УДК 623. 021: 005

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ОДНОРОДНЫХ СРЕДСТВ РЕЗЕРВА ПРИ НЕИЗВЕСТНОМ ВРЕМЕНИ ОКОНЧАНИЯ КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ И НЕПОЛНОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СРЕДСТВ РЕЗЕРВА

к.т.н. В.Б. Кононов
(представил д.т.н., проф. Б.Ф. Самойленко)

В статье рассматривается методика решения задачи оптимального управления распределением однородных сил и средств резерва конфликтующей стороны при неизвестном времени окончания конфликтной ситуации и неполном использовании средств резерва.

Постановка задачи. При планировании распределения однородных средств резерва в ходе конфликтных ситуаций, как правило, не известно время окончания конфликтной ситуации, которое зависит от поставленных целей, складывающейся обстановки и вероятных действий противника.

Планирование и последующее управление распределением однородных сил и средств резерва при неизвестном времени окончания конфликта в условиях современного боя представляет собой важную военно-научную задачу, актуальность которой определяется необходимостью создания в Вооруженных Силах Украины автоматизированной системы управления войсками и оружием.

Анализ литературы. Задачи управления распределением сил и средств оперирующей стороны рассматривались в работах [1 – 3]. В [1] вводится мера оценки эффективности действий сторон в конфликтной ситуации. В [2] рассмотрен метод решения системы дифференциальных уравнений, описывающих процесс управления распределением сил и средств оперирующих сторон в ходе конфликтной ситуации для случая однородных сил и средств. В [3] излагается метод решения задачи оптимального управления распределением средств резерва конфликтующих сторон, исходя из условия максимального поражения оперирующих средств противоборствующей стороны. Однако в этих работах не рассматривалось возможности управления распределением однородных боевых средств резерва при неизвестном времени окончания боя и неполном использовании средств резерва.

Цель статьи. Целью статью является разработка методики решения задач оптимального управления распределением однородных сил и средств резерва при неизвестном времени окончания конфликтной ситуации и неполном использовании средств резерва.

Основной материал. Рассмотрим конфликтную ситуацию между стороной B и стороной A, описываемую системой дифференциальных уравнений [2]:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = -by(t) + u(t); \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -ax(t) + v(t); \end{cases} \tag{1}$$
$$x(0) = x_0; \ y(0) = y_0,$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – математические ожидания количества боевых средств сторон A и B, сохранившихся к моменту времени t; $a = \alpha P$ и $b = \beta Q$ – эффективные скорострельности группировок A и B; α и β – средние скорострельности (количество выстрелов в единицу времени) сторон A и B; P и Q – вероятности поражения одним выстрелом боевых средств сторон A и B; $u(t)$ – интенсивность поступления средств резерва стороны A; $v(t)$ – интенсивность поступления средств резерва стороны B; T – заданное время боя.

Предположим, что темп поступления резерва сил и средств группировки B постоянен и равен v_0, т.е. $v(t) \equiv v_0$. Это означает, что группировка B использует резерв с максимальной интенсивностью и не в состоянии израсходовать его за время боя.

Рассмотрим случай, когда средства резерва группировки A также полностью не используются в ходе боя, т.е. $u_0 T^* \le A_0$, где A_0 – общее количество средств группировки A; T^* – искомое время окончания боя.

Для интервала времени $t \in [0, \ T^*]$ имеем [2]:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{a\sqrt{b}}\left(p \cdot \mathrm{ch}\sqrt{ab}\,t - q \cdot \mathrm{sh}\sqrt{ab}\,t + v_0\sqrt{b}\right); \\ y(t) &= \frac{1}{b\sqrt{a}}\left(q \cdot \mathrm{ch}\sqrt{ab}\,t - p \cdot \mathrm{sh}\sqrt{ab}\,t + u_0\sqrt{a}\right), \end{aligned} \tag{2}$$

где $p = \sqrt{b}\left(ax_0 - v_0\right), q = \sqrt{a}\left(by_0 - u_0\right)$.

Выясним характер изменения сил противоборствующих сторон в ходе боя. С этой целью вычислим производные от функции $x(t)$, $y(t)$:

$$x'(t)=\frac{1}{\sqrt{a}}\left(p\cdot \mathrm{sh}\sqrt{ab}\,t-q\cdot \mathrm{ch}\sqrt{ab}\,t\right);\ y'(t)=\frac{1}{\sqrt{b}}\left(q\cdot \mathrm{sh}\sqrt{ab}\,t-p\cdot \mathrm{ch}\sqrt{ab}\,t\right). \quad (3)$$

Исследуем различные варианты соотношения сил двух группировок. Вначале предположим, что справедливо следующее условие:

$$p>q\ge 0. \quad (4)$$

В этом случае очевидно, что $q/p<1$, и при $q>0$ имеем:

$$x'(t)\langle\, 0,\ t\in[0,\ T_A];\ x'(t)\ge 0,\ t\in[T_A,\ T^*], \quad (5)$$

где $T_A=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{p+q}{p-q}$ – определим из решения уравнения $x'(t)=0$. Величина $x'(t)$ при этом равна

$$x(T_A)=\frac{1}{a\sqrt{b}}\left(\sqrt{p^2-q^2}+v_0\sqrt{b}\right)>0 \quad (6)$$

и представляет собой минимальное количество сил и средств группировки A в ходе боя.

