

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ОДНОРОДНЫХ СРЕДСТВ РЕЗЕРВА ПРИ НЕИЗВЕСТНОМ ВРЕ- МЕНИ ОКОНЧАНИЯ КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ И НЕПОЛНОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СРЕДСТВ РЕЗЕРВА

к.т.н. В.Б. Кононов

(представил д.т.н., проф. Б.Ф. Самойленко)

В статье рассматривается методика решения задачи оптимального управления распределением однородных сил и средств резерва конфликтующей стороны при неизвестном времени окончания конфликтной ситуации и неполном использовании средств резерва.

Постановка задачи. При планировании распределения однородных средств резерва в ходе конфликтных ситуаций, как правило, не известно время окончания конфликтной ситуации, которое зависит от поставленных целей, складывающейся обстановки и вероятных действий противника.

Планирование и последующее управление распределением однородных сил и средств резерва при неизвестном времени окончания конфликта в условиях современного боя представляет собой важную военно-научную задачу, актуальность которой определяется необходимостью создания в Вооруженных Силах Украины автоматизированной системы управления войсками и оружием.

Анализ литературы. Задачи управления распределением сил и средств оперирующей стороны рассматривались в работах [1 – 3]. В [1] вводится мера оценки эффективности действий сторон в конфликтной ситуации. В [2] рассмотрен метод решения системы дифференциальных уравнений, описывающих процесс управления распределением сил и средств оперирующих сторон в ходе конфликтной ситуации для случая однородных сил и средств. В [3] излагается метод решения задачи оптимального управления распределением средств резерва конфликтующих сторон, исходя из условия максимального поражения оперирующих средств противоборствующей стороны. Однако в этих работах не рассматривалось возможности управления распределением однородных боевых средств резерва при неизвестном времени окончания боя и неполном использовании средств резерва.

Цель статьи. Целью статьи является разработка методики решения задач оптимального управления распределением однородных сил и

средств резерва при неизвестном времени окончания конфликтной ситуации и неполном использовании средств резерва.

Основной материал. Рассмотрим конфликтную ситуацию между стороной В и стороной А, описываемую системой дифференциальных уравнений [2]:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -by(t) + u(t); \\ \frac{dy(t)}{dt} = -ax(t) + v(t); \\ x(0) = x_0; y(0) = y_0, \end{cases} \quad (1)$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – математические ожидания количества боевых средств стороны А и В, сохранившихся к моменту времени t ; $a = \alpha P$ и $b = \beta Q$ – эффективные скорострельности группировок А и В; α и β – средние скорострельности (количество выстрелов в единицу времени) сторон А и В; P и Q – вероятности поражения одним выстрелом боевых средств сторон А и В; $u(t)$ – интенсивность поступления средств резерва стороны А; $v(t)$ – интенсивность поступления средств резерва стороны В; T – заданное время боя.

Предположим, что темп поступления резерва сил и средств группировки В постоянен и равен v_0 , т.е. $v(t) \equiv v_0$. Это означает, что группировка В использует резерв с максимальной интенсивностью и не в состоянии израсходовать его за время боя.

Рассмотрим случай, когда средства резерва группировки А также полностью не используются в ходе боя, т.е. $u_0 T^* \leq A_0$, где A_0 – общее количество средств группировки А; T^* – искомое время окончания боя.

Для интервала времени $t \in [0, T^*]$ имеем [2]:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{a\sqrt{b}} \left(p \cdot \operatorname{ch} \sqrt{abt} - q \cdot \operatorname{sh} \sqrt{abt} + v_0 \sqrt{b} \right); \\ y(t) &= \frac{1}{b\sqrt{a}} \left(q \cdot \operatorname{ch} \sqrt{abt} - p \cdot \operatorname{sh} \sqrt{abt} + u_0 \sqrt{a} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где $p = \sqrt{b}(ax_0 - v_0)$, $q = \sqrt{a}(by_0 - u_0)$.

Выясним характер изменения сил противоборствующих сторон в ходе боя. С этой целью вычислим производные от функции $x(t)$, $y(t)$:

$$x'(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}(p \cdot \text{sh}\sqrt{abt} - q \cdot \text{ch}\sqrt{abt}); \quad y'(t) = \frac{1}{\sqrt{b}}(q \cdot \text{sh}\sqrt{abt} - p \cdot \text{ch}\sqrt{abt}). \quad (3)$$

Исследуем различные варианты соотношения сил двух группировок. Вначале предположим, что справедливо следующее условие:

$$p > q \geq 0. \quad (4)$$

В этом случае очевидно, что $q/p < 1$, и при $q > 0$ имеем:

$$x'(t) < 0, \quad t \in [0, T_A]; \quad x'(t) \geq 0, \quad t \in [T_A, T^*], \quad (5)$$

где $T_A = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{p+q}{p-q}$ – определим из решения уравнения $x'(t) = 0$. Величина $x'(t)$ при этом равна

$$x(T_A) = \frac{1}{a\sqrt{b}} \left(\sqrt{p^2 - q^2} + v_0 \sqrt{b} \right) > 0 \quad (6)$$

и представляет собой минимальное количество сил и средств группировки А в ходе боя.

