УДК 368.01:519.213.2:51-7

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В АКТУАРНЫХ РАСЧЕТАХ

к.т.н. В.Ю. Дубницкий
(представил д.т.н., проф. Е.А. Артеменко)

Получены выражения для начальных моментов, дисперсии, коэффициента асимметрии, вероятности превышения для случайной величины, подчиненной сложному распределению Пуассона.

Постановка проблемы. По современной терминологии ту область математики, которая непосредственно связана с моделированием различных вопросов страхового бизнеса принято называть актуарной математикой, а соответствующие расчеты актуарными.

Основой любой расчетной схемы страхования служит методика определения количества страховых случаев (СС). От правильно выбранной методики зависит обоснование величины страховых взносов, условий их выплаты, размер и условия получения страховой премии, а также расчет иных параметров, влияющих на безубыточную деятельность страховой компании.

Анализ литературы. В работах [1, 2] предложено для определения количества СС использовать распределение Пуассона.

Тогда случайная величина X – количество СС будет подчинена этому распределению, если вероятность

$$P(X=q)=\frac{\lambda^q}{q!}e^{-\lambda}, \quad q=0, 1, \ldots, \quad \lambda>0. \tag{1}$$

Здесь q – количество СС.

Математическое ожидание m_{xp} и дисперсия σ^2_{xp} в этом случае будут

$$m_{xp}=\sigma^2_{xp}=\lambda_p, \tag{2}$$

причем оценку $\hat{\lambda}_p$ величины λ_p определяют из условия

$$\hat{\lambda}_p=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot n^{-1}, \tag{3}$$

где x_i – количество возникновений СС в совокупности из n объектов [3].

В работе [4] показано, что в качестве верхнего предельного количества СС (величины $\lambda_{расч}$) следует принять величину $\lambda_{расч} = 2\hat{\lambda}_p$. В этом случае вероятность ее превышения пренебрежимо мала.

В то же время в работе [3, с. 619] отмечено, что при изучении статистики несчастных случаев более корректным будет применение так называемого сложного распределения Пуассона, в котором параметр λ суть случайная величина, имеющая плотность распределения

$$g(\lambda) = \frac{\gamma^{\alpha}}{(\alpha-1)!} e^{-\gamma\lambda} \lambda^{\alpha-1}, \qquad \lambda \geq 0. \tag{4}$$

Сведения о числовых характеристиках этого распределения в доступной автору литературе не обнаружены.

Цель работы: определение числовых характеристик распределения (4): математического ожидания, дисперсии, коэффициентов вариации и асимметрии, определение расчетного значения величины λ.

Такая постановка задачи обусловлена тем, что в справочной литературе, например, [5, 6], эти характеристики не указаны.

Решение поставленной задачи. Начальный момент m_k порядка k случайной величины Λ с учетом (4) равен

$$m_k = \int_0^{\infty} \lambda^k g(\lambda)\, d\lambda$$

или

$$m_k = \frac{\gamma^{\alpha}}{(\alpha-1)!} \int_0^{\infty} \lambda^{k+\alpha-1} e^{-\gamma\lambda} d\lambda. \tag{5}$$

Если, как известно,

$$\int_0^{\infty} \lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda} d\lambda = \Gamma(\alpha), \tag{6}$$

то для интеграла, входящего в условие (5), введем обозначение

$$\int_0^{\infty} \lambda^{k+\alpha-1} e^{-\gamma\lambda} d\lambda = \Gamma\big((k+\alpha);\gamma\big). \tag{7}$$

Введя замены переменных $\gamma\lambda = t$; $\alpha\lambda = \gamma^{-1}dt$ получим, что

$$\Gamma\big((k+\alpha);\gamma\big) = \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\gamma^{k+\alpha}}. \tag{8}$$

Упрощая выражение (5), с учетом (8), имеем

$$m_k = \frac{\Gamma(k+\alpha)}{(\alpha-1)!\gamma^k}. \tag{9}$$

Приняв k = 1, получим выражение для математического ожидания m_λ случайной величины Λ:

$$m_\lambda = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(\alpha-1)!\gamma} = \frac{\alpha\,\Gamma(\alpha)}{(\alpha-1)!\gamma}. \tag{10}$$

