УДК 617.535.4

О СВЯЗИ МЕЖДУ РОСТОМ МОДУЛЯ И РОСТОМ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГОЛОМОРФНОЙ КРИВОЙ, ЗАДАННОЙ НАД ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ

к.ф-м.н. С.В. Львова, И.А. Лебедева
(представил д.ф.-м.н. Г.М. Фельдман)

Для голоморфных кривых, заданных над полуплоскостью $\{\mathrm{Im}\ z>0\}$*, получена интегральная связь между* $\ln\left\|\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi\right\| / \left|\left(\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi), \vec{A}\right)\right|$ *и характеристикой кривой* $\hat{T}(r,\vec{G})$.

Введение. Вопросы изучения поведения мероморфных функций, а также тесно связанных с ними вектор-функций (голоморфные кривые), всегда вызывали большой интерес [1 – 3]. Это вызвано тем, что мероморфные функции естественным образом возникают в спектральной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, в спектральной теории самосопряженных операторов и других задачах современного анализа.

Свойства мероморфных функций, заданных в C, достаточно хорошо изучены. В последние годы появилось много работ, изучающих поведение мероморфных функций в единичном круге, полуплоскости и т. д. Количество публикаций по данной тематике настолько обширно, что упомянем лишь некоторые из них: [4 – 5].

1. Постановка задачи. Голоморфной кривой над полуплоскостью $\{\mathrm{Im}\ z > 0\}$ называется вектор-функция $\vec{G}(z) = \{g_1(z), g_2(z), \ldots, g(z_n)\}$, где $g_i(z)$ – линейно независимые, голоморфные в полуплоскости $\{\mathrm{Im}\ z > 0\}$, необращающиеся в нуль одновременно функции. Для таких кривых введем аналоги характеристик Цудзи.

Положим:

$$\hat{T}(r,\vec{G}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\kappa(r)}^{\pi-\kappa(r)} \ln\left\|\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right\| \frac{d\varphi}{r\sin^2\varphi}; \;\; \kappa(r) = \arcsin r^{-1}; \;\; \left\|\vec{G}\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left|g_i(z)\right|^2;$$

$$\hat{m}(r,\vec{A},\vec{G}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\kappa(r)}^{\pi-\kappa(r)} \ln\frac{\left\|\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi\right\|\left\|\vec{A}\right\|}{\left|(G(re^{i\varphi}\sin\varphi),\vec{A})\right|}\frac{d\varphi}{r\sin^2\varphi}; \quad \hat{N}(r,\vec{A},\vec{G}) = \int\limits_1^r \frac{\hat{n}(t,\vec{A},\vec{G})}{t^2}dt,$$

где $\vec{A}$ – постоянный вектор; $1 < r < \infty$; $\hat{n}(t,\vec{A},\vec{G})$ – число корней скалярного произведения $(\vec{G}(z),\vec{A})$ в области $\left\{\left|z - it/2\right| \le t/2,\ t > 1\right\}$.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $\vec{G}(z)$ – голоморфная кривая, заданная над полуплоскостью $\{\mathrm{Im}\, z > 0\}$ и ее компоненты $\{g_i(z)\}, i = 1, 2, \ldots, n$ голоморфны в некоторой окрестности начала координат. Тогда при любом фиксированном $k > 1$ и некотором δ, $0 < \delta < \pi$ и таком, что для любого измеримого множества $E_r \subset (0,\pi)$ такого, что $\mathrm{mes}E = \delta$ выполняется

$$\int\limits_{E_r} \ln\left\|\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right\| \Big/ \left|(\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi),\vec{A})\right| d\varphi \le \alpha_1(k)\cdot r\cdot\delta\cdot\hat{T}(kr,\vec{G}) + k\cdot r\cdot\delta\cdot\alpha_2(\vec{G}). \quad (1)$$

Теорема 2. Пусть E – измеримое подмножество $(0,\pi)$, $\Phi(\varphi)$ – суммируемая неотрицательная функция на E. $R(r)$ – некоторая положительная функция на $(r \ge r_0 \ge 0)$ $R(r) \to \infty, r \to \infty$ и для некоторого $k > 1$ выполняется $R(kr) = O(R(r))$. И пусть $\vec{G}(z)$ – голоморфная кривая, заданная над полуплоскостью $\{\mathrm{Im}\, z > 0\}$, (ее компоненты $\{g_i(z)\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ голоморфны в некоторой окрестности начала координат) и такая, что $\hat{T}(r,\vec{G}) = O\{R(r)\}$. Далее, для любого $\delta > 0$ существует множество $E_\delta \subset E$, $\mathrm{mes}E_\delta = \delta$, что выполняется одно из трех условий:

а) $\ln\left\|\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right\| \Big/ \left|(\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi),\vec{A})\right| \le \Phi(\varphi)rR(r) + o(R(r))$;

б) $\ln\left\|\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right\| \Big/ \left|(\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi),\vec{A})\right| \ge \Phi(\varphi)rR(r) + o(R(r))$;

в) $n\left\|\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right\| \Big/ \left|(\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi),\vec{A})\right| = \Phi(\varphi)rR(r) + o(R(r))$,

равномерно по φ при $\varphi \in E \setminus E_\delta$. Тогда соответственно:

г) $$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{1}{rR(r)}\int\limits_E n\left\|\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right\| \Big/ \left|(\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi),\vec{A})\right| d\varphi \le \int\limits_E \Phi(\varphi)\,d\varphi; \quad (2)$$

д) $$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{1}{rR(r)}\int\limits_E n\left\|\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right\| \Big/ \left|(\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi),\vec{A})\right| d\varphi \ge \int\limits_E \Phi(\varphi)\,d\varphi; \quad (3)$$

е) $$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{1}{rR(r)}\int\limits_E \ln\left\|\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right\| \Big/ \left|(\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi),\vec{A})\right| d\varphi = \int\limits_E \Phi(\varphi)\,d\varphi. \quad (4)$$

2. Формулировки теорем, которые будут использованы при доказательстве теорем 1 и 2. Пусть f(x) – функция, мероморфная в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ и неравная тождественной постоянной. Обозначим через $\hat{n}(r, f), r \geq 1$ число полюсов функции f(x), лежащих в области $\{|z - ir/2| < r/2, |z| \geq 1\}$. Положим:

$$\hat{N}(r,f) = \int_1^r \frac{\hat{n}(t,f)}{t^2} dt \quad (1 < r < \infty); \quad \hat{m}(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\kappa(r)}^{\pi - \kappa(r)} \ln^+ \left| f(re^{i\varphi} \sin\varphi) \right| \frac{d\varphi}{r \sin^2 \varphi};$$

$$\kappa(r) = \arcsin r^{-1}; \quad \hat{T}(r,f) = \hat{m}(r,f) + \hat{N}(r,f); \quad \hat{M}(r,f) = \max_{\kappa(r) \leq \varphi \leq \pi - \kappa(r)} \left| f(re^{i\varphi} \sin\varphi \right|.$$

Теорема A [6]. Пусть f(z) – функция, голоморфная в $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ и такая, что $\hat{T}(r,f) \to \infty$ при $r \to \infty$. Тогда k > 1 и $\varepsilon > 0$ для всех r, начиная с некоторого $r \geq r_0$, выполняется неравенство

$$\pi(1-\varepsilon)\hat{T}(r) \leq \ln^+ \hat{M}(r,f) \leq C(k) r \hat{T}(kr,f), \tag{5}$$

где C(k) – постоянная, зависящая только от k.

Теорема B [6]. Пусть $\vec{G}(z)$ – голоморфная кривая, заданная над полуплоскостью $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ и ее компоненты $\{g_i(z)\}, i = \overline{1,n}$. Тогда для $\forall\ m \neq k$

$$T(r, g_m/g_k) \leq T(r, \vec{G}) + C.$$

Теорема C [8]. Пусть f(z) – функция, мероморфная в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ и голоморфная в некоторой окрестности начала координат. Тогда при любом фиксированном k > 1 и некотором δ (0 < δ < π для любого измеримого множества $E_r \subset (0, \pi)$ $\operatorname{mes} E = \delta$) справедливо неравенство

$$\int_{E_r} \ln^+ \left| f(re^{i\varphi} \sin\varphi) \right| d\varphi \leq \beta_1(k) r \delta \hat{T}(kr,f) + \beta_2(f,k) r \delta, \quad \forall r > 0.$$

