УДК 621.142.36

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И МИНИМИЗАЦИЯ НЕДООПРЕДЕЛЕННЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СЖАТЫХ КАРТАХ

Е.Н. Коробкова
(представил д.ф.-м.н., проф. С.В. Смеляков)

Рассмотрены алгоритмы сжатия карт, обеспечивающие возможность уменьшения числа элементов при представлении в них недоопределенных логических функций для различных степеней сжатия карты по различным переменным. Проведен анализ алгоритмов минимизации функций в предложенных картах. Алгоритмы доведены до инженерной методики.

Введение. Последнее десятилетие характеризуется бурным развитием схемотехники программируемых логических интегральных схем (ПЛИС) [1]. В связи с их широким использованием вновь стали весьма актуальными вопросы синтеза цифровых устройств [2]. Одной из основных задач синтеза устройств на базе ПЛИС является минимизация логических функций в классе ДНФ. При синтезе часто бывают ситуации, когда некоторые значения переменных запрещены, в других случаях – просто невозможны для данного устройства или в принципе возможны, но несущественны. Несмотря на некоторые отличия подобных ситуаций, все они описываются недоопределенными логическими функциями. При минимизации этих функций их доопределяют на недоопределенных наборах значением нуля или единицы. Если функция не определена в m точках, то ее можно доопределить 2^m способами, каждому из которых будет соответствовать полностью определенная функция.

Минимальные нормальные формы, полученные для каждого варианта доопределения, могут существенно отличаться по сложности. И тогда задача нахождения самой минимальной формы из всех возможных сводится к задаче отыскания оптимального варианта доопределения, которому соответствует самая минимальная форма. В настоящее время наибольшее распространение получили аналитические и графические методы минимизации.

Аналитические методы минимизации функций основаны на переборе всех вариантов доопределения, минимизации функции для каждого варианта доопределения и выбора из всех полученных форм самой минимальной. Поскольку аналитические методы требуют полного перебора вариантов, то даже при относительно небольшом числе (5 – 10) недоопределенных наборов эти методы довольно громоздки.

Графические методы, основанные на представлении функций в картах типа Вейча, Карно, при небольшом числе переменных даже при относительно большом числе недоопределенных наборов позволяют визуальным осмотром выбрать оптимальный вариант доопределения и записать самую минимальную форму из всех возможных.

Однако при увеличении числа переменных задача поиска оптимального варианта доопределения чисто визуальным путем сильно усложняется из-за неспособности человека анализировать большие массивы точек представления функции.

Цель статьи – разработка метода минимизации недоопределенных логических функций на основе использования карт типа Вейча, Карно с уменьшенным числом элементов.

Предлагается пойти по пути сжатия обозреваемого массива, т.е. области определения функции. Алгоритмы сжатия области предложены в [3]. Анализ табличных алгоритмов сжатия области определения приведен в [4].

Предметом нашего дальнейшего исследования являются:

– вопросы анализа алгоритмов сжатия области определения функций, в картах типа Вейча, Карно;

– особенности представления недоопределенных функций в сжатых картах, их доопределение и минимизация.

Предложенные в [3, 4] алгоритмы позволяют выполнить сжатие области определения по любому числу и сочетанию переменных. Для целей минимизации вполне достаточно одного из вариантов. Но поскольку варианты в какой-то степени неравнозначны по их сложности, то предлагается рассмотреть шесть наиболее простых: сжатие по одной переменной со старшим или младшим индексом, сжатие по двум переменным со старшими или младшими индексами и сжатие по трем переменным со старшими или младшими индексами.

Этого числа вариантов вполне достаточно, чтобы выявить особенности алгоритмов сжатия, дать оценку вариантов и рекомендовать к выбору одного из них, наиболее оптимального при минимизации тех или других конкретных функций. Поскольку сами алгоритмы сжатия области определения функции и минимизации аналогичны рассмотренным в [5, 6], то мы воспользуемся основными положениями, которые там были сформулированы, отмечая особенности, обусловленные недоопределенностью минимизируемых функций.

Пусть задана некоторая функция от n переменных – $F(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)$, равная единице на k наборах, недоопределенная на m наборах и равна нулю на остальных. Все наборы можно представить десятичными номерами.

Для записи и минимизации этой функции в классическом варианте потребуется 2^n – элементная карта, в 2^k элементах которой будут единицы, в 2^m клетках – символ недоопределенности и в остальных 2^{n-k-m} клетках – ноль. Мы рассмотрим алгоритм сжатия карты до элементов (r – число переменных, по которому выполняется сжатие).

Воспользуемся алгоритмом [6], основанном на делении десятичного номера набора на 2^r при сжатии по r переменным с младшими индексами и на 2^{n-r} при сжатии по r переменным со старшими индексами. Всего рассмотрим шесть вариантов.

