УДК 681.142.36

ГРАФО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД МИНИМИЗАЦИИ ПОЛНОСТЬЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СЖАТЫХ КАРТАХ

Е.Н. Коробкова
(представил д.т.н., проф. В.Я. Жихарев)

Рассмотрены алгоритмы сжатия области определения логических функций, представленных в картах типа Вейча, Карно. Проведен анализ алгоритмов при сжатии области определения по одной, двум и трем переменным, что позволило уменьшить размерность карты соответственно в два, четыре, восемь раз. Алгоритмы доведены до инженерной методики. В качестве иллюстрации рассмотрен пример минимизации функции от пяти переменных в шестнадцати-, восьми- и четырехэлементных картах.

В связи с широким внедрением программируемых логических интегральных схем в практику проектирования и изготовления современных цифровых систем вновь стали актуальными вопросы синтеза цифровых устройств [1].

Основной задачей, решаемой при синтезе, является минимизация логических функций. Вопросу минимизации посвящено огромное количество работ, простейшее перечисление которых представляет собой уже далеко нетривиальную задачу. Поэтому мы ограничимся только лишь замечанием, что все существующие методы минимизации основаны на операции склеивания двух соседних минтермов с последующим выделением простых импликант. Все известные методы можно разделить на аналитические и графические.

Из-за сложности аналитических методов минимизации (при немашинном использовании их) наибольшее распространение в инженерной практике получили графические методы, основанные на представлении логических функций в специальным образом построенных таблицах, получивших название карт Вейча, Карно, позволяющих визуальным осмотром выделить простые импликанты, покрывающие всю область значений функции.

Карта Вейча, Карно или любая другая разновидность ее представляет собой один из табличных способов задания функции и состоит из клеток, каждая из которых соответствует определенной точке области определения логической функции, т.е. карта для представления функции от n переменных состоит из 2^n клеток, специальным образом размещенных на плоскости. Положение каждой точки на плоскости можно задать ее координатой (номером) в двоичной или десятичной форме или минтермом, представляющим собой произведение всех переменных, от которых зависит функция. Каждая переменная входит в произведение только один раз в прямой или инверсной форме, поэтому минтерм довольно удачно согласуется с понятием логической координаты точки в области определения функции. Все существующие разновидности карт отличаются порядком размещения клеток на плоскости, т.е. кодированием их координат. В инженерной практике наибольшее распространение получили карты с соседним кодированием, т.е. такие, в которых двум геометрически соседним клеткам соответствуют соседние координаты, номера которых в двоичном представлении отличаются друг от друга значением только в одном разряде, а в логическом представлении – различным характером вхождения только одной переменной. Правда, следует сразу же отметить, что логически соседние координаты будут геометрически соседними только в картах для числа переменных, не превышающих четырех. При большем числе переменных многие клетки, координаты которых закодированы соседними наборами, не будут соседними геометрически, но это обстоятельство обычно не вызывает особых затруднений в отыскании их, поскольку такие клетки размещены по полю карты с какой-то вполне определенной регулярностью.

Чтобы с помощью карты задать некоторую логическую функцию необходимо в каждую клетку ее записать значение функции, которое она принимает в точках области определения, соответствующих этим клеткам. В случае полностью определенных классических функций это будут 0 или 1, в случае недоопределенных функций кроме констант 0 и 1 будут символы неопределенности (чаще всего это $*$). В наиболее общем случае обобщенных логических функций [2] кроме констант 0, 1 и символа неопределенности могут быть независимые и зависимые параметры, причем в последнем случае в качестве зависимых параметров могут быть любые функции от любого числа переменных [3].

Достоинства карт, обусловивших их широкое использование, состоит:

– в наглядности представления функции во всех точках ее области определения;

– в простоте перехода от описательного алгоритма к табличному и обратно;

– в простоте перехода от табличного алгоритма к аналитическому и обратно;

– в относительной простоте алгоритма минимизации функций, особенно недоопределенных на некоторых наборах.