Лемма 1 [7]. Пусть $s > 2r; \chi(r) = \arcsin r^{-1}; \quad \tau_1 = \arcsin r / \sqrt{s^2 r^2 - s^2 + r^2};$

$$\tau_2 = \pi - \tau_1; \; z = re^{i\varphi} \sin\varphi - is/2; \; \Phi(\varphi) = \operatorname{Re}\left(\left(s/2 \cdot e^{i(2\tau - \frac{\pi}{2})} + z \right) \Big/ \left(s/2 \cdot e^{i(2\tau - \frac{\pi}{2})} - z \right) \right).$$

Тогда

$$\sup_{\kappa(r) \leq \varphi \leq \pi - \kappa(r)} (\varphi, \tau) = \begin{cases} \dfrac{r}{s-r} \dfrac{1}{\sin^2 \tau}, & \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2; \\ \dfrac{s-r}{s^2 r \sin^2 \tau - (s-r) - s\sqrt{r^2 - 1} \sin 2\tau + s \cos 2\tau}, & 0 < \tau < \tau_1; \; \tau_2 < \tau < \pi. \end{cases}$$

Лемма 2 [7]. Пусть $b=\rho e^{i\mu}\sin\mu,\ 0<\mu<\pi;\ \ z=re^{i\varphi}\sin\varphi-\frac{is}{2},\ 0<\varphi<\pi;$

$0<r<\frac{s}{2},\ \rho<s.$ Тогда $\ln\left|\left(\frac{s^2}{4}-\overline{(b-\frac{is}{2})z}\right)\Big/\left(\frac{s}{2}(z-(b-\frac{is}{2}))\right)\right|\le\ln\frac{2s}{|r-s|}.$

3. Доказательство теоремы 1.

Запишем формулу Пуассона-Иенсена, примененную к мероморфной функции $g_1\left(z+\frac{is}{2}\right)\cdot\|\vec{A}\|\Big/\left(\vec{G}\left(z+\frac{is}{2}\right),\vec{A}\right)$ в круге $|z|<\frac{s}{2}$:

$$\ln\|\vec{A}\|\cdot|g_1(re^{i\varphi}\sin\varphi|\Big/|(\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi),\vec{A})|\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\frac{\|\vec{A}\|\cdot|g_1(\frac{s}{2}e^{i\varphi}+\frac{s}{2})|}{|(\vec{G}(\frac{s}{2}e^{i\varphi}+\frac{s}{2}),\vec{A})|}\cdot\mathrm{Re}\frac{\frac{s}{2}e^{i\varphi}+z}{\frac{s}{2}e^{i\varphi}-z}d\varphi+\sum_{|b_n-\frac{is}{2}|<\frac{s}{2}}\ln\left|\frac{\frac{s^2}{4}-\overline{(b_n-\frac{is}{2})z}}{\frac{s}{2}(z-(b_n-\frac{is}{2}))}\right|,$$

где b_n – полюсы функции $1/(\vec{G}(z),\vec{A})$.

Полагая $\varphi=2\tau-\pi/2$ и оценивая интеграл и члены ряда с помощью лемм 1 и 2, получаем следующее неравенство:

$$\ln\frac{\|\vec{A}\|\cdot|g_1(re^{i\varphi}\sin\varphi|}{|(\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi),\vec{A})|}\le\frac{2sr}{s-r}\frac{1}{2\pi}\int_{\kappa(s)}^{\pi-\kappa(s)}\ln\frac{\|\vec{A}\|\cdot|g_1(re^{i\tau}\sin\tau)|}{|(\vec{G}(re^{i\tau}\sin\tau),\vec{A})|}\frac{d\tau}{s\sin^2\tau}+$$
$$+\sum_{|b_n-is/2|<s/2}\ln\frac{2s}{|r-\rho_n|}+c_1(k,\vec{G})\cdot s, \qquad (6)$$

где $b_n=\rho_n e^{i\mu_n}\sin\mu_n;\ 0<\mu_n<\pi;\ \varsigma=z+is/2=re^{i\varphi}\sin\varphi;\ \kappa(s)=\arcsin s^{-1};$ $c_1(k,\vec{G})$ – зависит от выбора голоморфной кривой.