Для вычисления дисперсии σ_λ^2 используют равенство

$$\sigma_\lambda^2 = m_2 - m_1^2. \tag{11}$$

Тогда, с учетом (9) и (11) получим, что

$$\sigma_\lambda^2 = \frac{(\alpha-1)!\Gamma(2+\alpha)-\alpha^2\Gamma^2(\alpha)}{\left((\alpha-1)!\gamma\right)^2}, \tag{12}$$

а среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_\lambda = \frac{\sqrt{(\alpha-1)!\Gamma(2+\alpha)-\alpha^2\Gamma^2(\alpha)}}{(\alpha-1)!\gamma}. \tag{13}$$

Используя равенства (1) и (13) найдем, что коэффициент вариации этого распределения

$$v = \frac{\sigma_\lambda}{m_\lambda} = \frac{\sqrt{(\alpha-1)!\Gamma(2+\alpha)-\alpha^2\Gamma^2(\alpha)}}{\alpha\,\Gamma(\alpha)}. \tag{14}$$

Коэффициент асимметрии a_s определим, используя условие

$$a_s = \frac{\mu_3}{\sigma_\lambda^3},$$

где σ_λ определена в равенстве (13), а

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3. \tag{15}$$

Отсюда следует, используя (9), что:

$$m_3 = \frac{\Gamma(3+\alpha)}{(\alpha-1)!\gamma^3};$$

$$3m_2m_1 = 3\frac{\Gamma(2+\alpha)\,\alpha\Gamma(\alpha)}{\left[\gamma(\alpha-1)!\right]^2};$$

$$2m_1^3 = \frac{2\alpha^3\,\Gamma^3(\alpha)}{\left[(\alpha-1)!\gamma\right]^3}.$$

Подставляя эти выражения в (15) и учитывая, что

$$\sigma_\lambda^3 = \frac{\left[(\alpha-1)!\,\Gamma(2+\alpha) - \alpha^2\Gamma^2(\alpha)\right]^{3/2}}{\left[(\alpha-1)!\,\gamma\right]^3},$$

получим выражение для коэффициента асимметрии

$$a_s = \frac{(\alpha-1)!^2\,\Gamma(3+\alpha) - 3(\alpha-1)!\,\alpha\gamma\Gamma(\alpha)\Gamma(2+\alpha) + 2\alpha^3\Gamma^3(\alpha)}{\left[(\alpha-1)!\,\Gamma(2+\alpha) - \alpha^2\Gamma^2(\alpha)\right]^{3/2}}. \qquad (16)$$

Расчетную величину $\lambda_{расч} = \lambda^*$ определим из условия того, что вероятность ее превышения должна быть достаточно малой, т.е.

$$P\left(\Lambda > \lambda^*\right) = \int_{\lambda^*}^{\infty} g(\lambda)\,d\lambda = \delta$$

или

$$P\left(\Lambda > \lambda^*\right) = 1 - \int_0^{\lambda^*} g(\lambda)\,d\lambda = 1 - \delta. \qquad (17)$$

Так как

$$\int_0^{\infty} g(\lambda) = \frac{\gamma^\alpha}{(\alpha-1)!}\,\Gamma\left((k+\alpha);\gamma\right),$$

то с точностью до постоянной вероятность превышения своего наперед заданного значения случайной величиной есть функция неполной гамма-функции по отношению к гамма-функции (7).

Численное решение поставленной задачи проводят в такой последовательности.

1. По имеющимся результатам наблюдений определяют $\bar{x}$ – среднее число СС, их дисперсию S^2 и эмпирический второй начальный момент $\hat{m}_2$.

2. Точечные оценки $\hat{\alpha}$ и $\hat{\gamma}$ параметров распределения α и γ определяют по формулам, приведенным в [5]:

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{m}_2}{S^2 - \bar{x}}; \quad \hat{\gamma} = \frac{\bar{x}}{S^2 - \bar{x}}.$$

3. Задают величину δ.