Если $q=0$, то $x'(t)\rangle\ 0,\ t\in[0,\ T^*]$.

Для группировки B $y'(t)<0$, при $q>0$, т.к. $\frac{p}{q}>1$.

В случае, если $q=0$, то $y'(t)=-\frac{p}{q}\mathrm{ch}\sqrt{ab}\,t<0. \quad (7)$

Таким образом, силы группировки B постоянно убывают.

Определим момент окончания боя на истощение сил группировки B

$$y(T_B^*)=\frac{1}{b\sqrt{a}}\left(q\cdot \mathrm{ch}\sqrt{ab}\,T_B^*-p\cdot \mathrm{sh}\sqrt{ab}\,T_B^*+u_0\sqrt{a}\right)=0. \quad (8)$$

После преобразований получим

$$T_B^*=\frac{1}{\sqrt{ab}}\ln\frac{u_0\sqrt{a}+\sqrt{au_0^2+p^2-q^2}}{p-q}, \quad (9)$$

при этом, количество оставшихся средств стороны A равно $x(T_B^*)$.

Таким образом, при выполнении условия $u_0T^*\le A_0$, и неравенства $q>0$ группировка A вначале теряет свои силы и средства, несмотря на поступления средств резерва вплоть, до момента времени T_A, затем наращивает количество своих сил вплоть до момента окончания боя T_B^*.

Если $q = 0$, то группировка A постоянно наращивает свои силы.

Далее рассмотрим вариант, когда справедливо условие

$$0 \geq p > q\,. \tag{10}$$

Пусть $p < 0$, тогда $\dfrac{q}{p} > 1$ и $x'(t) > 0,\ t \in \left[0,\ T_B^*\right]$, в то время как

$$y'(t) > 0,\ t \in \left[0,\ T_B^*\right]\ ;\ y'(t) \leq 0,\ t \in \left[T_B,\ T_B^*\right], \tag{11}$$

где $T_B = \dfrac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \dfrac{p+q}{q-p}$ – определяется из решения уравнения $y'(t) = 0$.

$$\text{Если } p = 0\text{, то } x'(t) = -\frac{q}{\sqrt{a}} \operatorname{ch}\sqrt{ab}\,t > 0;\ y'(t) = \frac{q}{\sqrt{b}} \operatorname{sh}\sqrt{ab}\,t < 0\,. \tag{12}$$

Момент окончания боя на истощение группировки B определяется аналогично рассмотренному случаю по формуле (9). Таким образом, группировка A в любой момент боя наращивает свои силы, в то время как прирост сил и средств группировки B продолжается лишь до момента T_B, после чего группировка B только теряет свои силы при $p < 0$. При $p = 0$ группировка B терпит только потери.

Для третьего варианта соотношения сил и сторон

$$p > 0,\ q \leq 0 \text{ или } p \geq 0,\ q > 0, \tag{13}$$

нетрудно видеть, что $x'(t) > 0,\ y'(t) < 0,\ t \in \left[0,\ T_B^*\right]$.

Окончание боя на истощение определяется формулой (9). Группировка A постоянно наращивает свои силы, группировка B – постоянно несет потери вплоть до полного уничтожения.

Анализ формулы (9) показывает, что при рассмотрении первых трех случаев величина T_B^* убывает:

$$T_B^*(p > q > 0) \rangle\ T_B^*\ (0 > p > q)\ >\ T_B^*\ \rangle\ (p > 0,\ q > 0). \tag{14}$$

Приведем аналогичные соотношения для оставшихся вариантов соотношений сил сторон.

В четвертом варианте $q > p \geq 0$. (15)

Пусть $p > 0$, тогда

$$x'(t) < 0,\ t \in \left[0,\ T_A^*\right]\ ;\ y'(t) < 0,\ t \in \left[0,\ T_B\right]\ ;\ y'(t) \geq 0,\ t \in \left[T_B,\ T_A^*\right], \tag{16}$$

где $T_B = \dfrac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \dfrac{q+p}{q-p}$ – определяется из решения уравнения $y'(t) = 0$.