Далее, учитывая, что $\ln 2s/|r-\rho_n|\le\ln 2s/|r-s|$ и пользуясь определением характеристических функций для голоморфных кривых, получаем, что $\forall$ $t\in(0,r)$, $\varphi\in[\kappa(r),\pi-\kappa(r)]$ и $r=s/k$, $k>1$ справедливо неравенство

$$\ln\frac{\|\vec{A}\|\cdot|g_1(re^{i\varphi}\sin\varphi|}{|(\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi),\vec{A})|}\le c_2(k)\cdot s\cdot\hat{m}(s,\vec{G},\vec{A})+\ln\frac{2k}{k-1}\hat{n}(s,\vec{G},\vec{A})+c_1(k,\vec{G})\cdot s.$$

Тогда, при тех же условиях, справедливо следующее неравенство

$$\ln\left\|\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right\|\Big/\left|(\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi),\vec{A})\right|\le c_2(k)\cdot s\cdot\hat{m}(s,\vec{G},\vec{A})+\ln\frac{2k}{k-1}\hat{n}(s,\vec{G},\vec{A})+ \\ +\ln\left\|\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right\|\Big/\left|g_1(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right|+c_1(k,\vec{G})\cdot s+c_3(\vec{A})\ . \tag{7}$$

Далее имеем

$$\ln\frac{\left\|\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right\|}{\left|g_1(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right|}=\frac{1}{2}\ln\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{g_i(re^{i\varphi}\sin\varphi)}{g_1(re^{i\varphi}\sin\varphi)}\right|^2\le\frac{1}{2}\ln\left(n\cdot\max_{1\le i\le n}\left|\frac{g_i(re^{i\varphi}\sin\varphi)}{g_1(re^{i\varphi}\sin\varphi)}\right|^2\right).$$

Учитывая последнее неравенство, из (7) получаем

$$\ln\left\|\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right\|\Big/\left|(\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi),\vec{A})\right|\le c_2(k)\cdot s\cdot\hat{m}(s,\vec{G},\vec{A})+\ln\frac{2k}{k-1}\cdot\hat{n}(s,\vec{G},\vec{A})+ \\ +\max_{1\le i\le n}\ln\left|g_i(re^{i\varphi}\sin\varphi)/g_1(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right|+c_1(k,\vec{G})\cdot s+c_3(\vec{A}).$$

Проинтегрируем последнее неравенство по E_r :

$$\int_{E_r}\ln\frac{\left\|\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right\|}{\left|(\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi),\vec{A})\right|}d\varphi\le c_2(k)\cdot s\cdot\delta\cdot\hat{m}(s,\vec{G},\vec{A})+\ln\frac{2k}{k-1}\cdot\delta\cdot\hat{n}(s,\vec{G},\vec{A})+ \\ +\int_{E_r}\max_{1\le i\le n}\ln\left|g_i(re^{i\varphi}\sin\varphi)/g_1(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right|d\varphi++\delta\cdot(c_1(k,\vec{G})\cdot s+c_3(\vec{A})). \tag{8}$$

Далее, используя сформулированную выше теорему C для мероморфной функции $g_{i_0}/g_1=\max\limits_{1\le i\le n}g_i/g_1$, а также тот факт, что

$$\hat{T}(r,\vec{G})=\frac{1}{2\pi}\int_{\kappa(r)}^{\pi-\kappa(r)}\max_{1\le j\le n}\ln\left|g_j(re^{i\varphi}\sin\varphi\right|\frac{d\varphi}{r\sin^2\varphi},$$

получаем

$$\hat{T}(r,\frac{g_{i_0}}{g_1})=\frac{1}{2\pi}\int_{\kappa(r)}^{\pi-\kappa(r)}\ln\max\left\{\left|g_{i_0}\right|,\left|g_1\right|\right\}\frac{d\varphi}{r\sin^2\varphi}\le \\ \le\frac{1}{2\pi}\int_{\kappa(r)}^{\pi-\kappa(r)}\ln\max_{1\le j\le n}\left|g_j(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right|\frac{d\varphi}{r\sin^2\varphi}=\hat{T}(r,\vec{G}). \tag{9}$$

При $s'/s=k$, справедливо

$$\hat{N}(s',\vec{G})\ge\int_{s}^{s'}\frac{\hat{n}(t,\vec{G})}{t^2}\ge\hat{n}(s,\vec{G})\frac{s-s'}{s\cdot s'}=c_3(k)\cdot\hat{n}(s,\vec{G})\cdot\frac{1}{s}. \tag{10}$$

