

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ
НЕОДНОРОДНЫХ СИЛ И СРЕДСТВ ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУ-
МА
СРЕДНЕГО СУММАРНОГО КОЛИЧЕСТВА ОСНОВНЫХ СИЛ
ПРОТИВНИКА В КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ**

к.т.н. В.Б. Кононов, А.П. Нестеренко, Я.Н. Кожушко
(представил проф., д.т.н. Б.Ф. Самойленко)

В статье рассматривается решение задачи оптимального управления распределением неоднородных сил и средств конфликтующей стороны по критерию минимума среднего суммарного количества основных сил противника.

Рассмотренная в [1] методика решения задач определения соотношения сил и средств сторон для случая разнородных средств может быть использована для решения более сложных задач: задач управления оптимальным распределением сил и средств, исходя из выбранного критерия эффективности. Рассмотрим задачу оптимального распределения неоднородных сил и средств стороны A , в которой она стремится выбрать свои управляющие параметры $\alpha = \left\| \alpha_{ji} \right\|_{n,m}$ таким образом, чтобы к концу боя

среднее суммарное количество основных сил стороны B было минимально, причём резервы сторон A , B и ограничения на потери сторон отсутствуют. Математическая модель данной задачи имеет вид:

$$\min_{\{\alpha\}} \sum_{j=1}^{n_j} y_j(T) = \min_{\{\alpha\}} J(\alpha); \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} b_{ij} y_j(t), & i = \overline{1, m}; \\ \frac{dy_j}{dt} = - \sum_{i=1}^m \alpha_{ji} a_{ji} x_i(t), & j = \overline{1, n}; \end{cases} \quad (2)$$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, m}; \quad y_j(0) = y_j^0, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \beta_{ij} &= 1; \quad j = \overline{1, n}; \quad \beta_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}; \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} &= 1; \quad i = \overline{1, m}; \quad \alpha_{ji} \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $J(\alpha)$ – некоторая функция от управляющих параметров α ; T – заданное время боя; β_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) – заданные параметры распределения сил и средств стороны B .

Сформулированная задача (1 – 3) представляет собой задачу оптимального управления с терминальным функционалом, закреплённым временем и свободным правым концом.

Построим для задачи (1 – 3) функцию Гамильтона-Понтрягина [2]:

$$\begin{aligned} H(x, y, \varphi, \eta, \alpha) &= -\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_{ij} b_{ij} y_j(t) \varphi_i(t) - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{ji} a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) = \\ &= -\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\beta_{ij} b_{ij} y_j(t) \varphi_i(t) + \alpha_{ji} a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

и соответствующую сопряженную систему:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_i(t)}{dt} &= -\frac{\partial H(x, y, \varphi, \eta, \alpha)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, m}; \\ \frac{d\eta_j(t)}{dt} &= -\frac{\partial H(x, y, \varphi, \eta, \alpha)}{\partial y_j}, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\frac{d\varphi_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} a_{ji} \eta_j(t), \quad i = \overline{1, m}; \quad \frac{d\eta_j(t)}{dt} = \sum_{i=1}^m \beta_{ij} b_{ij} \varphi_i(t), \quad j = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Применяя для задачи (1 – 3) необходимое условие оптимальности – принцип максимума [2], будем считать: если $x^*(t), y^*(t), \alpha^*(t), t \in [0, T]$ – решение задачи, то существуют непрерывные вектор-функции:

$$\varphi(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)]^T; \quad \eta(t) = [\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_n(t)]^T, \quad t \in [0, T]$$

и постоянная φ_0 такие, что:

- 1) $\varphi_0 \leq 0, |\varphi_0| + \|\varphi(t)\| + \|\eta(t)\| \neq 0, t \in [0, T]$;
- 2) $\varphi(t), \eta(t)$ являются решением сопряженной системы (5), соответствующей рассматриваемому решению;
- 3) при каждом $t \in [0, T]$ функция $H(x(t), y(t), \varphi(t), \eta(t), \alpha)$ переменной α

достигает своей верхней грани на множестве D , задаваемом ограничениями (3):

$$\max_{\alpha \in D} H(x(t), y(t), \varphi(t), \eta(t), \alpha) = H[x(t), y(t), \varphi(t), \eta(t), \alpha(x(t), y(t), \varphi(t), \eta(t))];$$

4) на правом конце выполняется условие трансверсальности:

$$\varphi(T) = \varphi_0 \nabla_x \phi(y(T)) = [0, 0, \dots, 0]^T;$$

$$\eta(T) = \varphi_0 \nabla_y \phi(y(T)) = [\varphi_0, \varphi_0, \dots, \varphi_0, 0, 0, \dots, 0]^T,$$

где $\phi(y(T)) = \sum_{j=1}^{n_1} y_j(T)$; $\eta_j(T) = \varphi_0$, $j = \overline{1, n_1}$; $\eta_j(T) = 0$, $j = \overline{n_1 + 1, n}$.