Первые три достоинства, как правило, ни у кого не вызывают возражений. Что касается последнего, то тут мнения совпадают только для случая минимизации функции от четырех переменных, причем мнения встречаются диаметрально-противоположные: одни утверждают, что целесообразность использования карт ограничена кругом задач с числом переменных, не превышающим четырех, особенно для случая недоопределенных функций. Это обусловлено неспособностью человека представлять большие массивы в таком виде, чтобы только визуальным осмотром находить соседние, на чем собственно и базируются все графические методы. Мнение же оптимистов основано на том, что алгоритм минимизации в картах не зависит от числа переменных (что действительно так), поэтому карты можно применять в принципе для любого числа переменных.

Не примыкая ни к оптимистам, ни к пессимистам, мы предлагаем метод минимизации, основанный на сжатии области определения функции [4], позволяющий минимизировать функции от n переменных в картах для $(n-1)$, $(n-2)$ или $(n-3)$ переменных, причем метод предоставляет возможность выбора не только степени сжатия, но и любых переменных, по которым оно выполняется. Какую степень сжатия и по каким переменным выбрать в каждом конкретном случае решает проектировщик. В связи с этим просматривается еще одно немаловажное достоинство предлагаемого метода, заключающееся в более высокой степени достоверности результата минимизации, полученного по двум вариантам, нежели это имеет место при простом дублировании, как это обычно делается в классических методах.

Различные алгоритмы сжатия области функции рассмотрены в [4]. Мы более подробно остановимся на алгоритме сжатия области определения функций, представленных в карте. Для перехода от табличного представления функции к аналитическому достаточно записать логически то, что мы «видим» в карте (области определения) как логическую сумму произведений координат (минтермов – m_i) всех точек области (клеток карты) на значения функции в этих точках (клетках) – F_i:

$$F(x_n,\ x_{n-1},\ \dots\ x_1) = \bigcup_{i=0}^{2^n-1} m_i F_i\ . \qquad (1)$$

Эта аналитическая запись носит название “*совершенная дизъюнктивная нормальная форма*” (СДНФ). Поскольку для полностью определенных функций $F_i\ \in \{0,1\}$, то при $F_i = 1$ произведение $F_i \cdot m_i$ равно m_i, а при $F_i = 0$ равно 0, следовательно СДНФ может быть представлена в виде логической суммы координат точек (минтермов) области определения, в которых она равна единице. Это определение чаще всего встречается в литературных источниках, многие из которых стали уже классическими, и только редко где упоминается, что это частный случай записи СДНФ полностью определенных функций. Для нас же очень важно именно общее выражение, поскольку любую СДНФ можно представить в виде, когда F_i могут быть не только константы 0 и 1, но и отдельные переменные или функции от этих переменных.

Для доказательства возможности такого представления все переменные, образующие минтермы, разбиваем на две подгруппы с любым сочетанием и числом переменных в одной подгруппе и остальными переменными во второй, но обязательно с одним и тем же вариантом разбиения для всех минтермов, представляя $m_i = k_i' \; k_i''$. При таком разбиении СДНФ будет представлена как

$$F = \bigcup_{i=0}^{2^n-1} k_i' \cdot k_i'' \cdot F_i \; . \qquad (2)$$

Обозначая $k_i''F_i = P_i$, получаем запись СДНФ в виде:

$$F = \bigcup_{i=0}^{2^n-1} k_i' \cdot P_i \; . \qquad (3)$$

В этой записи теперь k_i' мы можем трактовать как координату точки, определяемую переменными, включенными в k_i', а P_i – как значения функции в этой точке. По сути, исходное множество, состоящее из 2^n точек, определяемых всеми переменными, сжимается по переменным, включенным в k_i'', до 2^{n-r} точек (r – число переменных, включенных в сомножитель k''), координаты которых определяются переменными, включенными в этот сомножитель. Значение функции в каждой такой точке равно логической сумме произведений минтермов, образуемых переменными, входящими в сомножитель k'', на значение F_i в исходной точке, частью переменных которой является данный минтерм.

Поскольку для полностью определенных функций $F_i \in \{0,1\}$, то в окончательной записи СДНФ заданной функции будет фигурировать сумма только тех минтермов, которые соответствуют единичным точкам исходной функции.