Первый вариант. ***Сжатие по переменной x_1.*** Для выполнения этого шага алгоритма необходимо десятичные номера единичных и неопределенных наборов разделить на 2^1. При делении каждого номера будет получено частное в диапазоне чисел от 0 до $2^{n-1} - 1$ и остаток в виде 0 или 1. Частное дает номер клетки, определяемый переменными $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2$, в новой 2^{n-1} элементной карте, а остаток дает индекс минтерма, образуемого переменной x_1. Минтерм определяет значение функции в этой клетке. При делении номеров единичных наборов минтермы будем обозначать как обычно: m_0 и m_1. При делении номеров недоопределенных наборов символ полученного минтерма будем отмечать звездочкой и тогда недоопределенные или отмеченные минтермы будут представлены как m_0^* и m_1^*. Суть недоопределенного минтерма будет состоять в том, что при образовании правильных конфигураций в поле карты его можно доопределять значением обычного минтерма с данным индексом или нуля. При доопределении его обычным минтермом он может входить в несколько правильных конфигураций, что следует из правила идемпотентности. Если при определении значений функции в клетках карты в некоторых из них будет логическая сумма двух определенных минтермов ($m_0 \vee m_1$), то более удобным будет представить эту сумму в виде единицы. Необходимо помнить, что любую составную часть этой единицы (m_0 или m_1) можно включать в любые другие конфигурации, содержащие минтермы m_0 или m_1. Если при доопределении значений функции в некоторых клетках карты будет логическая сумма двух неопределенных минтермов ($m_0^* \vee m_1^*$), то более удобным будет представить эту сумму в виде символа неопределенности (*), который можно использовать для доопределения значением: m_0, m_1, 1 или 0.

Второй вариант. ***Сжатие по переменным x_1, x_2.*** Для выполнения этого шага алгоритма необходимо десятичные номера единичных и недоопределенных наборов разделить на 2^2. При делении каждого номера будет получено частное в диапазоне чисел от 0 до $2^{n-2} - 1$ и остаток – в диапазоне чисел от 0 до 3. Частное дает номер клетки, определяемый переменными $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_3$, в новой 2^{n-2} элементной карте. Остаток дает индекс минтерма, образуемого переменными x_2, x_1. Минтермы определяют значение функции в рассматриваемой точке. При делении номеров единичных наборов минтермы будем обозначать как обычно: m_0, m_1, m_2, m_3. При делении номеров недоопределенных наборов минтермы будем отмечать, обозначая их как m_0^*, m_1^*, m_2^*, m_3^*. Суть любого недоопределенного минтерма, как и выше, состоит в возможности доопределения его обычным минтермом с тем же самым индексом или нулем. Если в клетке с одним номером получаем от двух до четырех минтермов, то в этой клетке должна записываться их логическая сумма. Для упрощения визуального обзора поля карты знак логической суммы рекомендуется опускать. Если в некоторой клетке будет сумма четырех определенных минтермов, то для упрощения обзора рекомендуется представлять ее в виде единицы ($m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 = 1$), при этом необходимо помнить, что любую составную часть ее можно включать в другие конфигурации. Если в некоторой клетке карты будет сумма четырех неопределенных минтермов, то удобнее будет представить ее символом обычной неопределенности, используя его для доопределения любым одним или несколькими минтермами, единицей или нулем.

При выделении правильных конфигураций максимально возможной площади, которым соответствуют импликанты минимально возможного ранга, с минимально возможным числом правильных конфигураций, покрывающих все множество минтермов, необходимо учитывать, что логические суммы двух соседних минтермов можно склеить по одной переменной, представив ее одной составляющей переменной с отрицанием или без него. В частности, в данном варианте: $m_0 \vee m_1 = \bar{x}_2$, $m_0 \vee m_2 = \bar{x}_1$, $m_1 \vee m_3 = x_1$, $m_2 \vee m_3 = x_2$. Следовательно, такие суммы минтермов в карте покрываются как один символ. Логические суммы двух несоседних минтермов ($m_0 \vee m_3$) и ($m_1 \vee m_2$) не склеиваются, поэтому каждый из минтермов, входящих в такие суммы, покрывается раздельно.

Третий вариант. ***Сжатие по переменным x_3, x_2, x_1.*** Для выполнения этого шага алгоритма необходимо десятичные номера единичных и неопределенных наборов разделить на 2^3. При делении каждого номера будет получено частное в диапазоне чисел от 0 до $2^{n-3} - 1$ и остаток в диапазоне чисел от 0 до 7. Частное дает номер клетки, определяемый переменными x_n, x_{n-1}, … , x_4, в новой 2^{n-3} элементной карте, а остаток дает индекс минтерма, образуемого переменными x_3, x_2, x_1.

Минтермы, полученные при делении номеров единичных наборов, обозначаем как $m_i^{'}$, а минтермы, полученные при делении не номеров недоопределенных наборов обозначаем, как $m_i^{*'}$. Все полученные минтермы преобразуем, представив каждый из них в виде произведения x_3 (с отрицанием или без него) и минтерма, образуемого переменными x_2, x_1: $m_0^{'} = \bar{x}_3 m_0$, $m_1^{'} = \bar{x}_3 m_1$, $m_2^{'} = \bar{x}_3 m_2$, $m_3^{'} = \bar{x}_3 m_3$, $m_4^{'} = x_3 m_0$, $m_5^{'} = x_3 m_1$, $m_6^{'} = x_3 m_2$, $m_7^{'} = x_3 m_3$. Аналогичное преобразование выполняем для недоопределенных минтермов.

Поскольку каждый из минтермов представлен теперь в виде произведения $\bar{x}_3 m_i$ или $x_3 m_i$, то при выделении правильных конфигураций максимально возможной площади необходимо анализировать принцип соседства произведений, не только по соседству минтермов m_i и m_k, но и по x_3.

Если в некоторую клетку входит логическая сумма $x_3 m_i \vee x_3 m_k$, при этом $i + k \neq 3$, т.е. минтермы соседние, то такая логическая сумма покрывается как один символ, представляющий собой произведение x_3 на переменную, оставшуюся после склеивания соседних минтермов.