Постоянная $\varphi_0 \neq 0$, т.к. если $\varphi_0 = 0$, то система (5) при нулевых условиях на правом конце имеет лишь нулевое решение: $\varphi(t) \equiv 0$, $\eta(t) \equiv 0$, что противоречит условиям оптимальности. Следовательно, можно считать $\varphi_0 = -1$ [3]. При этом условия трансверсальности примут вид:

$$\varphi_i(T) = 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad \eta_j(T) = -1, \quad j = \overline{1, n_1}; \quad \eta_j(T) = 0, \quad j = \overline{n_1 + 1, n}. \quad (6)$$

В рассматриваемом случае найти аналитическое решение задачи

$$\max_{\alpha \in D} \left\{ - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\beta_{ij} b_{ij} y_j(t) \varphi_i(t) + \alpha_{ji} a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) \right] \right\}$$

не представляется возможным. Поэтому для решения (1 – 3) приходится использовать методы приближенного вычисления. Воспользуемся методом условного градиента [3], который может применяться для приближенного решения задачи

$$J(u) \rightarrow \min, \quad u \in U, \quad (7)$$

где U – выпуклое ограниченное множество из гильбертового пространства H ; $J(u)$ – непрерывно дифференцируемый функционал на U .

Этот метод заключается в построении последовательных приближений решения в соответствии с следующим алгоритмом: по известному k -му приближению $u^k \in U$ находят вспомогательное приближение $\bar{u}^k \in U$ из условия

$$\left\langle J'(u^k), \bar{u}^k \right\rangle = \min_U \left\langle J'(u^k), u \right\rangle, \quad (8)$$

где $J'(u^k)$ – производная или градиент функционала $J(u)$ в точке u^k .

Затем полагают $u^{k+1} = u^k + \rho_k \left(\bar{u}^k - u^k \right)$, $0 \leq \rho_k \leq 1$. (9)

Способы выбора шага ρ_k определяют различные варианты метода условного градиента.

Если градиент $J'(u)$ выпуклого функционала удовлетворяет условию Липшица на множестве U с константой $L \geq 0$, т.е.

$$\|J'(u) - J'(v)\| \leq L\|u - v\|, \quad \forall u, v \in U,$$

то по теореме 4.6 [3] последовательность $\{u^k\}$ минимизирует этот функционал на U и слабо сходится к множеству оптимальных точек U^* задачи (7):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(u^k) = J(u^*), \quad u^* \in U^*.$$

Для задачи (1 – 3) функционал $J(\alpha)$ линеен, так как управление α входит линейно в правые части сопряженной системы (5). Следовательно, он выпукл. Множество D , задаваемое ограничениями (3), замкнуто и ограничено в R^{mn} . Тогда, если градиент функционала $J(\alpha)$ существует и удовлетворяет условию Липшица, метод условного градиента для задачи (1 – 3) позволяет получить сходящееся решение, а последовательность $\{\alpha^k\}$ слабо сходится к множеству оптимальных точек D^* данной задачи.

По теореме 5.1 [3] функционал $J(\alpha)$ непрерывен и дифференцируем по α , причем его градиент в точке α представим в виде:

$$J'(\alpha) = -\nabla_{\alpha} H(x, y, \varphi, \eta, \alpha) = -\nabla_{\alpha} \left\{ -\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [\beta_{ij} b_{ij} y_j(t) \varphi_i(t) + \alpha_{ji} a_{ji} x_i(t) \eta_j(t)] \right\}.$$

Вычислим частные производные функции Гамильтона-Понтрягина по α_{ij} :

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha_{ji}} = a_{ji} x_i(t) \eta_j(t), \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (10)$$

Так как управления α ограничены на множестве D , т.е.

$$0 \leq \alpha_{ji} \leq 1, \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m},$$

то в силу теорем 5.1 и 5.2 [3] градиент $J'(u)$ удовлетворяет условию Липшица. Таким образом, применение метода условного градиента для задачи (1 – 3) обосновано.

Результаты решения задачи (1 – 3) дают возможность проанализировать оптимальное управление распределением неоднородных сил и средств по критерию минимума среднего суммарного количества основных сил противника в конфликтной ситуации и могут быть положены в основу разработки алгоритма оптимального управления распределением средств резерва.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кононов В.Б. Метод решения задачи распределения сил и средств в конфликтной ситуации / *СОИ*. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вып. 2 (18). – С. 155 – 158.
2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М:

Наука, 1980. – 518 с.

Поступила 6.11.2002

КОНОНОВ Владимир Борисович, канд. техн. наук, доцент, зам. нач. фак. ХВУ. В 1987 году окончил ХВВКИУ РВ. Область научных интересов – исследование операций.

НЕСТЕРЕНКО Артем Павлович – курсант ХВУ.

КОЖУШКО Ярослав Николаевич – курсант ХВУ.