Отсюда достаточно прозрачно следует алгоритм нахождения координат точек новой области определения и значений функции в них:

– записать логические координаты всех единичных точек заданной функции;

– каждую из этих координат представить в виде двух групп с одинаковым числом и индексами переменных для всех координат;

– одна из двух групп определит координату точки в новой области, вторая – значение функции в этой точке, которое можно трактовать как минтерм, образуемый переменной второй группы;

– сгруппировать точки с одинаковой координатой, включая координату за скобки, а в скобках получим логическую сумму соответствующих минтермов, число которых будет равно числу единичных точек с этой координатой;

– построить карту, размерность которой определяется числом переменных, включенных в сомножитель k_i';

– в каждую ненулевую точку записать соответствующие суммы минтермов.

Предложенный алгоритм сжатия очень прост по сути, но довольно громоздкий и им рекомендуется пользоваться только в случае, если возникает необходимость сжатия по произвольно выбранным переменным. Общее число всех вариантов сжатия, отличающихся по числу переменных и распределению их в подгруппах довольно велико. Для целей минимизации достаточно одного из вариантов, но такого, алгоритм которого проще рассмотренного.

Предлагаются алгоритмы сжатия по одной, двум и трем переменным с младшими или старшими индексами. Рассмотрим суть этих алгоритмов.

Если координату каждой единичной точки представить n-разрядным двоичным числом, то для нахождения номера точки в новой области, определяемого старшими $(n - 1)$ разрядами, и характера зависимости значения функции от значения переменной с младшим индексом выполняется простановка запятой (точки) между значениями старшей группы переменных и значением младшей переменной. Это соответствует делению номера координаты (набора) на два, при этом целая часть дает номер набора в сжатой области, а остаток (дробная часть) – индекс минтерма, определяемой переменной x_1: при нуле – $m_0 = \bar{x}_1$; при единице – $m_1 = x_1$.

При сжатии по двум переменным с младшими индексами достаточно номер координаты разделить на четыре, при этом целая часть дает номер набора, определяемый $(n-2)$ старшими переменными, а дробная (остаток) – индекс минтерма, определяемого переменными x_2x_1: при нуле – $m_0 = \bar{x}_2\bar{x}_1$; при единице – $m_1 = \bar{x}_2x_1$; при двойке – $m_2 = x_2\bar{x}_1$; при тройке – $m_3 = x_2x_1$.

При сжатии по трем переменным с младшими индексами номер координаты делится на восемь, целая часть при этом дает номер набора, определяемый $(n-3)$ старшими переменными, а дробная часть (остаток) – индекс минтерма, определяемого переменными $x_3x_2x_1$:

$$m'_0 = \bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1;\ m'_1 = \bar{x}_3\bar{x}_2x_1;\ m'_2 = \bar{x}_3x_2\bar{x}_1;\ m'_3 = \bar{x}_3x_2x_1;$$

$$m'_4 = x_3\bar{x}_2\bar{x}_1;\ m'_5 = x_3\bar{x}_2x_1;\ m'_6 = x_3x_2\bar{x}_1;\ m'_7 = x_3x_2x_1.$$

Однако в этом случае, в отличие от первых двух вариантов, полученные минтермы предлагается преобразовать, представляя каждый из них в виде произведения x_3 (с отрицанием или без него) и минтерма, образуемого переменными x_2x_1. Тогда будем иметь:

$$m'_0 = \bar{x}_3m_0;\ m'_1 = \bar{x}_3m_1;\ m'_2 = \bar{x}_3m_2;\ m'_3 = \bar{x}_3m_3;$$

$$m'_4 = x_3m_0;\ m'_5 = x_3m_1;\ m'_6 = x_3m_2;\ m'_7 = x_3m_3.$$

При сжатии области определения по переменной со старшим индексом точку в двоичном коде номера координаты необходимо поставить между n-м и $(n-1)$-м разрядами, что равносильно делению этого номера на 2^{n-1}. Целую часть при этом будем трактовать как индекс минтерма, образуемого переменной x_n:

$$m_0 = \bar{x}_n;\ m_1 = x_n,$$

а дробную (остаток) – как координату точки в новой области, определяемую $(n-1)$ переменными с индексами, начиная от x_{n-1} до x_1.