Если $q = 0$, то $x'(t) > 0$, $t \in [0, T^*]$.

Для группировки В $y'(t) < 0$, при $q > 0$, т.к. $\frac{p}{q} > 1$.

В случае, если $q = 0$, то $y'(t) = -\frac{p}{q} \text{ch}\sqrt{abt} < 0$. (7)

Таким образом, силы группировки В постоянно убывают.

Определим момент окончания боя на истощение сил группировки В

$$y(T_B^*) = \frac{1}{b\sqrt{a}}(q \cdot \text{ch}\sqrt{ab}T_B^* - p \cdot \text{sh}\sqrt{ab}T_B^* + u_0 \sqrt{a}) = 0. \quad (8)$$

После преобразований получим

$$T_B^* = \frac{1}{\sqrt{ab}} \ln \frac{u_0 \sqrt{a} + \sqrt{au_0^2 + p^2 - q^2}}{p - q}, \quad (9)$$

при этом, количество оставшихся средств стороны А равно $x(T_B^*)$.

Таким образом, при выполнении условия $u_0 T^* \leq A_0$, и неравенства $q > 0$ группировка А вначале теряет свои силы и средства, несмотря на поступления средств резерва вплоть, до момента времени T_A , затем наращивает количество своих сил вплоть до момента окончания боя T_B^* .

Если $q = 0$, то группировка А постоянно наращивает свои силы.

Далее рассмотрим вариант, когда справедливо условие

$$0 \geq p > q. \quad (10)$$

Пусть $p < 0$, тогда $\frac{q}{p} > 1$ и $x'(t) > 0$, $t \in [0, T_B^*]$, в то время как

$$y'(t) > 0, t \in [0, T_B^*]; y'(t) \leq 0, t \in [T_B, T_B^*], \quad (11)$$

где $T_B = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{p+q}{q-p}$ – определяется из решения уравнения $y'(t) = 0$.

$$\text{Если } p = 0, \text{ то } x'(t) = -\frac{q}{\sqrt{a}} \operatorname{ch} \sqrt{abt} > 0; y'(t) = \frac{q}{\sqrt{b}} \operatorname{sh} \sqrt{abt} < 0. \quad (12)$$

Момент окончания боя на истощение группировки В определяется аналогично рассмотренному случаю по формуле (9). Таким образом, группировка А в любой момент боя наращивает свои силы, в то время как прирост сил и средств группировки В продолжается лишь до момента T_B , после чего группировка В только теряет свои силы при $p < 0$. При $p = 0$ группировка В терпит только потери.

Для третьего варианта соотношения сил и сторон

$$p > 0, q \leq 0 \text{ или } p \geq 0, q > 0, \quad (13)$$

нетрудно видеть, что $x'(t) > 0$, $y'(t) < 0$, $t \in [0, T_B^*]$.

Окончание боя на истощение определяется формулой (9). Группировка А постоянно наращивает свои силы, группировка В – постоянно несет потери вплоть до полного уничтожения.

Анализ формулы (9) показывает, что при рассмотрении первых трех случаев величина T_B^* убывает:

$$T_B^*(p > q > 0) > T_B^*(0 > p > q) > T_B^*(p > 0, q > 0). \quad (14)$$

Приведем аналогичные соотношения для оставшихся вариантов соотношений сил сторон.

$$\text{В четвертом варианте } q > p \geq 0. \quad (15)$$

Пусть $p > 0$, тогда

$$x'(t) < 0, t \in [0, T_A^*]; y'(t) < 0, t \in [0, T_B]; y'(t) \geq 0, t \in [T_B, T_A^*], \quad (16)$$

где $T_B = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{q+p}{q-p}$ – определяется из решения уравнения $y'(t) = 0$.

