УДК 623. 021: 005

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ НЕОДНОРОДНЫХ СИЛ И СРЕДСТВ ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУМА СРЕДНЕГО СУММАРНОГО КОЛИЧЕСТВА ОСНОВНЫХ СИЛ ПРОТИВНИКА В КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ

к.т.н. В.Б. Кононов, А.П. Нестеренко, Я.Н. Кожушко
(представил проф., д.т.н. Б.Ф. Самойленко)

В статье рассматривается решение задачи оптимального управления распределением неоднородных сил и средств конфликтующей стороны по критерию минимума среднего суммарного количества основных сил противника.

Рассмотренная в [1] методика решения задач определения соотношения сил и средств сторон для случая разнородных средств может быть использована для решения более сложных задач: задач управления оптимальным распределением сил и средств, исходя из выбранного критерия эффективности. Рассмотрим задачу оптимального распределения неоднородных сил и средств стороны A, в которой она стремится выбрать свои управляющие параметры $\alpha = \left\| \alpha_{ji} \right\|_{n,m}$ таким образом, чтобы к концу боя среднее суммарное количество основных сил стороны B было минимально, причём резервы сторон A, B и ограничения на потери сторон отсутствуют. Математическая модель данной задачи имеет вид:

$$\min_{\{\alpha\}} \sum_{j=1}^{n_1} y_j(T) = \min_{\{\alpha\}} J(\alpha); \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = -\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{ij} b_{ij} y_j(t), \quad i = \overline{1,\ m}; \\ \dfrac{dy_j}{dt} = -\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{ji} a_{ji} x_i(t), \quad j = \overline{1,\ n}; \end{cases} \tag{2}$$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1,\ m}; \quad y_j(0) = y_j^0, \quad j = \overline{1,\ n};$$

$$\sum_{i=1}^{m}\beta_{ij}=1;\ j=\overline{1,\ n};\ \beta_{ij}\geq 0,\ i=\overline{1,\ m},\ j=\overline{1,\ n};$$
$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}=1;\ i=\overline{1,\ m};\ \alpha_{ji}\geq 0,\ j=\overline{1,\ n},\ i=\overline{1,\ m}, \tag{3}$$

где $J(\alpha)$ – некоторая функция от управляющих параметров α; T – заданное время боя; $\beta_{ij}\left(i=\overline{1,\ m},\ j=\overline{1,\ n}\right)$ – заданные параметры распределения сил и средств стороны B.

Сформулированная задача (1 – 3) представляет собой задачу оптимального управления с терминальным функционалом, закреплённым временем и свободным правым концом.

Построим для задачи (1 – 3) функцию Гамильтона-Понтрягина [2]:

$$H(x,\ y,\ \varphi,\ \eta,\ \alpha)=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}b_{ij}y_j(t)\varphi_i(t)-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ji}a_{ji}x_i(t)\eta_j(t)=$$
$$=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[\beta_{ij}b_{ij}y_j(t)\varphi_i(t)+\alpha_{ji}a_{ji}x_i(t)\eta_j(t)\right] \tag{4}$$

и соответствующую сопряженную систему:

$$\frac{d\varphi_i(t)}{dt}=-\frac{\partial H(x,\ y,\ \varphi,\ \eta,\ \alpha)}{\partial x_i},\ i=\overline{1,\ m};$$
$$\frac{d\eta_j(t)}{dt}=-\frac{\partial H(x,\ y,\ \varphi,\ \eta,\ \alpha)}{\partial y_j},\ j=\overline{1,\ n},$$

т.е.

$$\frac{d\varphi_i(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}a_{ji}\eta_j(t),\ i=\overline{1,m};\quad \frac{d\eta_j(t)}{dt}=\sum_{i=1}^{m}\beta_{ij}b_{ij}\varphi_i(t),\ j=\overline{1,n}. \tag{5}$$

Применяя для задачи (1 – 3) необходимое условие оптимальности – принцип максимума [2], будем считать: если $x^*(t), y^*(t), \alpha^*(t),\ t\in[0,\ T]$ – решение задачи, то существуют непрерывные вектор-функции:

$$\varphi(t)=\left[\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ ..\varphi_m(t)\right]^T;\ \eta(t)=\left[\eta_1(t),\ \eta_2(t)\ ..\eta_n(t)\right]^T,\ t\in[0,\ T]$$

и постоянная φ_0 такие, что:

1) $\varphi_0\leq 0,\ |\varphi_0|+\|\varphi(t)\|+\|\eta(t)\|\neq 0,\ t\in[0,\ T]$;

2) $\varphi(t),\ \eta(t)$ являются решением сопряженной системы (5), соответствующей рассматриваемому решению;

3) при каждом $t\in[0,T]$ функция $H(x(t),y(t),\varphi(t),\eta(t),\alpha)$ переменной α

достигает своей верхней грани на множестве D, задаваемом ограничениями (3):

$$\max_{\alpha \in D} H(x(t), y(t), \varphi(t), \eta(t), \alpha) = H[x(t), y(t), \varphi(t), \eta(t), \alpha(x(t), y(t), \varphi(t), \eta(t))];$$

4) на правом конце выполняется условие трансверсальности:

$$\varphi(T) = \varphi_0 \nabla_x \phi(y(T)) = [0,\ 0,\ \ldots,\ 0\ ]^T;$$

$$\eta(T) = \varphi_0 \nabla_y \phi(y(T)) = [\varphi_0,\ \varphi_0,\ \ldots,\ \varphi_0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0]^T,$$