При сжатии области определения по двум переменным со старшими индексами $x_n\, x_{n-1}$ каждый номер делится на 2^{n-2}. Целая часть дает индекс минтерма, определяемый переменными $x_n\, x_{n-1}$:

$$m_0 = \bar{x}_n \bar{x}_{n-1}\,;\ m_1 = \bar{x}_n x_{n-1}\,;\ m_2 = x_n \bar{x}_{n-1}\,;\ m_3 = x_n x_{n-1}\,,$$

а дробная дает координату в новой области, определяемую переменными от x_{n-2} до x_1.

При сжатии по трем переменным со старшими индексами $x_n x_{n-1} x_1$ каждый номер делится на 2^{n-3} . Целая часть дает индекс минтерма, определяемого переменными $x_n x_{n-1} x_{n-2}$:

$$m'_0 = \bar{x}_n \bar{x}_{n-1} \bar{x}_{n-2}\,;\ m'_1 = \bar{x}_n \bar{x}_{n-1} x_{n-2}\,;\ m'_2 = \bar{x}_n x_{n-1} \bar{x}_{n-2}\,;\ m'_3 = \bar{x}_n x_{n-1} x_{n-2}\,;$$
$$m'_4 = x_n \bar{x}_{n-1} \bar{x}_{n-2}\,;\ m'_5 = x_n \bar{x}_{n-1} x_{n-2}\,;\ m'_6 = x_n x_{n-1} \bar{x}_{n-2}\,;\ m'_7 = x_n x_{n-1} x_{n-2}\,.$$

Аналогично, как и в третьем варианте, каждый из полученных минтермов представляем в виде произведения x_n с отрицанием или без него и минтерма, образуемого переменными x_{n-1}, x_{n-2}, т.е.

$$m'_0 = \bar{x}_n m_0\,;\ m'_1 = \bar{x}_n m_1\,;\ m'_2 = \bar{x}_n m_2\,;\ m'_3 = \bar{x}_n m_3\,;$$
$$m'_4 = x_3 m_0\,;\ m'_5 = x_3 m_1\,;\ m'_6 = x_3 m_2\,;\ m'_7 = x_3 m_3\,.$$

Для каждого из шести вариантов строится карта соответствующей размерности. Расставляются переменные, определяющие координаты ее клеток. Записываются соответствующие значения функции в этих клетках, представленные логической суммой минтермов, определяемых переменными, по которым выполняется сжатие. Проводится минимизация в соответствии с алгоритмом минимизации функции с зависимыми параметрами [3, 5], суть которой состоит в покрытии всех минтермов минимально возможным числом простых импликант минимально возможного ранга. Разумеется, что для нахождения минимальной ДНФ достаточно только одного любого из вариантов. Однако, с целью выяснения специфики алгоритма при различных степенях сжатия выполним минимизацию для всех перечисленных вариантов.

Анализ алгоритма минимизации и его особенности проведем на примере минимизации некоторой полностью определенной функции от пяти переменных. Этого количества переменных вполне достаточно для выяснения всех особенностей алгоритма.

Пусть функция равна единице на наборах {1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 18, 20, 23, 25, 27, 30} и нулю на остальных.

Для представления и минимизации этой функции в классическом варианте потребуется 32-элементная карта. Поскольку алгоритм минимизации классическим способом широко известен, мы рассматривать его не будем.

Предметом нашего рассмотрения и анализа будут шесть вышеперечисленных вариантов алгоритма сжатия и минимизации этой функции.

Первый вариант. ***Сжатие по переменной x_1***. Выполнив все пункты предложенного алгоритма, получаем 16-элементную карту (рис. 1), координаты клеток которой определяются переменными $x_5x_4x_3x_2$, а значения функции в клетках минтермами $m_0 = \bar{x}_1$, $m_1 = x_1$ и константами 0 и 1. Единица получается в том случае, если в некоторой точке получаем $F_i = m_0 \vee m_1$, поскольку $m_0 \vee m_1 = \bar{x}_1 \vee x_1 = 1$.

