

О СВЯЗИ МЕЖДУ РОСТОМ МОДУЛЯ И РОСТОМ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГОЛОМОРФНОЙ КРИВОЙ, ЗАДАННОЙ НАД ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ

к.ф.-м.н. С.В. Львова, И.А. Лебедева
(представил д.ф.-м.н. Г.М. Фельдман)

Для голоморфных кривых, заданных над полуплоскостью $\{Im z > 0\}$, получена интегральная связь между $\ln \|\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi)\| / \left\| \left(\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi), \bar{A} \right) \right\|$ и характеристикой кривой $\hat{T}(r, \bar{G})$.

Введение. Вопросы изучения поведения мероморфных функций, а также тесно связанных с ними вектор-функций (голоморфные кривые), всегда вызывали большой интерес [1 – 3]. Это вызвано тем, что мероморфные функции естественным образом возникают в спектральной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, в спектральной теории самосопряженных операторов и других задачах современного анализа.

Свойства мероморфных функций, заданных в C , достаточно хорошо изучены. В последние годы появилось много работ, изучающих поведение мероморфных функций в единичном круге, полуплоскости и т. д. Количество публикаций по данной тематике настолько обширно, что упомянем лишь некоторые из них: [4 – 5].

1. Постановка задачи. Голоморфной кривой над полуплоскостью $\{Im z > 0\}$ называется вектор-функция $\bar{G}(z) = \{g_1(z), g_2(z), \dots, g_n(z)\}$, где $g_i(z)$ – линейно независимые, голоморфные в полуплоскости $\{Im z > 0\}$, необращающиеся в нуль одновременно функции. Для таких кривых введем аналоги характеристик Цудзи.

Положим:

$$\hat{T}(r, \bar{G}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\kappa(r)}^{\pi - \kappa(r)} \ln \|\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi)\| \frac{d\varphi}{r \sin^2 \varphi}; \quad \kappa(r) = \arcsin r^{-1}; \quad \|\bar{G}\|^2 = \sum_{i=1}^n |g_i(z)|^2;$$

$$\hat{m}(r, \bar{A}, \bar{G}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\kappa(r)}^{\pi - \kappa(r)} \ln \frac{\|\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi)\| \|\bar{A}\|}{\|(\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi), \bar{A})\|} \frac{d\varphi}{r \sin^2 \varphi}; \quad \hat{N}(r, \bar{A}, \bar{G}) = \int_1^r \frac{\hat{n}(t, \bar{A}, \bar{G})}{t^2} dt,$$

где \bar{A} – постоянный вектор; $1 < r < \infty$; $\hat{n}(t, \bar{A}, \bar{G})$ – число корней скалярного произведения $(\bar{G}(z), \bar{A})$ в области $\{|z - it/2| \leq t/2, t > 1\}$.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $\bar{G}(z)$ – голоморфная кривая, заданная над полуплоскостью $\{\text{Im } z > 0\}$ и ее компоненты $\{g_i(z)\}, i = 1, 2, \dots, n$ голоморфны в некоторой окрестности начала координат. Тогда при любом фиксированном $k > 1$ и некотором $\delta, 0 < \delta < \pi$ и таком, что для любого измеримого множества $E_r \subset (0, \pi)$ такого, что $\text{mes} E = \delta$ выполняется

$$\int_{E_r} \ln \frac{\|\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi)\|}{\|(\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi), \bar{A})\|} d\varphi \leq \alpha_1(k) \cdot r \cdot \delta \cdot \hat{T}(kr, \bar{G}) + k \cdot r \cdot \delta \cdot \alpha_2(\bar{G}). \quad (1)$$

Теорема 2. Пусть E – измеримое подмножество $(0, \pi)$, $\Phi(\varphi)$ – суммируемая неотрицательная функция на E . $R(r)$ – некоторая положительная функция на $(r \geq r_0 \geq 0)$ $R(r) \rightarrow \infty, r \rightarrow \infty$ и для некоторого $k > 1$ выполняется $R(kr) = O(R(r))$. И пусть $\bar{G}(z)$ – голоморфная кривая, заданная над полуплоскостью $\{\text{Im } z > 0\}$, (ее компоненты $\{g_i(z)\}, i = 1, 2, \dots, n$ голоморфны в некоторой окрестности начала координат) и такая, что $\hat{T}(r, \bar{G}) = O\{R(r)\}$. Далее, для любого $\delta > 0$ существует множество $E_\delta \subset E$, $\text{mes} E_\delta = \delta$, что выполняется одно из трех условий:

$$\text{а) } \ln \frac{\|\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi)\|}{\|(\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi), \bar{A})\|} \leq \Phi(\varphi)rR(r) + o(R(r));$$

$$\text{б) } \ln \frac{\|\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi)\|}{\|(\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi), \bar{A})\|} \geq \Phi(\varphi)rR(r) + o(R(r));$$

$$\text{в) } n \frac{\|\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi)\|}{\|(\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi), \bar{A})\|} = \Phi(\varphi)rR(r) + o(R(r)),$$

равномерно по φ при $\varphi \in E \setminus E_\delta$. Тогда соответственно:

$$\text{г) } \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{rR(r)} \int_E n \frac{\|\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi)\|}{\|(\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi), \bar{A})\|} d\varphi \leq \int_E \Phi(\varphi) d\varphi; \quad (2)$$

$$\text{д) } \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{rR(r)} \int_E n \frac{\|\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi)\|}{\|(\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi), \bar{A})\|} d\varphi \geq \int_E \Phi(\varphi) d\varphi; \quad (3)$$

$$\text{е) } \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{rR(r)} \int_E \ln \frac{\|\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi)\|}{\|(\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi), \bar{A})\|} d\varphi = \int_E \Phi(\varphi) d\varphi. \quad (4)$$

2. Формулировки теорем, которые будут использованы при доказательстве теорем 1 и 2. Пусть $f(x)$ – функция, мероморфная в полуплоскости $\{\text{Im } z > 0\}$ и неравная тождественной постоянной. Обозначим через $\hat{n}(r, f), r \geq 1$ число полюсов функции $f(x)$, лежащих в области $\{|z - ir/2| < r/2, |z| \geq 1\}$. Положим:

$$\hat{N}(r, f) = \int_1^r \frac{\hat{n}(t, f)}{t^2} dt \quad (1 < r < \infty); \quad \hat{m}(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\kappa(r)}^{\pi - \kappa(r)} \ln^+ |f(re^{i\varphi} \sin \varphi)| \frac{d\varphi}{r \sin^2 \varphi};$$

$$\kappa(r) = \arcsin r^{-1}; \quad \hat{T}(r, f) = \hat{m}(r, f) + \hat{N}(r, f); \quad \hat{M}(r, f) = \max_{\kappa(r) \leq \varphi \leq \pi - \kappa(r)} |f(re^{i\varphi} \sin \varphi)|.$$

Теорема А [6]. Пусть $f(z)$ – функция, голоморфная в $\{\text{Im } z > 0\}$ и такая, что $\hat{T}(r, f) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Тогда $k > 1$ и $\varepsilon > 0$ для всех r , начиная с некоторого $r \geq r_0$, выполняется неравенство

$$\pi(1 - \varepsilon)\hat{T}(r) \leq \ln^+ \hat{M}(r, f) \leq C(k)r\hat{T}(kr, f), \quad (5)$$

где $C(k)$ – постоянная, зависящая только от k .

Теорема В [6]. Пусть $\vec{G}(z)$ – голоморфная кривая, заданная над полуплоскостью $\{\text{Im } z > 0\}$ и ее компоненты $\{g_i(z)\}, i = \overline{1, n}$. Тогда для $\forall m \neq k$

$$T(r, g_m/g_k) \leq T(r, \vec{G}) + C.$$

Теорема С [8]. Пусть $f(z)$ – функция, мероморфная в полуплоскости $\{\text{Im } z > 0\}$ и голоморфная в некоторой окрестности начала координат. Тогда при любом фиксированном $k > 1$ и некотором δ ($0 < \delta < \pi$ для любого измеримого множества $E_r \subset (0, \pi)$ $\text{mes} E = \delta$) справедливо неравенство

$$\int_{E_r} \ln^+ |f(re^{i\varphi} \sin \varphi)| d\varphi \leq \beta_1(k)r\delta\hat{T}(kr, f) + \beta_2(f, k)r\delta, \quad \forall r > 0.$$

