УДК 519.85

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ УСЛОВИЯ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ОБЪЕКТА С ИЗМЕНЯЕМЫМИ МЕТРИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ОБЛАСТИ РАЗМЕЩЕНИЯ

к.т.н. И.А. Чуб, д.ф.-м.н., проф. М.В. Новожилова

Предлагается методика построения аналитического описания условий размещения объекта с изменяемыми метрическими характеристиками и пространственной формой в области размещения.

При формализации оптимизационных задач размещения геометрических объектов и источников физических полей основными ограничениями являются условия взаимного непересечения объектов, а также их принадлежность заданной области размещения. Многочисленные исследования до настоящего момента были посвящены моделированию данных условий для объектов с постоянными метрическими характеристиками и пространственной формой [1, 2]. И лишь в некоторых работах рассматривалась возможность изменения метрических характеристик объектов размещения [3, 4].

Пусть размещаемый объект T_1 представляет собой четырехугольник. Координаты вершин (x^i, y^i) (i=1, …, 4) объекта T_1 задаются в собственной системе координат $X_1O_1Y_1$, начало которой O_1 (полюс объекта T_1) – точка пересечения диагоналей.

Имеется также замкнутая прямоугольная область Ω размещения длиной Z и шириной W. Положение полюса O_1 в общей системе координат XOY, связанной с областью Ω, характеризуется параметрами размещения (x_1, y_1)**.** Далее без потери общности считаем, что $T_1 = T_1(x_1, y_1)$**.**

Объект T_1 необходимо разместить в области Ω, т.е. необходимо, чтобы:

$$int\ T_1 \cap c\,\Omega = \varnothing, \qquad (1)$$

где $int\ (T)$ – внутренность множества T, $c\Omega$ – дополнение множества Ω до всего пространства R^2.

Метрические характеристики объекта T_1 однозначно задаются длиной диагоналей $\{2d_1, 2d_2\}$ и острым углом $2\alpha_1$ между ними. Рассмотрим случай, когда величины $\{2d_1, 2d_2, 2\alpha_1\}$ связаны функциональными зависимостями, т.е. в процессе размещения угол α_1, а также одна из диагоналей изменяются так, что площадь S_1 объекта T_1 остается постоянной.

Замечание 1. Угол α_1 может получить приращение $\Delta\alpha_1$ в пределах

$$-2\alpha_1 < \Delta\alpha_1 < \pi - 2\alpha_1, \qquad (2)$$

считая без потери общности положительным изменение $\Delta\alpha_1$ по часовой стрелке.

Замечание 2. При $\Delta\alpha_1=0$ размещаемый объект T_1 представляет собой прямоугольник со сторонами $2a_1$, $2b_1$. Изменение $\Delta\alpha_1$ приводит к выводу T_1 из первоначального класса пространственных форм "*прямоугольник*". Однако знаки строгих неравенств обеспечивают T_1 свойство всюду плотного множества в R^2.

Предположим, что в прямоугольнике T_1 угол α_1 изменился на величину $\Delta\alpha_1$ (рис. 1). В этом случае величина одной из его диагоналей также изменяется. Пусть это будет диагональ B_1D_1. Ее длина d_1^* становится равной

$$d_1^* = \frac{S_1}{2d_1 \sin 2\alpha_1}. \qquad (3)$$

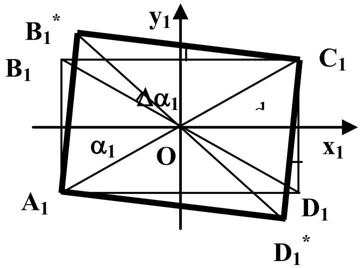

Рис. 1. Вид объекта T_1

Исходный объект трансформируется в параллелограмм $A_1B_1^*C_1D_1^*$.

Координаты вершин A_1, B_1^*, C_1 и D_1^* объекта T_1 в собственной системе координат $X_1O_1Y_1$ определяются как:

$$x_{C_1} = \frac{S_1}{4d_1}\frac{1}{\sin\alpha_1}; \quad y_{C_1} = \frac{S_1}{4d_1}\frac{1}{\cos\alpha_1}; \qquad x_{A_1} = -x_{C_1}; \; y_{A_1} = -y_{C_1}; \qquad (4)$$

$$x_{B_1^*} = \frac{S_1}{2d_1}\frac{\cos(\pi-\alpha_1-\Delta\alpha_1)}{\sin(2\alpha_1+\Delta\alpha_1)}; \; y_{B_1^*} = \frac{S_1}{2d_1}\frac{\sin(\pi-\alpha_1-\Delta\alpha_1)}{\sin(2\alpha_1+\Delta\alpha_1)}; \qquad (5)$$