Если m_i и m_k не соседние ($i + k = 3$), то каждое из произведений, входящих в сумму, покрывается отдельно. Аналогичным образом покрываются логические суммы $\bar{x}_3 m_i \vee \bar{x}_3 m_k$.

Если в клетку входит сумма произведений $\bar{x}_3 m_i \vee x_3 m_i$, то склеивание выполняется по x_3 и такая логическая сумма покрывается как один символ – m_i.

В некоторых случаях возможно уменьшение ранга произведения одновременно как по соседству минтермов, а также и по x_3.

Четвертый вариант. ***Сжатие по переменной x_n.*** Для выполнения этого пункта алгоритма необходимо десятичные номера единичных и неопределенных наборов разделить на 2^{n-1}. При делении каждого номера будет получено частное, равное 0 или 1 и остаток – в диапазоне чисел от 0 до $2^{n-1}-1$. Теперь, в отличие от первого варианта, остаток дает номер клетки, определяемый переменными $x_{n-1}, \ldots, x_1$ в новой 2^{n-1}-элементной карте, а частное дает индекс минтерма, образуемого переменной x_n и определяющего значения функции. Все остальные замечания по представлению минтермов в 2^{n-1}-элементной карте, сути недоопределенных минтермов и их доопределению те же, что и в первом варианте.

Пятый вариант. ***Сжатие по переменным x_n, x_{n-1}.*** Для выполнения этого пункта алгоритма необходимо десятичные номера единичных и неопределенных наборов разделить на 2^{n-2}. При делении каждого номера будет получено частное в диапазоне чисел от 0 до 3 и остаток в диапазоне чисел от 0 до $2^{n-2}-1$. Остатки дают номера клеток, определяемые переменными $x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots, x_1$, в 2^{n-2}-элементной карте, а частные – индексы минтермов, образуемых переменными x_n, x_{n-1}. Все остальные замечания по представлению минтермов в 2^{n-2}-элементной карте, сути недоопределенных минтермов и их доопределению те же, что и во втором варианте.

Шестой вариант. ***Сжатие по переменным x_n, x_{n-1}, x_{n-2}.*** Для выполнения этого пункта алгоритма десятичные номера единичных и неопределенных наборов необходимо разделить на 2^{n-3}. При делении каждого номера будет получено частное в диапазоне чисел от 0 до 7 и остаток в диапазоне чисел от 0 до $2^{n-3}-1$. Остатки от деления дают номера клеток, определяемые переменными $x_{n-3}, x_{n-4}, \ldots, x_1$, в новой 2^{n-3}-элементной карте, а частные дают индексы минтермов, образуемых переменными x_n, x_{n-1}, x_{n-2}. Минтермы, полученные при делении номеров единичных наборов, обозначим как m_i, а минтермы, полученные при делении номеров недоопределенных наборов, обозначим как $m_i^{*'}$. Все полученные минтермы преобразуем, аналогично, как и в третьем варианте, представив каждый из них в виде произведения x_n (с отрицанием или без него) и минтерма, образуемого переменными x_{n-1}, x_{n-2}: $m_0' = \overline{x}_5 m_0$, $m_1' = \overline{x}_5 m_1$, $m_2' = \overline{x}_5 m_2$, $m_3' = \overline{x}_5 m_3$, $m_4' = x_5 m_0$, $m_5' = x_5 m_1$, $m_6' = x_5 m_2$, $m_7' = x_5 m_3$. Аналогичные преобразования выполняем и для недоопределенных минтермов.

Все остальные замечания по выделению правильных конфигураций максимально возможной площади и образованию соответствующих им импликант минимально возможного ранга аналогичны третьему варианту.

Анализ предложенного алгоритма сжатия карт по различному числу различных переменных, особенности представления недоопределенных функций в сжатых картах, правила доопределения и минимизации их рассмотрим на примере функции от пяти переменных – $F(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)$, равной единице на наборах (1, 2, 10, 11, 12, 13, 15, 20, 21, 22, 26, 27, 28, 29), недоопределенной на наборах {5, 7, 8, 16, 17, 18, 25, 31} и равна нулю на остальных наборах.

Для представления и минимизации этой функции в классическом варианте потребуется 32-элементная карта в 14 клетках которой будут единицы, в десяти – нули и в восьми клетках – символ недоопределенности.

Рассмотрим алгоритмы сжатия 32-элементной карты до 16-, 8- и 4-элементной, проведем подробный анализ алгоритмов минимизации функции при сжатии карты по младшим и старшим переменным для всех шести рассмотренных выше вариантов.

Первый вариант. ***Сжатие по переменной*** x_1. В соответствии с алгоритмом сжатия для этого варианта, каждый десятичный номер единичных и недоопределенных наборов делим на два. В результате этой операции получаем два числа: частное – в диапазоне от 0 до 15 и остаток в виде 0 или 1. Первое число дает номер клетки в 16-элементной карте, а второе – индекс минтерма, представленного в этой клетке. Запишем эти пары чисел, при этом, для большей наглядности, номера клеток будем представлять в скобках:

– для единичных наборов: <0> – 1; <1> – 0; <5> – 0,1; <6>– 0,1 <7> – 1; <10> – 0,1; <11> – 0; <13> – 0,1; <14> – 0,1;

– для недоопределенных наборов: <2> – 1; <3> – 1; <4> – 0; <8> – 1; <9> – 0; <12> – 1; <15> – 1;

Запишем определенные и недоопределенные минтермы с полученными индексами (вторые числа в парах) в клетки карты (рис. 1) с соответствующими номерами (первые числа в парах). Если в некоторые клетки входит минтерм с нулевым и единичным индексом, то в нее необходимо записать логическую сумму минтермов: в случае определенных – $m_0 \vee m_1$, в случае недоопределенных – $m_0^* \vee m_1^*$. В первом случае такую сумму представляем единицей, во втором – символом неопределенности.