Если $p=0$, то $y'(t)>0,\ t\in\left[0,\ T_A^*\right]$. (17)

Момент окончания боя на истощение группировки A находится из уравнений:

$$x\left(T_A^*\right)=\frac{1}{a\sqrt{b}}\left(p\cdot ch\sqrt{ab}T_A^* - q\cdot sh\sqrt{ab}T_A^* + v_0\sqrt{b}\right)=0;$$
$$(q-p)e^{2\sqrt{ab}T_A^*}-2v_0\sqrt{b}e^{\sqrt{ab}T_A^*}-(q+p)=0; \quad (18)$$

$$T_A^*=\frac{1}{\sqrt{ab}}\ln\frac{v_0\sqrt{b}+\sqrt{bv_0^2+q^2-p^2}}{q-p}.$$

В пятом варианте соотношения сил сторон $0\ge q>p$. (19)

Пусть $q<0$, тогда

$$y'(t)>0,\ t\in\left[0,\ T_A^*\right];\ x'(t)>0,\ t\in\left[0,\ T_A\right];\ x'(t)\le 0,\ t\in\left[T_A,\ T_A^*\right], \quad (20)$$

где $T_A=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{p+q}{p-q}$ – определяется из решения уравнения $x'(t)=0$.

Если $q=0$, то $y'(t)>0,\ x'(t)<0$. (21)

В шестом варианте соотношения сил сторон

$$q>0,\ p\le 0 \text{ или } q\ge 0,\ p<0, \quad (22)$$

при этом

$$y'(t)>0,\ x'(t)<0,\ t\in\left[0,\ T_A^*\right]. \quad (23)$$

В седьмом варианте соотношения сил сторон $p=q$. (24)

Очевидно, что $x'(t)=0\ ; y'(t)=0\ ,\ t\in\left[0,\ T^*\right]$, если $p=q=0$;

$$x'(t)<0\ ; y'(t)<0\ ,\ t\in\left[0,\ T^*\right], \text{ если } p=q>0; \quad (25)$$

$$x'(t)>0\ ; y'(t)>0\ ,\ t\in\left[0,\ T^*\right], \text{ если } p=q<0.$$

Если $p=q=0$, то силы и средства обеих группировок A и B в ходе боя остаются неизменными, пока выполняются соотношения $u_0T^*\le A_0$, так как согласно соотношениям (2) имеем

$$x(t)=\frac{v_0}{a}=x_0,\ y(t)=\frac{u_0}{b}=y_0. \quad (26)$$

Если $p = q \rangle 0$, то силы и средства обеих группировок A и B уничтожаются в соответствии с экспоненциальным законом следующим образом:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{a\sqrt{b}}\left(p\,\mathrm{ch}\sqrt{ab}\,t - p\,\mathrm{sh}\sqrt{ab}\,t + v_0\sqrt{b}\right) = \dfrac{1}{a\sqrt{b}}\left(pe^{-\sqrt{ab}t} + v_0\sqrt{b}\right); \\ y(t) = \dfrac{1}{b\sqrt{a}}\left(p\,\mathrm{ch}\sqrt{ab}\,t - p\,\mathrm{sh}\sqrt{ab}\,t + u_0\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{b\sqrt{a}}\left(pe^{-\sqrt{ab}t} + u_0\sqrt{a}\right). \end{cases} \quad (27)$$

Так как

$$x(t) > \frac{v_0}{a};\ \ y(t) > \frac{u_0}{b}, \quad (28)$$

то количества сил и средств обеих группировок A и B в ходе боя ограничены снизу значениями соответственно v_0/a и u_0/b, если соотношения $u_0 T^* \le A_0$ выполнятся.

Если $p = q < 0$, то силы и средства обеих группировок A и B наращиваются по закону (27), приближаясь к значениям соответственно v_0/a и u_0/b.

Выводы. Рассмотренные варианты решения задач при условиях (4), (10), (13), (15), (19), (22), (24) дают возможность проанализировать характер и получить законы оптимального управления распределением однородных сил и средств резерва конфликтующей стороны для конфликтной ситуации двух группировок при неизвестном времени окончания конфликтной ситуации и неполном использовании средств резерва, а также могут быть положены в основу разработки алгоритма оптимального управления распределением средств резерва.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кононов В.Б., Кушнерук Ю.И., Евстрат Д.И. Площадная интерпретация модели конфликтной ситуации // Системи обробки інформації – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2001. – Вип. 5 (15). – С. 39 – 41.*
2. *Кононов В.Б., Кушнерук Ю.И., Евстрат Д.И. Распределение однородных средств резерва в ходе встречной конфликтной ситуации двух группировок // Системи обробки інформації – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 4 (20). – С. 96 – 101.*
3. *Кононов В.Б., Рафальский Ю.И., Гурин А.П. Оптимальное управление распределением средств резерва // Системи обробки інформації – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 5(21). – С. 45 – 47.*
4. *Давыдов Э.Г. Исследование операций. – М.: Высшая школа, 1990. – 459 с.*

Поступила 28.04.2003

***КОНОНОВ Владимир Борисович**, канд. техн. наук, доцент, зам. нач. факультета ХВУ. В 1987 году окончил ХВВКИУ РВ. Область научных интересов – исследование операций.*