где $\phi(y(T)) = \sum_{j=1}^{n_1} y_j(T)$; $\eta_j(T) = \varphi_0,\ \ j = \overline{1,\ n_1}; \eta_j(T) = 0,\ \ j = \overline{n_1 + 1,\ n}.$

Постоянная $\varphi_0 \neq 0$, т.к. если $\varphi_0 = 0$, то система (5) при нулевых условиях на правом конце имеет лишь нулевое решение: $\varphi(t) \equiv 0,\ \eta(t) \equiv 0,$ что противоречит условиям оптимальности. Следовательно, можно считать $\varphi_0 = -1$ [3]. При этом условия трансверсальности примут вид:

$$\varphi_i(T) = 0,\ i = \overline{1,\ m}\ ;\ \ \eta_j(T) = -1,\ \ j = \overline{1,\ n_1};\ \ \eta_j(T) = 0,\ \ j = \overline{n_1 + 1,\ n}. \quad (6)$$

В рассматриваемом случае найти аналитическое решение задачи

$$\max_{\alpha \in D} \left\{ -\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left[\beta_{ij}\ b_{ij}\ y_j(t)\ \varphi_i(t) + \alpha_{ji}\ a_{ji}\ x_i(t)\ \ \eta_j(t) \right] \right\}$$

не представляется возможным. Поэтому для решения (1 – 3) приходится использовать методы приближённого вычисления. Воспользуемся методом условного градиента [3], который может применяться для приближенного решения задачи

$$J(u) \to \min, \quad u \in U, \quad (7)$$

где U – выпуклое ограниченное множество из гильбертового пространства H ; $J(u)$ – непрерывно дифференцируемый функционал на U .

Этот метод заключается в построении последовательных приближений решения в соответствии с следующим алгоритмом: по известному k -му приближению $u^k \in U$ находят вспомогательное приближение $\overline{u}^k \in U$ из условия

$$\left\langle J'\left(u^k\right),\ \overline{u^k} \right\rangle = \min_U \left\langle J'\left(u^k\right),\ u \right\rangle, \quad (8)$$

где $J'\left(u^k\right)$ – производная или градиент функционала $J(u)$ в точке u^k.

Затем полагают
$$u^{k+1} = u^k + \rho_k \left(\overline{u^k} - u^k \right),\ 0 \le \rho_k \le 1. \quad (9)$$

Способы выбора шага ρ_k определяют различные варианты метода условного градиента.

Если градиент $J'(u)$ выпуклого функционала удовлетворяет условию Липшица на множестве U с константой $L \ge 0$, т.е.

$$\|J'(u) - J'(v)\| \le L\|u - v\| \ , \ \forall u \ , \ v \in U \ ,$$

то по теореме 4.6 [3] последовательность $\{u^k\}$ минимизирует этот функционал на U и слабо сходится к множеству оптимальных точек U^* задачи (7):

$$\lim_{k \to \infty} J\left(u^k\right) = J\left(u^*\right) \ , \ u^* = U^* .$$

Для задачи (1 – 3) функционал $J(\alpha)$ линеен, так как управление α входит линейно в правые части сопряженной системы (5). Следовательно, он выпукл. Множество D, задаваемое ограничениями (3), замкнуто и ограничено в R^{mn}. Тогда, если градиент функционала $J(\alpha)$ существует и удовлетворяет условию Липшица, метод условного градиента для задачи (1 – 3) позволяет получить сходящееся решение, а последовательность $\{\alpha^k\}$ слабо сходится к множеству оптимальных точек D^* данной задачи.

По теореме 5.1 [3] функционал $J(\alpha)$ непрерывен и дифференцируем по α, причем его градиент в точке α представим в виде:

$$J'(\alpha) = -\nabla_\alpha H(x, \ y, \ \varphi, \ \eta, \ \alpha) =$$

$$= -\nabla_\alpha \left\{ -\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left[\beta_{ij} b_{ij} y_j(t) \varphi_i(t) + \alpha_{ji} a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) \right] \right\}.$$

Вычислим частные производные функции Гамильтона-Понтрягина по α_{ij}:

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha_{ji}} = a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) \ , \ \ j = \overline{1, \ n}, \ \ i = \overline{1, \ m}. \tag{10}$$

Так как управления α ограничены на множестве D, т.е.

$$0 \le \alpha_{ji} \le 1, \ , \ \ j = \overline{1, \ n}, \ \ i = \overline{1, \ m} ,$$

то в силу теорем 5.1 и 5.2 [3] градиент $J'(u)$ удовлетворяет условию Липшица. Таким образом, применение метода условного градиента для задачи (1 – 3) обосновано.

Результаты решения задачи (1 – 3) дают возможность проанализировать оптимальное управление распределением неоднородных сил и средств по критерию минимума среднего суммарного количества основных сил противника в конфликтной ситуации и могут быть положены в основу разработки алгоритма оптимального управления распределением средств резерва.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кононов В.Б. Метод решения задачи распределения сил и средств в конфликтной ситуации / СОІ. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002.– Вип. 2 (18). – С. 155 – 158.*
2. *Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М:*

Наука, 1980. – 518 с.

Поступила 6.11.2002

КОНОНОВ Владимир Борисович, *канд. техн. наук, доцент, зам. нач. фак. ХВУ. В 1987 году окончил ХВВКИУ РВ. Область научных интересов – исследование операций.*
НЕСТЕРЕНКО Артем Павлович *– курсант ХВУ.*
КОЖУШКО Ярослав Николаевич *– курсант ХВУ.*