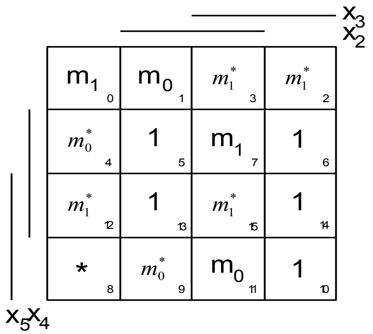

Рис. 1. Карта для первого варианта сжатия

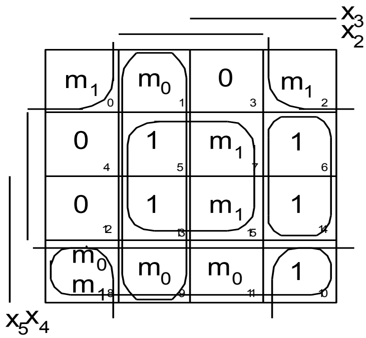

Рис. 2. Доопределенная карта для первого варианта сжатия

Как уже отмечалось, задача минимизации сводится к покрытию всех определенных минтермов и единиц минимально возможным числом правильных конфигураций максимально возможной площади. Покрытие рекомендуется начинать с минтермов, которые можно включить в правильную конфигурацию единственным способом.

Минтерм m_1 в клетке <0> можно включить в правильную конфигурацию, состоящую из четырех клеток, если функцию в клетках <2, 8> доопределить значением m_1, а в клетке <10> m_1 является составной частью единицы. Последовательность доопределений представляем в доопределенной карте (рис. 2) и записываем номера клеток, образующих правильную конфигурацию и соответствующую этой конфигурации простую импликанту, т.е. в данном случае: <0, 2, 8, 10> – $m_1\bar{x}_4\bar{x}_2$.

Минтерм m_0 в клетке <1> можно включить в правильную конфигурацию, состоящую из четырех клеток, если функцию в клетке <9> доопределить значением m_0. В клетках <5,13> m_0 является составной частью единицы. Записываем номера клеток, образующих эту конфигурацию и соответствующую ей простую импликанту: <1, 5, 13, 9> – $m_0\bar{x}_3x_2$.

Если в клетке <15> функцию доопределить значением m_1, то минтерм m_1 в клетке <7> можно включить в правильную конфигурацию, состоящую из четырех клеток. Его можно включить двумя способами: первый – <7, 5, 13, 15> и второй – <7, 6, 14, 15>. Оптимальным будет первый вариант включения, поскольку при этом единицы в клетках <5, 13> будут полностью поглощены их составляющими частями: m_0, вошедшим в конфигурацию <1, 5, 13, 9>, и m_1, вошедшим в конфигурацию <7, 5, 13, 15>. Записываем номера клеток, образующих эту конфигурацию и соответствующую ей простую импликанту: <7, 5, 13, 15> – $m_1x_4x_2$.

Минтерм m_0 в клетке <11> также можно включить в правильную конфигурацию, состоящую из четырех клеток, если функцию в клетке <8> доопределить значением m_0, в клетке <9> функция уже доопределена значением m_0, а в клетке <11> m_0 является составной частью единицы. Записываем номера клеток, образующих эту правильную конфигурацию и соответствующую ей простую импликанту: <11, 8, 9, 10> – $m_0x_5\bar{x}_4$.

Единица в клетке <10> полностью поглощена ее составляющими частями: m_0, вошедшим в конфигурацию <11, 8, 9, 10>, и m_1, вошедшими в конфигурацию <0, 2, 8, 10>.

Клетки <6, 14> образуют правильную конфигурацию, которой соответствует простая импликанта $x_4x_3\bar{x}_2$.

Оставшиеся недоопределенными значения функции в клетках <3, 4, 12> доопределяем значением нуля. И тогда оптимально доопределенная функция в карте будет представлена в окончательном виде (рис. 2). Полученные правильные конфигурации в карте обведены контурами.

Объединяя простые импликанты знаком логической суммы, записываем минимальную ДНФ заданной функции, которая выражена через координаты правильных конфигураций в поле карты, определяемые переменными $x_5x_4x_3x_2x_1$ и значения в них, определяемые минтермами m_0, m_1, образуемыми переменной x_1:

$$F = \bar{x}_4\bar{x}_2m_1 \vee \bar{x}_3x_2m_0 \vee x_4x_2m_1 \vee x_5\bar{x}_4m_0 \vee x_4x_3\bar{x}_2 . \qquad (1)$$

Подставляя значение m_0 и m_1, получаем окончательный вид минимальной ДНФ заданной функции:

$$F = \bar{x}_4\bar{x}_2x_1 \vee \bar{x}_3x_2\bar{x}_1 \vee x_4x_2x_1 \vee x_5\bar{x}_4\bar{x}_1 \vee x_4x_3\bar{x}_2 . \qquad (2)$$

Второй вариант. ***Сжатие по переменным x_2, x_1.*** В соответствии с алгоритмом сжатия для этого варианта каждый десятичный номер единичных и недоопределенных наборов делим на четыре. В результате этой операции получаем частное в диапазоне чисел от 0 до 7 и остаток в диапазоне чисел от 0 до 3. Первое число определяет номер клетки в 8-элементной карте, а второе – индекс минтерма, представленного в ней. Запишем эти числа, представляя номер клетки в скобках.