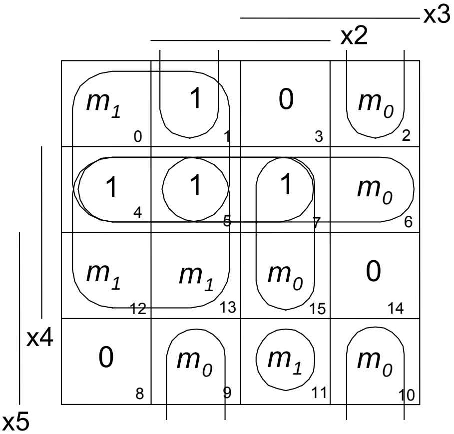

Рис. 1. Карта для первого варианта сжатия

На рис. 1 контурами обведены правильные конфигурации, оптимальным образом покрывающие множество минтермов и единиц.

Записав логическую сумму произведений координат каждого контура на значение функции в нем, получаем минимальную ДНФ заданной функции, выраженную через координаты правильных конфигураций, определяемых переменными $x_5x_4x_3x_2$ и значение функции в них, определяемое значениями переменной x_1 ($m_0 = \bar{x}_1$, $m_1 = x_1$):

$$F = \bar{x}_5\bar{x}_3m_1 \vee x_4\bar{x}_3m_1 \vee \bar{x}_5x_4m_0 \vee \bar{x}_4\bar{x}_3x_2m_0 \vee x_4x_3x_2m_0 \vee x_5\bar{x}_4x_3x_2m_1 \vee \bar{x}_5x_4x_2. \quad (4)$$

Подставляя значения m_0 и m_1, получаем окончательный вид заданной ДНФ:

$$F = \bar{x}_5\bar{x}_3x_1 \vee x_4\bar{x}_3x_1 \vee \bar{x}_5x_4\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4\bar{x}_3x_2\bar{x}_1 \vee x_4x_3x_2\bar{x}_1 \vee x_5\bar{x}_4x_3x_2x_1 \vee \bar{x}_5x_4x_2. \quad (4')$$

Второй вариант. ***Сжатие по переменным x_2, x_1***. Выполняя все пункты предложенного алгоритма сжатия по двум переменным с младшими индексами, получаем восьмиэлементную карту (рис. 2), координаты клеток в которой определяются переменными $x_5x_4x_3$, а значения функции в клетках, полученными минтермами:

$$m_0 = \bar{x}_2\bar{x}_1;\ m_1 = \bar{x}_2x_1;$$

$$m_2 = x_2\bar{x}_1;\ m_3 = x_2x_1$$

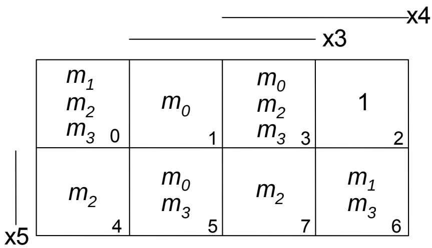

Рис. 2. Карта для второго варианта сжатия

или различными их логическими суммами. При этом, если в логическую сумму входят все четыре минтерма, то такую сумму удобнее представить в виде единицы (вторая клетка карты). Кроме того, во всех картах знак логической суммы опускается.

При выделении правильных конфигураций максимально возможной площади, которым соответствуют импликанты минимально возможного ранга, необходимо учитывать, что логические суммы двух соседних минтермов можно представить одной из переменных с отрицанием или без него, в частности в данном случае:

$$m_0 \vee m_1 = \bar{x}_2;\; m_0 \vee m_2 = \bar{x}_1;\; m_1 \vee m_3 = x_1;\; m_2 \vee m_3 = x_2,$$