$$x_{D_1^*} = -x_{B_1^*}; \quad y_{D_1^*} = -y_{B_1^*}. \qquad (6)$$

При каждом фиксированном значении $\Delta\alpha_1$ условие размещения (1) в области описывается системой линейных неравенств $F_{лин}(x,y) \geq 0$, где $F_{лин}(x,y)$ – набор функций вида $F_{лин}(x_1,y_1)$: $\{ f^1_{лин}(x_1,y_1),\; f^2_{лин}(x_1,y_1),\; f^3_{лин}(x_1,y_1),\; f^4_{лин}(x_1,y_1) \} = \{x_1 - x_1^*;\; z - x_1 - x_2^*;\; y_1 - y_1^*;\; W - y_1 - y_2^*\}$, где $x_2^* = \max_i x^i$; $x_1^* = \min_i x^i$; $y_1^* = \max_i y^i$; $y_2^* = \min_i y^i$.

Иначе говоря, задается Φ-функция [1] вида

$$\Phi_{лин}(x_1,y_1) = \min\{ x_1 - x_1^*;\; z - x_1 - x_2^*;\; y_1 - y_1^*;\; W - y_1 - y_2^* \}. \qquad (7)$$

При этом условие касания $\Phi_{лин}(x_1,y_1)=0$ означает выполнение хотя бы одного из неравенств как точного равенства (при выполнении остальных неравенств).

Пусть $\Delta\alpha_1$ непрерывно изменяется в пределах (2). Тогда область G параметров размещения, удовлетворяющих условиям размещения (1), представляет собой нелинейное замкнутое связное точечное множество в пространстве параметров $(x_1, y_1, \Delta\alpha_1)$.

Построим аналитическое описание множества G. Для этого область (2) допустимых изменений $\Delta\alpha_1$ разобьем на два подмножества:

$$0 \geq -\Delta\alpha_1 > 2\alpha_1 - \pi; \tag{8}$$

$$2\alpha_1 \geq -\Delta\alpha_1 > 0. \tag{9}$$

Рассмотрим условие (8). В данном диапазоне существует некоторое значение $\Delta\alpha_1^*$, при котором абсциссы вершин B_1 и C_1 равны, т.е. $x_{B_1} = x_{C_1}$ (аналогично $x_{A_1} = x_{D_1}$), т.е. при $\Delta\alpha_1=\Delta\alpha_1^*$ происходит переход на другую гладкую поверхность, ограничивающую область G. С учетом (4 – 6) угол $\Delta\alpha_1^*$ равен

$$\Delta\alpha_1^* = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{-\sin^2\alpha_1 + \sqrt{\sin^4\alpha_1 + \sin^2 2\alpha_1}}{\sin 2\alpha_1}\right). \tag{10}$$

Если $\Delta\alpha_1 < \Delta\alpha_1^*$, то $x_{B_1} < x_{C_1}$ ($x_{A_1} < x_{D_1}$); при $\Delta\alpha_1 > \Delta\alpha_1^*$ – $x_{B_1} > x_{C_1}$ ($x_{A_1} > x_{D_1}$).

Рассмотрим условие (9). Диагональ B_1D_1 вращается против часовой стрелки. При изменении $\Delta\alpha_1$ в пределах (9) существует некоторый угол $\Delta\alpha_1^{**}$, при котором $y_{B_1} = y_{A_1}$. Если угол $\Delta\alpha_1 < \Delta\alpha_1^{**}$, то $y_{B_1} > y_{A_1}$ ($y_{C_1} > y_{D_1}$); если $\Delta\alpha_1 > \Delta\alpha_1^{**}$, то $y_{B_1} < y_{A_1}$ ($y_{C_1} < y_{D_1}$). Выражение для угла $\Delta\alpha_1^{**}$ имеет вид

$$\Delta\alpha_1^{**} = \alpha_1 + \mathrm{arcctg}\left(\frac{S}{2d_1^2\sin^2\alpha_1} + \mathrm{ctg}\,\alpha_1\right).$$

Таким образом, область изменения параметра $\Delta\alpha_1$ разбивается на четыре подобласти: $\{0 \leq \Delta\alpha_1 < \Delta\alpha_1^*;\ \Delta\alpha_1^* \leq \Delta\alpha_1 < \pi - 2\alpha_1;\ -2\alpha_1 < \Delta\alpha_1 \leq \Delta\alpha_1^{**};\ \Delta\alpha_1^{**} < \Delta\alpha_1 < 0\}$.