Для единичных наборов: <0> – 1, 2; <2> – 2, 3; <3> – 0, 1, 3; <5> – 0, 1, 2; <6> – 2, 3; <7> – 0, 1. Для недоопределенных – <1> – 1, 3; <2> – 0; <4> – 0, 1, 2; <6> – 1; <7> – 3.

Запишем определенные и недоопределенные минтермы с полученными индексами в соответствующие клетки карты (рис. 3).

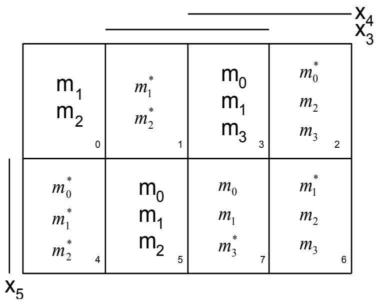

Рис. 3. Карта для второго варианта сжатия

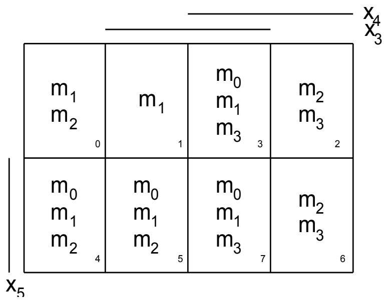

Рис. 4. Доопределенная карта для второго варианта сжатия

При выделении правильных конфигураций максимально возможной площади, которым соответствуют импликанты минимально возможного ранга необходимо учитывать, что логические суммы двух соседних минтермов, находящиеся в одной клетке, склеиваются по одной переменной. Такие суммы необходимо представить оставшейся после склеивания переменной (с отрицанием или без него). В данном случае: $m_0 \vee m_1 = \bar{x}_2$, $m_0 \vee m_2 = \bar{x}_1$, $m_1 \vee m_3 = x_1$, $m_2 \vee m_3 = x_2$. Следовательно эти суммы в клетках карты покрываются как один символ. Логические суммы двух не соседних минтермов $m_0 \vee m_3$, $m_1 \vee m_2$ не склеиваются, поэтому каждый минтерм, входящий в такую сумму, покрывается раздельно.

Анализ образования правильных конфигураций рекомендуется начинать с таких минтермов, которые можно включить в правильную конфигурацию максимально возможной площади единственным способом. В нашем примере предлагается следующая последовательность покрытия.

Минтерм m_1 в клетке <0> включаем в правильную конфигурацию, состоящую из четырех клеток, доопределяя значение функции в клетках <1, 4> минтермом m_1. Записываем номера клеток, образующих эту конфигурацию и соответствующую ей простую импликанту: <0, 1, 4, 5> – $m_1\bar{x}_4$. Покрытые минтермы необходимо занести в новую доопределенную карту (рис. 4), вычеркивая их в исходной карте.

Минтерм m_2, находящийся в клетке <0>, можно единственным способом включить в правильную конфигурацию, состоящую из четырех клеток, если в клетке <4> функцию доопределить значением m_2. Записываем номера клеток, образующих эту конфигурацию и соответствующую ей простую импликанту: <0, 2, 4, 6> – $m_2\bar{x}_3$.

Оставшиеся непокрытыми минтермы m_3 в клетках казалось можно было бы включить в логическую сумму минтермов $m_2 \vee m_3$, однако это не будет оптимальное покрытие, поскольку предоставляется возможность одновременного покрытия минтермов m_3 не только в клетках <2, 6>, но и в клетке <3>, если доопределить значение функции в клетке <7> минтермом m_3. Запишем номера клеток, образующих эту конфигурацию и соответствующую ей простую импликанту: <2, 3, 6, 7> – m_3x_4.

Логическая сумма минтермов $m_0 \vee m_1$, в клетках <3, 7> образует правильную конфигурацию, которой соответствует импликанта минимального ранга: <3, 7> – $(m_0 \vee m_1)x_4x_3$.

Если функцию в клетке <4> доопределить значением m_0, то логическую сумму минтермов $m_0 \vee m_2$ в клетке <5> можно включить в правильную конфигурацию, состоящую из двух клеток. Записываем номера клеток этой конфигурации и соответствующую ей простую импликанту: <4, 5> – $(m_0 \vee m_2)x_5\bar{x}_4$.

Оставшиеся недоопределенными минтермы: m_3^* в клетке <1>, m_0^* – в клетке <2> и m_1^* – в клетке <6> доопределяются нулем и следовательно в доопределенную карту (рис. 4) не входят.

Объединяя полученные простые импликанты знаком логической суммы, записываем минимальную ДНФ заданной функции, выраженную через координаты правильных конфигураций в поле карты, определяемых переменными $x_5x_4x_3$ и значения функции в них, определяемые минтермами m_0, m_1, m_2, m_3, образуемыми переменными x_2x_1:

$$F = m_1\bar{x}_4 \vee m_2\bar{x}_3 \vee m_3x_4 \vee (m_0 \vee m_1)x_4x_3 \vee (m_0 \vee m_2)x_5\bar{x}_4 . \qquad (3)$$

Третий вариант. ***Сжатие по переменным x_3, x_2, x_1.*** В соответствии с алгоритмом сжатия для этого варианта каждый десятичный номер единичных и недоопределенных наборов делим на восемь. В результате этой операции получаем частное в диапазоне чисел от 0 до 3 и остаток в диапазоне чисел от 0 до 7. Первое число определяет номер клетки в 4-элементной карте, а второй индекс минтерма, соответствующего этой клетке. Запишем эти взаимосвязанные числа:

для единичных наборов: <0> – 1, 2; <1> – 2, 3, 4, 5, 7; <2> – 4, 5, 6; <3> – 2, 3, 4, 5;

для недоопределенных наборов: <0> – 5,7; <1> – 0; <2> – 0,1,2; <3> – 3,7.