поэтому такие суммы в карте покрываются как один символ [3]. Поскольку $m_1 \vee m_3$ и $m_1 \vee m_2$ не упрощаются, то каждый из минтермов, входящих в такие суммы, покрывается раздельно. Кроме того в карте такой размерности нежелательно правильные конфигурации обводить контурами, поскольку рисунок будет сильно усложнен, поэтому рекомендуется записывать номера клеток, образующих правильные конфигурации, и соответствующие им простые импликанты:

$$<4,0> - m_2\bar{x}_4\bar{x}_3;\quad <5,1> - m_0\bar{x}_4x_3;\quad <0,2> - (m_1 \vee m_3)\,\bar{x}_5\bar{x}_3;$$

$$<5> - m_3x_5\bar{x}_4x_3;\ <7,3> - m_2x_4x_3;\ <3,2> - (m_2 \vee m_3)\,\bar{x}_5x_4;$$

$$<6,2> - (m_1 \vee m_3)\,x_4\bar{x}_3;\ <3,2> - (m_0 \vee m_2)\,\bar{x}_5x_4.$$

Объединяя полученные простые импликанты знаком логической суммы, записываем минимальную ДНФ заданной функции:

$$F = \bar{x}_4\bar{x}_3m_2 \vee \bar{x}_4x_3m_0 \vee \bar{x}_5x_3(m_1 \vee m_3) \vee x_5\bar{x}_4x_3m_3 \vee x_4x_3m_2 \vee$$
$$\vee \bar{x}_5x_4(m_0 \vee m_2) \vee \bar{x}_5x_4(m_2 \vee m_3) \vee x_4\bar{x}_3(m_1 \vee m_3). \qquad (5)$$

Третий вариант. ***Сжатие по переменным с младшими индексами:*** $\boldsymbol{x_3x_2x_1}$. Выполняя все пункты рассмотренного выше алгоритма получаем четырехэлементную карту (рис. 3), координаты клеток которой определяются переменными x_5x_4, а значения функции в клетках – логической суммой произведений x_3 с отрицанием или без него и минтермов, образуемых переменными x_2x_1, в полученных их сочетаниях.

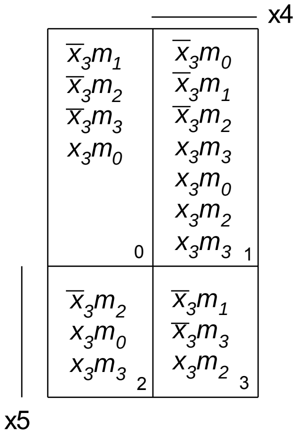

Рис. 3. Карта для третьего варианта сжатия

При выделении правильных конфигураций в клетках карты, в дополнение к вышесказанному, следует отметить, что логическая сумма

$$\bar{x}_3m_i \vee x_3m_i = m_i,$$

поэтому такая сумма должна рассматриваться и покрываться как один символ.

Записываем координаты точек, образующих правильные конфигурации и соответствующие им простые импликанты:

$$<0,1> - \bar{x}_5\bar{x}_3(m_1 \vee m_3);\ <2,0> - \bar{x}_4\bar{x}_3 m_2;\quad <2,0> - \bar{x}_4 x_3 m_0;$$

$$<3,1> - x_4 x_3 m_2;\ <1> - \bar{x}_5 x_4(m_0 \vee m_2);\ <1> - \bar{x}_5 x_4(m_2 \vee m_3);$$

$$<2> - x_5\bar{x}_4 x_3 m_3;\ <3,1> - x_4\bar{x}_3(m_1 \vee m_3).$$

Объединяя полученные импликанты, записываем минимальную ДНФ:

$$F = \bar{x}_5 x_3(m_1 \vee m_3) \vee \bar{x}_4\bar{x}_3 m_2 \vee \bar{x}_4 x_3 m_0 \vee x_5\bar{x}_4 x_3 m_3 \vee x_4 x_3 m_2 \vee \\ \vee \bar{x}_5 x_4(m_0 \vee m_2) \vee \bar{x}_5 x_4(m_2 \vee m_3). \qquad (6)$$

Четвертый вариант. ***Сжатие по переменной x_5***. Выполнив все пункты предложенного алгоритма, получаем 16-элементную карту (рис. 4), координаты клеток которой определяются переменными $x_4x_3x_2x_1$. Значения функции в клетках определяются минтермами $m_0 = \bar{x}_5$, $m_1 = x_5$ и константами 0 и 1 (при этом единица получается как $m_0 \vee m_1$). Выделяем правильные конфигурации, оптимальным образом покрывающие множество минтермов и единиц. Записывая логическую сумму произведений координат каждого контура на значение функции в нем, получаем минимальную ДНФ, выраженную через координаты, образуемые переменными $x_4x_3x_2x_1$ и минтермами ($m_0 = \bar{x}_5$; $m_1 = x_5$):