Лемма I [7]. Пусть $s > 2r; \chi(r) = \arcsin r^{-1}; \tau_1 = \arcsin r/\sqrt{s^2 r^2 - s^2 + r^2};$
 $\tau_2 = \pi - \tau_1; z = re^{i\varphi} \sin \varphi - is/2; \Phi(\varphi) = \text{Re} \left(\frac{\left(s/2 \cdot e^{i(2\tau - \frac{\pi}{2})} + z \right)}{\left(s/2 \cdot e^{i(2\tau - \frac{\pi}{2})} - z \right)} \right).$

Тогда

$$\sup_{\kappa(r) \leq \varphi \leq \pi - \kappa(r)}(\varphi, \tau) = \begin{cases} \frac{r}{s-r} \frac{1}{\sin^2 \tau}, & \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2; \\ \frac{s-r}{s^2 r \sin^2 \tau - (s-r) - s\sqrt{r^2 - 1} \sin 2\tau + s \cos 2\tau}, & 0 < \tau < \tau_1; \tau_2 < \tau < \pi. \end{cases}$$

Лемма 2 [7]. Пусть $b = \rho e^{i\mu} \sin \mu$, $0 < \mu < \pi$; $z = re^{i\varphi} \sin \varphi - \frac{is}{2}$, $0 < \varphi < \pi$;

$$0 < r < \frac{s}{2}, \rho < s. \text{ Тогда } \ln \left| \frac{\left(\frac{s^2}{4} - \overline{(b - \frac{is}{2})z} \right)}{\left(\frac{s}{2} (z - (b - \frac{is}{2})) \right)} \right| \leq \ln \frac{2s}{|r-s|}.$$

3. Доказательство теоремы 1.

Запишем формулу Пуассона-Иенсена, примененную к мероморфной функции $g_1 \left(z + \frac{is}{2} \right) \cdot \|\bar{A}\| / \left(\bar{G} \left(z + \frac{is}{2} \right), \bar{A} \right)$ в круге $|z| < \frac{s}{2}$:

$$\begin{aligned} & \ln \left| \|\bar{A}\| \cdot |g_1(re^{i\varphi} \sin \varphi)| / \left| \left(\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi), \bar{A} \right) \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{\left| \|\bar{A}\| \cdot \left| g_1 \left(\frac{s}{2} e^{i\varphi} + \frac{s}{2} \right) \right|}{\left| \left(\bar{G} \left(\frac{s}{2} e^{i\varphi} + \frac{s}{2} \right), \bar{A} \right) \right|} \cdot \operatorname{Re} \frac{\frac{s}{2} e^{i\varphi} + z}{\frac{s}{2} e^{i\varphi} - z} d\varphi + \sum_{|b_n - \frac{is}{2}| < \frac{s}{2}} \ln \left| \frac{\frac{s^2}{4} - \overline{(b_n - \frac{is}{2})z}}{\frac{s}{2} (z - (b_n - \frac{is}{2}))} \right|, \end{aligned}$$

где b_n – полюсы функции $1/(\bar{G}(z), \bar{A})$.

Полагая $\varphi = 2\tau - \pi/2$ и оценивая интеграл и члены ряда с помощью лемм 1 и 2, получаем следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \ln \frac{\left| \|\bar{A}\| \cdot |g_1(re^{i\varphi} \sin \varphi)|}{\left| \left(\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi), \bar{A} \right) \right|} & \leq \frac{2sr}{s-r} \frac{1}{2\pi} \int_{\kappa(s)}^{\pi-\kappa(s)} \ln \frac{\left| \|\bar{A}\| \cdot |g_1(re^{i\tau} \sin \tau)|}{\left| \left(\bar{G}(re^{i\tau} \sin \tau), \bar{A} \right) \right|} \frac{d\tau}{s \sin^2 \tau} + \\ & + \sum_{|b_n - is/2| < s/2} \ln \frac{2s}{|r - \rho_n|} + c_1(k, \bar{G}) \cdot s, \end{aligned} \quad (6)$$

где $b_n = \rho_n e^{i\mu_n} \sin \mu_n$; $0 < \mu_n < \pi$; $\zeta = z + is/2 = re^{i\varphi} \sin \varphi$; $\kappa(s) = \arcsin s^{-1}$; $c_1(k, \bar{G})$ – зависит от выбора голоморфной кривой.