Обозначая полученные определенные минтермы как $m_i^{'}$, а недоопределенные как $m_i^{*'}$ преобразуем их, представляя каждый в виде произведения x_3 (с отрицанием или без него) и минтерма, образуемого переменными x_2, x_1. Получаем выражения для каждого $m_i^{'}$ в форме, приведенной в общей части третьего варианта алгоритма.

Записываем логическую сумму полученных произведений в соответствующие клетки карты – рис. 5 (в карте знак суммы, как и выше, опущен).

При выделении правильных конфигураций необходимо пользоваться всеми положениями, сформулированными в общей части третьего варианта алгоритма. При этом анализ образования правильных конфигураций и соответствующих им импликант рекомендуется начинать с произведений или логических сумм произведений, которые покрываются единственно возможным способом.

Анализируя распределение произведений в клетках карты, замечаем, что функцию можно доопределить в точке <2> значением $\bar{x}_3m_2$, тогда произведение будет находиться в четырех клетках. Запишем номера клеток этой функции и соответствующую ей простую импликанту: <0, 1, 2, 3> – $\bar{x}_3m_2$. Как и выше рекомендуется покрытые произведения переносить в доопределенную карту (рис. 6) и вычеркивать в исходной.

Если функцию в точке <0> доопределить значением x_3m_1, а в точке <2> – $\bar{x}_3m_1$, то будет образована конфигурация из двух клеток, которой соответствует простая импликанта: <0, 2> – $\bar{x}_4m_1$.

Клетки <1, 3> содержат логическую сумму $\bar{x}_3 m_3 \vee x_3 m_3$, которая склеивается по переменной x_3. Следовательно: <1, 3> – $x_4 m_3$.

В клетках <1, 3> также можно выделить логическую сумму $x_3 m_0 \vee x_3 m_1$, следовательно: <1, 3> – $x_4 m_3 (m_0 \vee m_1)$.

И, наконец, в клетке <2> осталась непокрытой логическая сумма $\bar{x}_3 m_0 \vee \bar{x}_3 m_2 \vee x_3 m_0 \vee x_3 m_2$, которая склеивается по переменной x_3, вследствие чего клетке <2> соответствует $x_5 \bar{x}_4 (m_0 \vee m_2)$. В окончательном виде доопределенная функция приведена в карте на рис. 6.

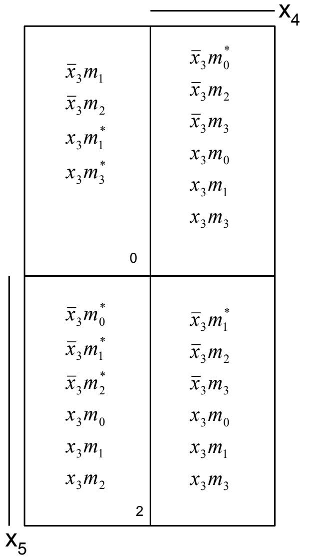

Рис. 5. Карта для третьего варианта сжатия

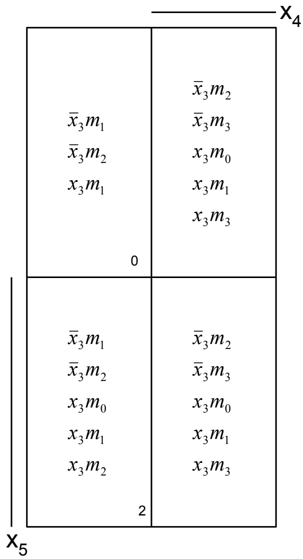

Рис. 6. Доопределенная карта для третьего варианта сжатия

Простые импликанты, полученные в этом варианте, представлены в том же самом виде, что и во втором варианте.

Четвертый вариант. ***Сжатие по переменной x_5.*** Для выполнения этой операции необходимо десятичные номера единичных и неопределенных наборов разделить на шестнадцать. При делении каждого номера будет получено частное в виде 0 или 1 и остаток – в диапазоне чисел от 0 до 15. Остаток дает номер клетки, определяемый переменными x_4, x_3, x_2, x_1, а частное – индекс минтерма, образуемого переменной x_5.

Запишем определенные и недоопределенные минтермы с указанием клеток карты, куда они входят: m_0 – <1, 2, 10, 11, 12, 13, 15>; m_1 – <4, 5, 6, 10, 11, 12, 13>; m_0^* – <5, 7, 8>; m_1^* – <0, 1, 2, 9, 15>. При записи этих минтермов в клетки карты (рис. 7), точно также, как и в первом варианте, логическую сумму $m_0 \vee m_1$ представляем единицей клетки <10, 11, 12, 13>.

Анализируя распределение минтермов в клетках карты, нетрудно заметить, что минтерм m_1 в клетке <6> можно включить в правильную конфигурацию, состоящую из четырех клеток, если функцию в клетках <0> и <2> доопределить значением m_1. Записываем эту конфигурацию и соответствующую ей импликанту: <0, 2, 4, 6> – $\bar{x}_4\bar{x}_1 m_1$.