Из (8) с учетом $s/r=k$, $s'/s=k$, а также оценок (9) и (10), получим

$$\int\limits_{E_r} \ln \left\| \vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi) \right\| \Big/ \left| (\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi), \vec{A}) \right| d\varphi \le c_5(k) \cdot r \cdot \delta \cdot \hat{T}(k^2 r, \vec{G}) + k \cdot r \cdot \delta \cdot c_1(\vec{G}).$$

И, наконец, из свойства почти монотонности функции $\hat{T}(r, \vec{G})$ вытекает, что при всех r справедлива оценка

$$\int\limits_{E_r} \ln \frac{\left\| \vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi) \right\|}{\left| (\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi), \vec{A}) \right|} d\varphi \le \alpha_1(k) \cdot r \cdot \delta \cdot \hat{T}(kr, \vec{G}) + k \cdot r \cdot \delta \cdot \alpha_2(\vec{G}).$$

Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Докажем г). С учетом (1) и б), получаем

$$\int\limits_{E} \ln \frac{\left\| \vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi) \right\|}{\left| (\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi), \vec{A}) \right|} d\varphi = \int\limits_{E \setminus E_\delta} \ln \frac{\left\| \vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi) \right\|}{\left| (\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi), \vec{A}) \right|} d\varphi + \int\limits_{E_\delta} \ln \frac{\left\| \vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi) \right\|}{\left| (\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi), \vec{A}) \right|} d\varphi \le$$

$$\le rR(r) \int\limits_{E \setminus E_\delta} \Phi(\varphi) d\varphi + o(R(r)) + \alpha_1(k) r\delta O(R(r)) + \alpha_2(k, f) r\delta.$$

Тогда $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{1}{rR(r)} \int\limits_{E} \ln \left\| \vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi) \right\| \Big/ \left| (\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi), \vec{A}) \right| d\varphi \le \int\limits_{E} \Phi(\varphi) d\varphi + \alpha_1(k)\delta A$,

где A – некоторая константа.

Устремляя δ к нулю, получим неравенство г). Неравенства д) и е) доказываются аналогично. Теорема 2 доказана.

Заключение. В результате для голоморфных кривых, заданных над полуплоскостью $\{\mathrm{Im}\ z > 0\}$, получена интегральная связь между $\ln \left\| \vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi \right\| \Big/ \left| (\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi), \vec{A} \right|$ и характеристикой кривой $\hat{T}(k\ r, \vec{G})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ahlfors L. Uber die asymptotischen Werte der meromorphen Funktion endlicher Ordnung // Acta Acad. Aboensis. Math. Et. Phys. (1932). – V.6, N. 9. – P. 1 – 8.*
2. *Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 571 с.*
3. *Петренко В.П. Целые кривые. – Х.: Вища школа, 1984. – 105 с.*
4. *Марченко И.И., Николенко И.Г. О сильных асимптотических местах голоморфных в круге функций // Математическая физика. Анализ. Геометрия. – Х.: ФТИНТ им. Б.И. Веркина НАН Украины. – 2002. – Вып. 3(9). – С. 369 – 384.*
5. *Lyubarskii Yu., Malinnikova Eu., On approximation of subharmonic functions // J. d`Analyse Math. – 2001. – V.83. – P. 121 – 149.*
6. *Львова С.В. Рост и распределение значений голоморфных функций и голоморфных кривых, заданных над полуплоскостью. – Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата ф-м.н. – Х., 1983. – 16 с.*
7. *Львова С.В. О величинах отклонения мероморфных функций и целых кривых над полуплоскостью // Теория операторов в функциональных про-*

странствах и ее приложения – К.: Наук. думка, 1981. – С. 67 – 81.
8. *Львова С.В., Барсов В.И., Московченко И.В. Связь между ростом модуля и ростом характеристики мероморфной функции, заданной над полуплоскостью // Системи обробки інформації – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2000. – Вип. 3(9). – С. 119 – 122.*

Поступила 30.05.2003

ЛЬВОВА Светлана Владимировна, *кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ИВЦ ХВУ. Окончила мехмат ХГУ. Область научных интересов – современный анализ, теория функций комплексного переменного.*

ЛЕБЕДЕВА Ирина Анатольевна, *с.н.с. ИВЦ ХВУ. Окончила факультет прикладной математики ХИРЭ. Область научных интересов – современный анализ.*