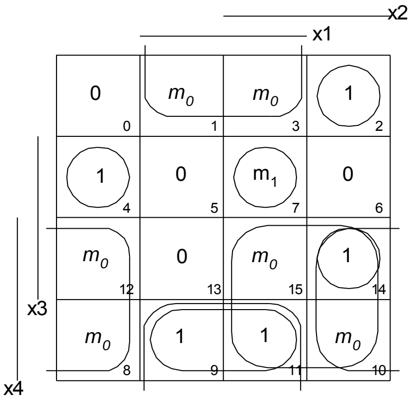

Рис. 4. Карта для четвертого варианта сжатия

$$F(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1) = m_0\bar{x}_3 x_1 \vee \bar{x}_4\bar{x}_3 x_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4 x_3\bar{x}_2\bar{x}_1 \vee m_1\bar{x}_4 x_3 x_2 x_1 \vee \\ \vee x_4\bar{x}_1 m_0 \vee m_0 x_4 x_2 \vee x_4\bar{x}_3 x_1 \vee x_4 x_3 x_2 x_1. \qquad (7)$$

Пятый вариант. ***Сжатие по переменным x_5x_4***. Выполнив все пункты алгоритма, соответствующего этому варианту, получаем восьмиэлементную карту (рис. 5), координаты клеток которой определяются переменными $x_3x_2x_1$, а значение функции в клетках полученными минтермами, образуемыми переменными x_5x_4:

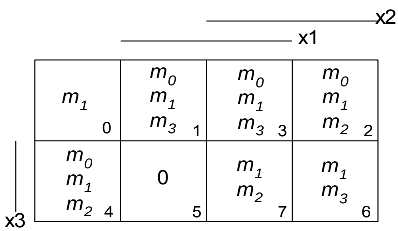

Рис. 5. Карта для пятого варианта сжатия

$$m_0 = \bar{x}_5\bar{x}_4;\ m_1 = \bar{x}_5 x_4;$$

$$m_2 = x_5\bar{x}_4\,;\ m_3 = x_5x_4$$

или их суммами в полученных сочетаниях.

Запишем номера клеток, образующих правильные конфигурации максимальной площади и соответствующие им простые импликанты:

$$<7,3,2,6>\ -\ m_1x_2\,;\quad <7>\ -\ m_2x_3x_2x_1\,; <6> - (m_1 \vee m_3)\,x_3x_2\bar{x}_1\,;$$

$$<2> - (m_0 \vee m_2)\,\bar{x}_3x_2x_1\,;\ <3,1> - (m_1 \vee m_3)\,x_3x_1\,; <1,3> - (m_0 \vee m_1)\,x_3x_1\,;$$

$$<0,2,4,6>\ -\ m_1\bar{x}_1\,; <4> -\ (m_0 \vee m_2)\,x_3\bar{x}_2\bar{x}_1\,.$$

Объединяя полученные простые импликанты знаком логической суммы, записываем минимальную ДНФ заданной функции, выраженную через координаты правильных конфигураций, определяемых переменными x_3, x_2, x_1 и значения функции в них, определяемые минтермами, образуемыми переменными x_5, x_4:

$$\begin{aligned} F = m_1\bar{x}_2\bar{x}_1 \vee m_2x_3x_2x_1 \vee (m_1 \vee m_3)x_3x_2\bar{x}_1 \vee (m_0 \vee m_2)\bar{x}_3x_2\bar{x}_1 \vee \\ \vee (m_1 \vee m_3)\bar{x}_3x_1 \vee (m_0 \vee m_1)\bar{x}_3x_1 \vee m_1\bar{x}_1 \vee (m_0 \vee m_2)x_3\bar{x}_2\bar{x}_1. \end{aligned} \qquad (8)$$

Шестой вариант. *Сжатие по переменным $x_5x_4x_3$.* Выполнив пункты алгоритма, соответствующего этому варианту, получаем четырехэлементную карту (рис. 6), координаты клеток которой определяются переменными x_2x_1, а значение функции в клетках – логической суммой произведений x_5 с отрицанием или без него и минтермов, образуемых переменными x_4x_3 в полученных сочетаниях.

