmatrix}$$ для "мягкого" управления;

$$\underline{B}_{k,k-1} \approx \begin{bmatrix} \Delta t & \dfrac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & \Delta t \end{bmatrix}$$ для "жесткого" управления.

Вектор $\vec{\eta}_k$ имеет нулевое математическое ожидание и дисперсионно-ковариационную матрицу

$$\underline{\Theta}_\eta = \left\langle \vec{\eta}_k \cdot \vec{\eta}_k^T \right\rangle = \begin{bmatrix} \theta_{\eta_{11}} & \theta_{\eta_{12}} \\ \theta_{\eta_{21}} & \theta_{\eta_{22}} \end{bmatrix},$$

где при $\alpha \cdot \Delta t << 1$:

$$\underline{\Theta}_\eta = \sigma_q^2 \begin{bmatrix} \dfrac{\Delta t^2}{3} & -\dfrac{\Delta t}{2} \\ -\dfrac{\Delta t}{2} & 1 \end{bmatrix};$$

$$\sigma_q^2 = \frac{\theta_{\xi_q} \cdot \Delta t}{2}.$$

В скалярной записи имеем при $\alpha \cdot \Delta t << 1$:

$$\begin{cases} \delta\, p_k = \delta\, p_{k-1} + \Delta t \cdot \delta\, p_{k-1} + \Delta t \cdot \delta\, U_{p_{k-1}} + \dfrac{\Delta t^2}{2} \delta\, U_{q_{k-1}} + \eta_{p_k}; \\ \delta\, q_k = \delta\, q_{k-1} + \Delta t \cdot \delta\, U_{q_{k-1}} + \eta_{q_k}. \end{cases} \tag{16}$$

При “мягком” управлении имеем

$$\begin{cases} \delta\, p_k = \delta\, p_{k-1} + \Delta t \cdot \delta\, q_{k-1} + \dfrac{\Delta t^2}{2} \delta\, U_{q_{k-1}} + \eta_{p_k}; \\ \delta\, q_k = \delta\, q_{k-1} + \Delta t \cdot \delta\, U_{q_{k-1}} + \eta_{q_k}. \end{cases} \tag{17}$$

4. Постановка задачи оптимального корректирующего управления двумерным дифференциально-связанным процессом при использовании квадратичного критерия оптимальности. Пусть процесс $\delta\, \vec{\lambda}_k$, определенный уравнением (15), наблюдается с процессом $\vec{n}_k$ погрешностей наблюдения

$$\delta\, \vec{u}_k = \delta\, \vec{\lambda}_k + \vec{n}_k, \tag{18}$$

где $\vec{n}_k$ – гауссовская случайная последовательность, причем:

$$\left\langle \vec{n}_k \right\rangle = \vec{0};$$

$$\left\langle \vec{n}_k \cdot \vec{n}_k^{\,T} \right\rangle = \underline{N} = \begin{bmatrix} \sigma_{np}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{nq}^2 \end{bmatrix};$$

$$\left\langle \vec{n}_k \cdot \vec{n}_l^{\,T} \right\rangle = \underline{O} \text{ при } l \neq k.$$

Задача оптимального корректирующего управления заключается в нахождении функции $\delta\, \vec{U}_i$, которая минимизирует квадратичный функционал

$$E_{k,M} = \left\langle \delta\vec{\lambda}_M^T \cdot \underline{F} \cdot \delta\vec{\lambda}_M + \frac{1}{M-k}\sum_{i=k}^{M-1}\left[\delta\vec{\lambda}_i^T \cdot \underline{Q} \cdot \delta\vec{\lambda}_i + \delta\vec{U}_i^T \cdot \underline{P} \cdot \delta\vec{U}_i\right]\delta\vec{u}_l \right\rangle, \quad (19)$$

$0 \le l \le k$,

где матрицы $\underline{F}$, $\underline{Q}$, $\underline{P}$ положим диагональными, а именно:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}; \quad \underline{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{bmatrix}; \quad \underline{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix}.$$

При этом

$$E_{k,M} = \left\langle \delta\, p_M^2 \cdot F_{11} + \cdot\delta\, q_M^2 \cdot F_{22} + \frac{1}{M-k}\sum_{i=k}^{M-1}\left[\delta\, p_i^2 \cdot Q_{11} + \delta\, q_i^2 \cdot Q_{22} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \delta\, U_i^2 \cdot P_{11} + \delta\, U_i^2 \cdot P_{22}\right]\delta\,\vec{u}_l - \right\rangle. \quad (20)$$

Заключительным шагом является вычисление минимального значения критерия оптимальности, которое характеризует точность корректирующего управления.

Заключение. Для двумерных дифференциально-связанных процессов можно определить стратегические программные функции $p_0(t)$, $q_0(t)$, переходные экспоненциальные программные функции $\Delta p_0(t)$, $\Delta q_0(t)$. Задача тактического управления заключается в наилучшей реализации этих переходных функций.

В конкретной постановке система корректирующего управления осуществляет управление векторным процессом $\delta\,\vec{\lambda}(t)$, компоненты которого $\delta\, p(t)$, $\delta\, q(t)$ характеризуют погрешность реализации переходных траекторий.

Решение данной задачи при использовании квадратичного критерия оптимальности можно получить на основе известных результатов теории управления линейными стохастическими системами [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / Под ред. К.Т. Леондеса. – М.: Мир, 1980. – 408 с.*
2. *Управление проектами / И.И. Мазур, В.Д. Шапиро, Н.Г. Ольдерогге. – М.: Экономика, 2001. – 574 с.*

Поступила 28.10.2002

***ХОМЯКОВА Надежда Эдуардовна**, ассистент кафедры Национального аэрокосмического университета «ХАИ». Окончила ГАКУ «ХАИ» в 1999 году. Область научных*

интересов – моделирование динамических процессов.