$$\text{Если } p=0, \text{ то } y'(t)>0, t \in [0, T_A^*]. \quad (17)$$

Момент окончания боя на истощение группировки А находится из уравнений:

$$x(T_A^*) = \frac{1}{a\sqrt{b}} (p \cdot \operatorname{ch} \sqrt{ab} T_A^* - q \cdot \operatorname{sh} \sqrt{ab} T_A^* + v_0 \sqrt{b}) = 0; \quad (18)$$

$$(q-p) e^{2\sqrt{ab} T_A^*} - 2v_0 \sqrt{b} e^{\sqrt{ab} T_A^*} - (q+p) = 0;$$

$$T_A^* = \frac{1}{\sqrt{ab}} \ln \frac{v_0 \sqrt{b} + \sqrt{bv_0^2 + q^2 - p^2}}{q-p}.$$

$$\text{В пятом варианте соотношения сил сторон } 0 \geq q > p. \quad (19)$$

Пусть $q < 0$, тогда

$$y'(t) > 0, t \in [0, T_A^*]; x'(t) > 0, t \in [0, T_A]; x'(t) \leq 0, t \in [T_A, T_A^*], \quad (20)$$

где $T_A = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{p+q}{p-q}$ – определяется из решения уравнения $x'(t) = 0$.

$$\text{Если } q = 0, \text{ то } y'(t) > 0, x'(t) < 0. \quad (21)$$

В шестом варианте соотношения сил сторон

$$q > 0, p \leq 0 \text{ или } q \geq 0, p < 0, \quad (22)$$

при этом

$$y'(t) > 0, x'(t) < 0, t \in [0, T_A^*]. \quad (23)$$

$$\text{В седьмом варианте соотношения сил сторон } p = q. \quad (24)$$

Очевидно, что $x'(t) = 0; y'(t) = 0$, $t \in [0, T^*]$, если $p = q = 0$;

$$x'(t) < 0; y'(t) < 0, t \in [0, T^*], \text{ если } p = q > 0; \quad (25)$$

$$x'(t) > 0; y'(t) > 0, t \in [0, T^*], \text{ если } p = q < 0.$$

Если $p = q = 0$, то силы и средства обеих группировок А и В в ходе боя остаются неизменными, пока выполняются соотношения $u_0 T^* \leq A_0$, так как согласно соотношениям (2) имеем

$$x(t) = \frac{v_0}{a} = x_0, y(t) = \frac{u_0}{b} = y_0. \quad (26)$$

Если $p = q > 0$, то силы и средства обеих группировок А и В уничтожаются в соответствии с экспоненциальным законом следующим образом:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{a\sqrt{b}} (pch\sqrt{ab}t - psh\sqrt{ab}t + v_0\sqrt{b}) = \frac{1}{a\sqrt{b}} (pe^{-\sqrt{ab}t} + v_0\sqrt{b}) ; \\ y(t) = \frac{1}{b\sqrt{a}} (pch\sqrt{ab}t - psh\sqrt{ab}t + u_0\sqrt{a}) = \frac{1}{b\sqrt{a}} (pe^{-\sqrt{ab}t} + u_0\sqrt{a}) . \end{cases} \quad (27)$$

Так как

$$x(t) > \frac{v_0}{a}; \quad y(t) > \frac{u_0}{b}, \quad (28)$$

то количества сил и средств обеих группировок А и В в ходе боя ограничены снизу значениями соответственно v_0/a и u_0/b , если соотношения $u_0 T^* \leq A_0$ выполняются.

Если $p = q < 0$, то силы и средства обеих группировок А и В наращиваются по закону (27), приближаясь к значениям соответственно v_0/a и u_0/b .

Выводы. Рассмотренные варианты решения задач при условиях (4), (10), (13), (15), (19), (22), (24) дают возможность проанализировать характер и получить законы оптимального управления распределением однородных сил и средств резерва конфликтующей стороны для конфликтной ситуации двух группировок при неизвестном времени окончания конфликтной ситуации и неполном использовании средств резерва, а также могут быть положены в основу разработки алгоритма оптимального управления распределением средств резерва.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кононов В.Б., Кушнерук Ю.И., Евстрат Д.И. Площадная интерпретация модели конфликтной ситуации // Системы обработки информации – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2001. – Вып. 5 (15). – С. 39 – 41.
2. Кононов В.Б., Кушнерук Ю.И., Евстрат Д.И. Распределение однородных средств резерва в ходе встречной конфликтной ситуации двух группировок // Системы обработки информации – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вып. 4 (20). – С. 96 – 101.
3. Кононов В.Б., Рафальский Ю.И., Гурин А.П. Оптимальное управление распределением средств резерва // Системы обработки информации – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вып. 5(21). – С. 45 – 47.
4. Давыдов Э.Г. Исследование операций. – М.: Высшая школа, 1990. – 459 с.

Поступила 28.04.2003

КОНОНОВ Владимир Борисович, канд. техн. наук, доцент, зам. нач. факультета
ХВУ. В 1987 году окончил ХВВКИУ РВ. Область научных интересов – исследование операций.