4. Используя величины $\hat{\alpha}$, $\hat{\gamma}$ и δ численным методом определяют величину λ^*, удовлетворяющую условию (17).

Знaя величину λ^*, можно определить расчетное количество страховых случаев q^*. Величина q^* служит основой всех дальнейших актуарных расчетов, которые определяют финансовую политику страховой компании на рынке соответствующих услуг.

Рассмотрим подробно последовательность действий при определении q^*.

Пусть

$$\pi(q,\lambda) = P(x = q).$$

Значение $P(x = q)$ определено по формуле (1).

Тогда функция распределения Пуассона примет вид

$$\Pi(q,\lambda) = \sum_{j=0}^{q} \pi(j,\lambda). \qquad (18)$$

Назовем расчетным числом СС такое $q = q^*$, что

$$1 - \Pi\left(q^*, \lambda^*\right) = \delta, \qquad (19)$$

где δ – малая величина.

В такой постановке задача определения числа СС сведена к решению относительно q уравнения

$$1 - \delta = \Pi\left(q, \lambda^*\right). \qquad (20)$$

Корень этого уравнения и будет искомой величиной q^*.

Для решения уравнения (20) используем приведенную в [7] аппроксимацию распределения Пуассона функцией нормального распределения

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt,$$

а именно, $\pi(q,\lambda) \approx \hat{\Pi}(q,\lambda)$ при условии, что

$$\hat{\Pi}_1(q,\lambda) = \Phi\left(2\sqrt{q+1} - 2\sqrt{\lambda}\right) \qquad (21)$$

и

$$\hat{\Pi}_2(q,\lambda) = \Phi\left(2\sqrt{q + \frac{t+4}{9}} - 2\sqrt{\lambda + \frac{t-8}{36}}\right); \qquad (22)$$

$$t = \frac{1}{\lambda}\left(q - \lambda + \frac{1}{6}\right)^2. \qquad (23)$$

Из (20), (21), (22) следует, что величина q^* должна быть такой, чтобы аргументы функций (21) и (22) совпали бы с $u_{1-\delta}$ квантилью нормального распределения.

Корень q^* уравнения

$$\arg \hat{\Pi}_2\left(q, \lambda^*\right) - u_{1-\delta} = 0$$

находим по методу Ньютона. Начальное приближение, согласно (21), будет

$$q_0^* = \left(\frac{u_{1-\delta}}{2} + \sqrt{\lambda^*}\right)^2 - 1 . \qquad (24)$$

Выводы.

1. Определены начальные и центральные момент сложного распределения Пуассона.

2. Описана методика определения расчетного числа страховых случаев с заданной вероятностью его превышения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эмбрехтс П., Клюппельберг К. Некоторые аспекты страховой математики // Теория вероятностей и ее приложения. – 1993. – Т. 38, вып. 2. – С. 374.*
2. *Виноградов О.П. Вероятность разорения страховой компании в случае, когда интервалы между моментами выплат имеют неодинаковые показательные распределения // Теория вероятностей и ее приложения. – 1998. – Т. 43. – Вып. 3. – С. 352.*
3. *Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями. – М.: Изд. иностранной литературы, 1956. – 664 с.*
4. *Дубницкий В.Ю., Пилипенко Н.С. Оценка вероятности превышения случайной величиной своего удвоенного среднего значения // Обработка информации. – Х.: ХВУ, 1996. – С. 16.*
5. *Хастинг Н., Пикок Дж. Справочник по статистическим распределениям. – М.: Статистика, 1980. – 95 с.*
6. *Переверзев Е.С. Случайные сигналы в задачах оценки состояния. – К.: Наук. думка, 1992. – 308 с.*
7. *Надежность и эффективность в технике: Справочник. В 10 т. Т. 2: Математические методы в теории надежности и эффективности / Под ред. Б.В. Гнеденко. – М.: Машиностроение, 1987. – 280 с.*

Поступила 15.05.2003

ДУБНИЦКИЙ Валерий Юрьевич*, кандидат технических наук, доцент Харьковского филиала Украинской академии банковского дела. В 1975 году окончил Харьковский институт радиоэлектроники. Область научных интересов – исследование операций.*