УДК 681.513.6:691.332.2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЗАИМОЗАМЕНЯЕМОСТИ РЕСУРСОВ СЛОЖНОЙ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ

к.т.н. В.Ю. Дубницкий, д.т.н., проф. В.Л. Чернявский

Для описания изменения во времени состояния сложной физико-химической системы при ее взаимодействии с внешней средой использована производственная функция специального вида. Определены частные и взаимные эластичности аргументов, позволяющие осуществлять управление процессом эксплуатации за счет их взаимозаменяемости.

Постановка проблемы. При взаимодействии сложной физико-химической системы (СФХС) с внешней средой (ВС) в ее структуре происходят изменения, вызывающие как понижение, так и повышение способности СФХС нормально функционировать при взаимодействии с ВС. В первом случае считают, что СФХС разрушается при взаимодействии с ВС, во втором – адаптируется к внешним воздействиям.

При исследовании взаимодействия СФХС и ВС возникают две задачи. Первая – *создание способа оценки текущего состояния системы*, вторая – *создание способа прогнозирования времени*, в течение которого система сохранит свои потребительские свойства, то есть задача прогнозирования состояния СФХС.

Анализ литературы. В работах [1, 2] эти задачи решены следующим образом. Состояние сложной физико-химической системы (величину S_t) определяют в виде

$$S_t = \prod_{i=1}^{n} \frac{\left|x_{it} - x_{ik}\right|}{x_{ik}}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{1}$$

В этом выражении принято, что x_{it} – значение i-й характеристики системы во время t; x_{ik} – значение i-й характеристики, соответствующей ее предельно допустимой величине.

Прогнозируемое время $T_п$ дальнейшей нормальной эксплуатации СФХС определяют по уравнению

$$T_п = \frac{T_э \cdot S_t}{S_0 - S_t}, \tag{2}$$

где S_t – оценка текущего состояния системы определенная по формуле (1), S_0 – оценка состояния СФХС, принимаемая в качестве начальной, $T_э$ – длительность фактического взаимодействия СФХС и ВС в прошлом.

Разделив в (2) числитель и знаменатель на величину S_0 получим, что

$$T_п = T_э \cdot \frac{\eta_t}{1-\eta_t}, \tag{3}$$

где

$$\eta_t = S_t/S_0. \tag{4}$$

Из физического смысла задачи следует неравенство $\eta_t < 1$.

Из (1) следует, что управляя изменением величин x_{it}, x_{ik} $(i=\overline{1,n})$, можно изменять величину состояния S_t и прогнозируемое время $T_п$ нормальной работы системы во внешней среде.

Цель работы: исследование влияния изменения параметров состояния СФХС – величин x_{it}, x_{ik} $(i=\overline{1,n})$ на величину оценки состояния S_t и прогнозируемое время $T_п$.

Решение поставленной задачи.

Рассмотрим функцию

$$\frac{dT_п}{d\eta_t} = T_э \cdot \frac{1}{(1-\eta_t)^2}. \tag{5}$$

Учитывая замечание к выражению (4) следует, что выражение (5) положительно при любых $\eta_t \in [0;1)$. Следовательно, с увеличением относительного состояния η_t возрастает прогнозируемое время $T_п$.

Для оценки влияния увеличения η_t на величину $T_п$ используем понятие эластичности функции $y = f(x)$ по аргументу x.

В работах [3, 4] отмечено, что эластичность $E_x(y)$ функции $y = f(x)$ по аргументу x находят из выражения

$$E_x(y) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}. \tag{6}$$

Величина $E_x(y)$ показывает, на сколько процентов изменится функция $y = f(x)$ при увеличении аргумента x на один процент.

В нашем случае, используя условие (5), получим, что

$$E_x(T_п) = \frac{dT_п}{d\eta_t} \cdot \frac{\eta_t}{T_п} = \frac{1}{1-\eta_t}. \tag{7}$$

Учитывая (4), получим, что с увеличением величины η_t на один процент прогнозируемое время $T_п$ возрастает на величину бóльшую, чем один процент.

Представим величину S_t в виде:

$$S_t = \prod_{i=1}^{m} \frac{x_{it} - x_{ik}}{x_{ik}} \cdot \prod_{i=m+1}^{n} \frac{x_{ik} - x_{it}}{x_{ik}}. \qquad (8)$$

Условие $i = \overline{1,m}$ соответствует переменным, описывающим состояние по совокупности тех переменных, для которых $x_{it} > x_{ik}$, условие $i = \overline{m+1,n}$ соответствует той совокупности переменных, для которых $x_{ik} > x_{it}$. Такая запись позволяет сделать функцию (1) гладкой и учесть конкретные физические особенности СФХС.

В условие (8) фактически входят две существенно отличные величины: x_{ik} – конечное значение i-й переменной, определяемое документами, регламентирующими нормальную эксплуатацию СФХС, и величина x_{it}, соответствующая объективно измеренной переменной x_i.