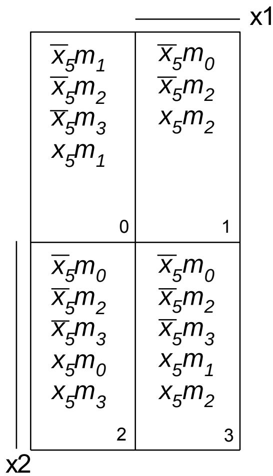

Рис. 6. Карта для шестого варианта сжатия

Запишем номера клеток, образующие правильные конфигурации и соответствующие им простые импликанты, учитывая, что $\bar{x}_5m_i \vee x_5m_i = m_i$:

$$<0> - m_1\bar{x}_2\bar{x}_1\,; <2>\ -\ m_0x_2\bar{x}_1\,;$$

$$<0,2> - (m_2 \vee m_3)\,\bar{x}_1\,;$$

$$<2> -\ m_3x_2\bar{x}_1\,;\ <1,3>\ -\ m_2x_1\,;$$

$$<1,3>\ -\ \bar{x}_5(m_0 \vee m_1)\,x_1\,;$$

$$<3>\ -\ x_5m_1x_2x_1\,;$$

$$<3,2>\ -\ \bar{x}_5(m_2 \vee m3)\,x_2\ .$$

Объединяя полученные простые импликанты знаком логической суммы, записываем минимальную ДНФ заданной функции, выраженную через координаты правильных конфигураций определяемых переменными x_2x_1 и значения функции в них, определяемые логической суммой произведенных переменной x_5 с отрицанием или без него и минтермами, образуемыми переменными $x_4 x_5$:

$$F = m_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee \bar{x}_5 (m_2 \vee m_3) \bar{x}_1 \vee \bar{x}_5 (m_0 \vee m_2) x_1 \vee m_2 x_1 \vee x_5 m_1 x_2 x_1 \vee \\ \vee \bar{x}_5 (m_2 \vee m_3) x_2 \vee m_0 x_3 \bar{x}_1 \vee m_3 x_2 \bar{x}_1. \tag{9}$$

Нетрудно убедиться, что выражения (5 – 9), полученные в каждом варианте при соответствующем представлении минтермов, в каждом из них дадут один и тот же результат, записанный в виде (4′).

Заключение. Предложены алгоритмы сжатия области определения функций, представленных в картах для различных степеней сжатия и различных сочетаний переменных, по которым оно выполняется. Проведен анализ алгоритмов минимизации для шести вариантов. Алгоритмы доведены до инженерной методики. В качестве иллюстрации рассмотрены примеры минимизации функций от пяти переменных в шестнадцати-, восьми- и четырехэлементных картах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соловьев В.В. Проектирование цифровых систем на основе программируемых логических интегральных схем. – М.: Горячая линия – Телеком, 2001. – 636 с.*
2. *Коробков Н.Г., Коробкова Е.Н. Разработка алгоритма минимизации обобщенных логических функций с независимыми параметрами // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 1(17). – С. 13 – 16.*
3. *Коробков Н.Г., Коробкова Е.Н. Разработка алгоритма минимизации обобщенных логических функций с зависимыми параметрами // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ.– 2002. – Вип. 2(18). – С. 225 – 230.*
4. *Коробкова Е.Н., Рубанов В.Г. Разработка алгоритмов сжатия области логических функций // Труды Современного Гуманитарного Университета. Белгородский филиал. – Белгород, 2000. – Вып. 18. – С. 105 – 112.*
5. *Коробкова Е.Н., Рубанов В.Г. Графо-аналитический метод нахождения минимальных дизъюнктивных нормальных форм обобщенных логических функций // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 3(19). – С. 46 – 53.*

Поступила 13.11.2002

***КОРОБКОВА Елена Николаевна**, старший преподаватель Белгородской ГАСМ. В 1990 году окончила ХАИ. Область научных интересов – проектирование цифровых систем и средств обработки информации.*