В каждой из этих подобластей функции $f^i_{лин}(x_1,y_1)$ становятся нелинейными функциями от $\Delta\alpha_1$, т.к. это функции от координат вершин объекта.

Итак, если $0 \leq \Delta\alpha_1 < \Delta\alpha_1^*$, условия размещения (1) описываются системой неравенств $F_{1нелин}(x_1, y_1, \Delta\alpha_1) \geq 0$ вида $\{ f_1^i{}_{нелин}(x_1, y_1, \Delta\alpha_1) \geq 0\}$, ($i$=1,…,4), где функции $f_1^i{}_{нелин}(x_1, y_1, \Delta\alpha_1)$ имеют вид

$$\{ x_1 - d_1\cos\alpha_1; W - y_1 - y_{B_1^*};\ Z - x_1 - d_1\cos\alpha_1;\ y_1 - y_{B_1^*} \}.$$

При $\Delta\alpha_1^* \le \Delta\alpha_1 < \pi - 2\alpha_1$ условия (1) задаются системой $F_{2нелин}(x_1,y_1,\Delta\alpha_1) \ge 0$, где

$$\{ f_2^i \}=\{ x_1 - x_{B_1^*} ,\ f_1^2{}_{нелин}(x_1,y_1,\Delta\alpha_1);\ x_1 - Z - x_{B_1^*}\ f_4^2{}_{нелин}(x_1,y_1,\Delta\alpha_1)\}.$$

При $-2\alpha_1<\Delta\alpha_1< -\Delta\alpha_1^{**}$ условия (1) задаются системой $F_{3нелин}(x_1,y_1,\ \Delta\alpha_1) \ge 0$, где

$$\{ f_3^i \}=\{ x_1 - x_{B_1^*} , W - y_1 - d_1 \sin\alpha_1 , Z - x_1 - x_{B_1^*} , y_1 - d_1 \sin\alpha_1 \}.$$

В диапазоне $-\Delta\alpha_1^{**} < \Delta\alpha_1 \le 0$ (1) задаются системой $F_{4нелин}(x_1,y_1,\ \Delta\alpha_1) \ge 0$, где

$$\{ f_4^i \}=\{ x_1 - x_{B_1^*} , W - y_1 - y_{B_1^*} , Z - x_1 - x_{B_1^*} , y_1 - y_{B_1^*} \}.$$

Тогда Φ-функция, задающая условия размещения объекта T_1 в области Ω, определяется формулой

$$\Phi(x_1,y_1,\Delta\alpha_1)=\max \{\min \{ f_1^1, f_1^2, f_1^3, f_1^4,\ g_1^1, g_1^2 \};$$
$$\min \{ f_2^1, f_2^2, f_2^3, f_2^4,\ g_2^1, g_2^2 \}; \min \{ f_3^1, f_3^2, f_3^3, f_3^4,\ g_3^1, g_3^2 \};$$
$$\min \{ f_4^1, f_4^2, f_4^3, f_4^4,\ g_4^1, g_4^2 \}\},$$

где $g_1^1 = \Delta\alpha_1$; $g_1^2 = -\ g_2^1 = \Delta\alpha_1^* - \Delta\alpha_1$; $g_2^2 = \pi - 2\alpha_1 - \Delta\alpha_1$; $g_3^1 = \Delta\alpha_1 - 2\alpha_1$; $g_3^2 = -g_4^1 = -\Delta\alpha_1^{**} - \Delta\alpha_1$; $g_4^2 = -\Delta\alpha_1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – К.: Наук. думка, 1986. – 267 с.*
2. *Элементы теории геометрического проектирования / Н.И. Гиль, С.В. Яковлев, М.В. Новожилова и др. – К.: Наук. думка, 1995. – 248 с.*
3. *Stoyan Yu.G., Yaskov G.N. Peculiarities of a mathematical model of optimization of a placement of circles and method of searching for an approximation to a global minimum // Доп. НАНУ. – 2000. – № 1. – P. 86 – 90.*

Поступила 1.11.2002

ЧУБ Игорь Андреевич*, канд. техн. наук, доцент, доцент Академии пожарной безопасности Украины. В 1981 году окончил факультет электроники ХИРЭ. Область научных интересов – системный анализ, оптимизация размещения источников физичес-ких полей, вопросы воздействия пожара на окружающую среду.*

НОВОЖИЛОВА Марина Владимировна*, доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор Харьковского государственного технического университета строительства и архитектуры. В 1984 году окончила факультет вычислительной техники ХИРЭ. Области научных интересов – математическое моделирование, вычислительные методы, обработка геометрической информации.*