Далее, учитывая, что $\ln 2s/|r - \rho_n| \leq \ln 2s/|r - s|$ и пользуясь определением характеристических функций для голоморфных кривых, получаем, что $\forall t \in (0, r)$, $\varphi \in [\kappa(r), \pi - \kappa(r)]$ и $r = s/k$, $k > 1$ справедливо неравенство

$$\ln \frac{\left| \|\bar{A}\| \cdot |g_1(re^{i\varphi} \sin \varphi)|}{\left| \left(\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi), \bar{A} \right) \right|} \leq c_2(k) \cdot s \cdot \hat{m}(s, \bar{G}, \bar{A}) + \ln \frac{2k}{k-1} \hat{n}(s, \bar{G}, \bar{A}) + c_1(k, \bar{G}) \cdot s.$$

Тогда, при тех же условиях, справедливо следующее неравенство

$$\ln \left\| \bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi) \right\| / \left| (\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi), \bar{A}) \right| \leq c_2(k) \cdot s \cdot \hat{m}(s, \bar{G}, \bar{A}) + \ln \frac{2k}{k-1} \hat{n}(s, \bar{G}, \bar{A}) + \ln \left\| \bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi) \right\| / \left| g_1(re^{i\varphi} \sin \varphi) \right| + c_1(k, \bar{G}) \cdot s + c_3(\bar{A}). \quad (7)$$

Далее имеем

$$\ln \left\| \frac{\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi)}{g_1(re^{i\varphi} \sin \varphi)} \right\| = \frac{1}{2} \ln \sum_{i=1}^n \left| \frac{g_i(re^{i\varphi} \sin \varphi)}{g_1(re^{i\varphi} \sin \varphi)} \right|^2 \leq \frac{1}{2} \ln \left(n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{g_i(re^{i\varphi} \sin \varphi)}{g_1(re^{i\varphi} \sin \varphi)} \right|^2 \right).$$

Учитывая последнее неравенство, из (7) получаем

$$\ln \left\| \bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi) \right\| / \left| (\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi), \bar{A}) \right| \leq c_2(k) \cdot s \cdot \hat{m}(s, \bar{G}, \bar{A}) + \ln \frac{2k}{k-1} \cdot \hat{n}(s, \bar{G}, \bar{A}) + \max_{1 \leq i \leq n} \ln \left| g_i(re^{i\varphi} \sin \varphi) / g_1(re^{i\varphi} \sin \varphi) \right| + c_1(k, \bar{G}) \cdot s + c_3(\bar{A}).$$

Проинтегрируем последнее неравенство по E_r :

$$\int_{E_r} \ln \left\| \frac{\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi)}{(\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi), \bar{A})} \right\| d\varphi \leq c_2(k) \cdot s \cdot \delta \cdot \hat{m}(s, \bar{G}, \bar{A}) + \ln \frac{2k}{k-1} \cdot \delta \cdot \hat{n}(s, \bar{G}, \bar{A}) + \int_{E_r} \max_{1 \leq i \leq n} \ln \left| g_i(re^{i\varphi} \sin \varphi) / g_1(re^{i\varphi} \sin \varphi) \right| d\varphi + \delta \cdot (c_1(k, \bar{G}) \cdot s + c_3(\bar{A})). \quad (8)$$

Далее, используя сформулированную выше теорему С для мероморфной функции $g_{i_0}/g_1 = \max_{1 \leq i \leq n} g_i/g_1$, а также тот факт, что

$$\hat{T}(r, \bar{G}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\kappa(r)}^{\pi - \kappa(r)} \max_{1 \leq j \leq n} \ln \left| g_j(re^{i\varphi} \sin \varphi) \right| \frac{d\varphi}{r \sin^2 \varphi},$$

получаем

$$\begin{aligned} \hat{T}(r, \frac{g_{i_0}}{g_1}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\kappa(r)}^{\pi - \kappa(r)} \ln \max \left\{ \left| g_{i_0} \right|, \left| g_1 \right| \right\} \frac{d\varphi}{r \sin^2 \varphi} \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\kappa(r)}^{\pi - \kappa(r)} \ln \max_{1 \leq j \leq n} \left| g_j(re^{i\varphi} \sin \varphi) \right| \frac{d\varphi}{r \sin^2 \varphi} = \hat{T}(r, \bar{G}). \end{aligned} \quad (9)$$