Последовательность доопределений, как и в предыдущих вариантах, переносим в доопределенную карту (рис. 8).

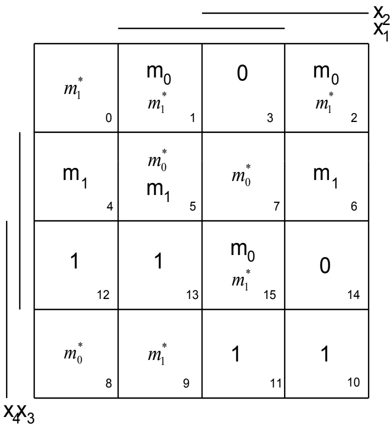

Рис. 7. Карта для четвертого варианта сжатия

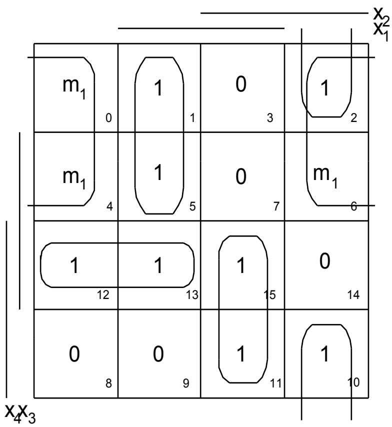

Рис. 8. Доопределенная карта для четвертого варианта сжатия

Поскольку функция в клетке <2> доопределена значением m_1, то в этой клетке получили $m_0 \vee m_1 = 1$, ее можно включить в правильную конфигурацию, состоящую из двух клеток, которым соответствует простая импликанта: <2, 10> – $\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1$.

Доопределяя функцию в точке <1> значением m_1, а в точке 5 – значением m_0, также получаем правильную двухклеточную конфигурацию, значение функции в клетках которой равно единице. Записываем координаты этой конфигурации и соответствующую ей простую импликанту: <1, 5> – $\bar{x}_4, \bar{x}_2, x_1$.

Аналогичным образом получаем двух клеточную конфигурацию доопределив функцию в точке (15) значением m_1: <11, 15> – x_4, x_2, x_1. Следующими покрываются: <12, 13> – x_4, x_3, x_2.

Поскольку все определенные минтермы покрыты, то все оставшиеся недоопределенные минтермы – клетки <7, 8, 9> доопределяем нулем.

Объединяя полученные простые импликанты знаком логической суммы, записываем минимальную ДНФ, выраженную через координаты правильных конфигураций в поле карты, определяемые переменными $x_4x_3x_2x_1$ и значение функции в них, определяемые минтермами, образуемыми переменной x_5:

$$F = m_1\bar{x}_4\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3x_2\bar{x}_1 \vee x_4x_2x_1 \vee \bar{x}_4\bar{x}_2x_1 \vee x_4x_3x_2\,. \qquad (4)$$

Пятый вариант. ***Сжатие по переменным x_5, x_4.*** Для выполнения этой операции необходимо десятичные номера единичных и недоопределенных набором разделить на восемь. При делении каждого номера получаем частное в диапазоне чисел от 0 до 3 и остаток в диапазоне от 0 до 7. Остатки дают номера клеток, определяемые переменными $x_3x_2x_1$, в 8-элементной карте, а частные – индексы минтермов, образуемые переменными x_5x_4, и определяющие значение функции в этих клетках. При делении номеров единичных наборов получаем определенные минтермы, а при делении недоопределенных номеров – недоопределенные минтермы.

Запишем определенные и недоопределенные минтермы с указанием клеток, куда они входят: m_0 – <1, 2>; m_1 – <2, 3, 4, 5, 7>; m_2 – <4, 5, 6>; m_3 – <2, 3, 4, 5>; m_0^* – <5, 7>; m_1^* – <0>; m_2^* – <0, 1, 2>; m_3^* – <1, 7>.

При записи полученных минтермов в карте (рис. 9) знак логической суммы опускаем.

В результате анализа распределения определенных и недоопределенных минтермов в поле карты, предлагается провести доопределения неопределенных минтермов, приведенные на рис. 10. Запишем номера клеток, образующие эти конфигурации, и соответствующие им простые импликанты: <0, 2, 4, 6> – $m_2\bar{x}_1$; <4, 5> – $(m_1 \vee m_3)x_3\bar{x}_2$; <1, 5> – $(m_0 \vee m_2)\bar{x}_2x_1$; <3, 7> – $(m_1 \vee m_3)x_2x_1$; <2> – $\bar{x}_3x_2\bar{x}_1$.

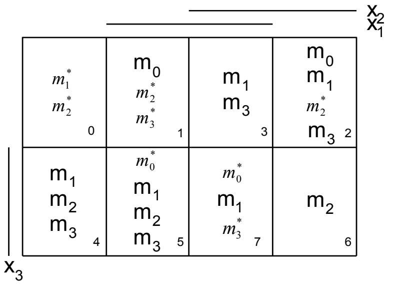

Рис. 9. Карта для пятого варианта сжатия

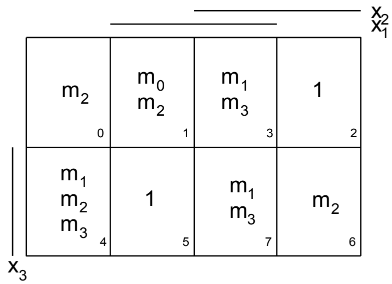

Рис. 10. Доопределенная карта для пятого варианта сжатия

Соединяя эти импликанты знаком логической суммы, получаем минимальную ДНФ, выраженную через координаты правильных конфигураций, определяемых переменными x_3, x_2, x_1 и значения функции в них, определяемые минтермами, образуемыми переменными x_5, x_4:

$$F = m_2\bar{x}_1 \vee (m_1 \vee m_3)x_3\bar{x}_2 \vee (m_0 \vee m_2)\bar{x}_2 x_1 \vee (m_1 \vee m_3)x_2 x_1 \vee \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 . \quad (5)$$