Пусть

$$B = \left(\prod_{i=1}^{n} x_{ik} \right)^{-1}. \qquad (9)$$

Тогда

$$S_t = B \prod_{i=1}^{m} (x_{it} - x_{ik}) \cdot \prod_{i=m+1}^{n} (x_{ik} - x_{it}). \qquad (10)$$

Рассматривая (10) как производственную функцию специального вида [3, 4], определим ее основные свойства: эластичности $E_{xi}(\eta_t)$ и предельные нормы замены $\chi_{ij}(S_t)$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, $i < j$.

Эластичность η_t по переменной x_i показывает, на сколько изменится η_t при изменении x_i на один процент при постоянном значении остальных переменных.

Тогда

$$E_{x_i}(\eta_t) = \frac{\partial \eta_t}{\partial x_{it}} \cdot \frac{x_i}{\eta_t} = \begin{cases} \dfrac{x_{it}}{x_{it} - x_{ik}}, & \text{если } i \in [1,2,\ldots,m]; \\ -\dfrac{x_{it}}{x_{it} - x_{ik}}, & \text{если } i \in [m+1,\ldots,n]. \end{cases} \qquad (11)$$

Предельная норма замены $\chi_{ij}(S_t)$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, $i \neq j$ показывает, на сколько (приближенно) нужно увеличить значение переменной x_j, чтобы компенсировать на один процент переменной x_i при условии, что остальные переменные неизменны:

$$\chi_{ij}(S_t)=\frac{\partial S_t}{\partial x_i}\bigg/\frac{\partial S_t}{\partial x_j},\quad i=\overline{1,n},\ \ j=\overline{1,n},\ \ i\neq j. \tag{12}$$

В нашем случае

$$\chi_{ij}(S_t)=\frac{x_{jt}-x_{ik}}{x_{it}-x_{ik}}, \tag{13}$$

если i, j $\in$ [1, 2 … m].

Аналогично условию (13) можно определить предельные нормы замены и для других вариантов, следующих из условия (11).

В качестве иллюстрации рассмотрим содержательно важный случай системы, описанной в [1, 2].

Пусть x_1 – величина водопоглощения бетона, %; x_2 – показатель концентрации водородных ионов; x_3 – прочность бетона.

Тогда оценка состояния

$$S_t=\frac{x_{1k}-x_{1t}}{x_{1k}}\cdot\frac{x_{2t}-x_{2k}}{x_{2k}}\cdot\frac{x_{3t}-x_{3k}}{x_{3k}}.$$

Результаты определения взаимных эластичностей (предельных норм замены), определенные по условию (12), приведены в табл. 1.

Таблица 1

Взаимные эластичности (предельные нормы замены) $\chi_{ij}(S_t)$

i \ j	x_1	x_2	x_3
x_1	–	$\frac{x_{2k}-x_{2t}}{x_{1k}-x_{1t}}$	$\frac{x_{3t}-x_{3k}}{x_{1k}-x_{1t}}$
x_2	$\frac{x_{1k}-x_{1t}}{x_{2k}-x_{2t}}$	–	$\frac{x_{3t}-x_{3k}}{x_{2t}-x_{2k}}$
x_3	$\frac{x_{1k}-x_{1t}}{x_{3t}-x_{3k}}$	$\frac{x_{2t}-x_{2k}}{x_{3t}-x_{3k}}$	–

Полученные результаты могут быть использованы как для процесса управления эксплуатацией системы, так и для определения начальных значений x_i, обеспечивающих требуемую долговечность и т.д.

Выводы.

1. Получено описание уравнения оценки состояния сложной физико-химической системы.

2. Введено понятие об уравнении состояния сложной физико-химической системы как о производственной функции специального вида.

3. Определены частные эластичности функции состояния сложной физико-химической системы и взаимные эластичности по переменным, описывающим это состояние.

4. Для частного случая (n = 3), характерного для такой сложной физико-химической системы как бетон, получены оценки частной и взаимной эластичностей, позволяющие обоснованно управлять процессом ее эксплуатации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубницкий В.Ю., Чернявский В.Л. Прогнозирование стойкости бетона при сложных агрессивных воздействиях на основе оценки величины коррозионного состояния // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1990. – № 1. – С.122 – 125.*
2. *Чернявский В.Л. Адаптация бетона. – Днепропетровск: Нова ідеологія, 2002. – 116 с.*
3. *Плис А.И., Сливина Н.А. MATHCAD: математический практикум для экономистов и инженеров. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 424 с.*
4. *Клейнер Г.Б. Производственные функции. Теория, методы, применение. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 238 с.*

Поступила 16.04.2003

ДУБНИЦКИЙ Валерий Юрьевич*, кандидат технических наук, доцент Харьковского филиала Украинской академии банковского дела. В 1975 году окончил Харьковский институт радиоэлектроники. Область научных интересов – исследование операций.*

ЧЕРНЯВСКИЙ Вячеслав Леонидович*, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой физико-химической механики и технологии строительных материалов и изделий Харьковского государственного технического университета строительства и архитектуры. Область научных интересов – адаптация абиотических систем.*