Шестой вариант. ***Сжатие по переменным*** x_5, x_4, x_3. При выполнении этой операции десятичные номера единичных и недоопределенных наборов делим на четыре. При делении каждого номера получаем частное в диапазоне чисел от 0 до 7 и остаток в диапазоне от 0 до 3. Как и в третьем варианте, выполняем преобразования минтермов, представив каждый из них в виде произведения x_5 с отрицанием или без него на минтерм, образуемый переменными x_4x_3. Выполнив все пункты алгоритма, получаем четырехэлементную карту (рис. 11), координаты клеток которой определяются переменными x_2x_1, а значения функции в клетках представлены логической суммой произведений переменной x_5 с отрицанием или без него на определенные или неопределенные минтермы, образуемые переменными x_4x_3.

При выделении правильных конфигураций учитываем все те положения, которые были сформулированы выше по склеиванию соседних минтермов $m_i \vee m_k$ и принцип соседства по переменной x_5. С учетом этих замечаний выполняем доопределение, приведенное на рис. 12.

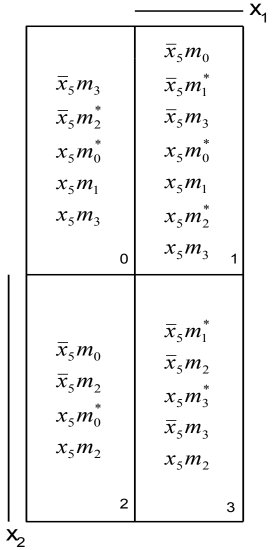

Рис. 11. Карта для шестого варианта сжатия

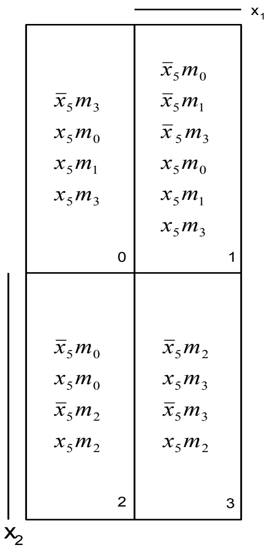

Рис. 12. Доопределенная карта для шестого варианта сжатия

Анализируя приведенную карту, выделяем пять правильных конфигураций, оптимально покрывающих все множество произведений.

Записываем номера клеток, образующих эти конфигурации и соответствующие им простые импликанты: <2> – $(m_0 \vee m_2)x_2\bar{x}_1$; <1> – $(m_0 \vee m_1)\bar{x}_2 x_1$; <3> – $(m_2 \vee m_3)x_2 x_1$; <0,1> – $m_3\bar{x}_2$; <2> – $(m_0 \vee m_1)\bar{x}_2$.

Соединяя простые импликанты значением логической суммы, получаем минимальную ДНФ, выраженную через координаты правильных конфигураций, определяемых переменными $x_2 x_1$, и значения функции, определяемые переменной x_5 и минтермами, образуемыми переменными $x_4 x_3$:

$$F = (m_0 \vee m_2)x_2\bar{x}_1 \vee (m_0 \vee m_1)\bar{x}_2 x_1 \vee (m_2 \vee m_3)x_2 x_1 \vee m_3\bar{x}_2 \vee x_5\bar{x}_2(m_0 \vee m_1). \quad (6)$$

Нетрудно убедиться, что выражения, полученные в каждом варианте, при соответствующем представлении минтермов в каждом из них дадут один и тот же результат, записанный в виде (2).

Заключение. Предложенный способ представления и доопределения недопределенных функций в сжатых картах облегчает процедуру отыскания правильных конфигураций в поле карты, оптимальным образом покрывающих множество значений функций, что упрощает алгоритм минимизации их в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Угрюмов Е.П. Цифровая схемотехника. – СПб.: БХВ-СПб, 2000. – 528 с.*
2. *Соловьев В.В. Проектирование цифровых систем на основе программируемых логических интегральных схем. – М.: Горячая линия-Телеком, 2001. – 636 с.*
3. *Коробкова Е.Н., Рубанов В.Г. Разработка алгоритмов сжатия области логических функций // Труды Современного Гуманитарного Университета. – Белгород, 2000. – Вып. 18. – С. 105 – 112.*
4. *Коробкова Е.Н. Анализ табличного алгоритма сжатия области определения полностью определенных логических функций. // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – Х.: НАКУ «ХАИ», 2003. – Вып. 17. – С. 42 – 56.*
5. *Коробкова Е.Н., Рубанов В.Г. Графоаналитический метод нахождения минимальных дизъюнктивных нормальных форм обобщенных логических функций // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 3(19). – С. 46 – 53.*
6. *Коробкова Е.Н. Графоаналитический метод минимизации полностью определенных логических функций в сжатых картах // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ, 2002. – Вип. 6(22). – С. 288 – 298.*

Поступила 22.05.2003

КОРОБКОВА Елена Николаевна, *старший преподаватель Белгородского государственного технологического университета. В 1990 году окончила ХАИ. Область научных интересов – проектирование цифровых систем обработки информации.*