При $s'/s = k$, справедливо

$$\hat{N}(s', \bar{G}) \geq \int_s^{s'} \frac{\hat{n}(t, \bar{G})}{t^2} \geq \hat{n}(s, \bar{G}) \frac{s-s'}{s \cdot s'} = c_3(k) \cdot \hat{n}(s, \bar{G}) \cdot \frac{1}{s}. \quad (10)$$

Из (8) с учетом $s/r = k$, $s'/s = k$, а также оценок (9) и (10), получим

$$\int_{E_r} \ln \left\| \frac{\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi)}{(\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi), \bar{A})} \right\| d\varphi \leq c_5(k) \cdot r \cdot \delta \cdot \hat{T}(k^2 r, \bar{G}) + k \cdot r \cdot \delta \cdot c_1(\bar{G}).$$

И, наконец, из свойства почти монотонности функции $\hat{T}(r, \bar{G})$ вытекает, что при всех r справедлива оценка

$$\int_{E_r} \ln \frac{\left\| \bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi) \right\|}{\left| (\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi), \bar{A}) \right|} d\varphi \leq \alpha_1(k) \cdot r \cdot \delta \cdot \hat{T}(kr, \bar{G}) + k \cdot r \cdot \delta \cdot \alpha_2(\bar{G}).$$

Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Докажем г). С учетом (1) и б), получаем

$$\begin{aligned} \int_E \ln \frac{\left\| \bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi) \right\|}{\left| (\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi), \bar{A}) \right|} d\varphi &= \int_{E \setminus E_\delta} \ln \frac{\left\| \bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi) \right\|}{\left| (\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi), \bar{A}) \right|} d\varphi + \int_{E_\delta} \ln \frac{\left\| \bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi) \right\|}{\left| (\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi), \bar{A}) \right|} d\varphi \leq \\ &\leq rR(r) \int \Phi(\varphi) d\varphi + o(R(r)) + \alpha_1(k)r\delta O(R(r)) + \alpha_2(k, f)r\delta. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{rR(r)} \int_E \ln \left\| \frac{\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi)}{(\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi), \bar{A})} \right\| d\varphi \leq \int_E \Phi(\varphi) d\varphi + \alpha_1(k)\delta A,$$

где A – некоторая константа.

Устремляя δ к нулю, получим неравенство г). Неравенства д) и е) доказываются аналогично. Теорема 2 доказана.

Заключение. В результате для голоморфных кривых, заданных над полуплоскостью $\{\text{Im } z > 0\}$, получена интегральная связь между $\ln \left\| \frac{\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi)}{(\bar{G}(re^{i\varphi} \sin \varphi), \bar{A})} \right\|$ и характеристикой кривой $\hat{T}(k, r, \bar{G})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ahlfors L. *Über die asymptotischen Werte der meromorphen Funktion endlicher Ordnung* // *Acta Acad. Aboensis. Math. Et. Phys.* (1932). – V.6, N. 9. – P. 1 – 8.
2. Гольдберг А.А., Островский И.В. *Распределение значений мероморфных функций.* – М.: Наука, 1970. – 571 с.
3. Петренко В.П. *Целые кривые.* – Х.: Вища школа, 1984. – 105 с.
4. Марченко И.И., Николенко И.Г. *О сильных асимптотических местах голоморфных в круге функций* // *Математическая физика. Анализ. Геометрия.* – Х.: ФТИНТ им. Б.И. Веркина НАН Украины. – 2002. – Вып. 3(9). – С. 369 – 384.
5. Lyubarskii Yu., Malinnikova Eu., *On approximation of subharmonic functions* // *J. d'Analyse Math.* – 2001. – V.83. – P. 121 – 149.
6. Львова С.В. *Рост и распределение значений голоморфных функций и голоморфных кривых, заданных над полуплоскостью.* – Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата ф-м.н. – Х., 1983. – 16 с.
7. Львова С.В. *О величинах отклонения мероморфных функций и целых кривых над полуплоскостью* // *Теория операторов в функциональных про-*

- странствах и ее приложения – К.: Наук. думка, 1981. – С. 67 – 81.*
8. *Львова С.В., Барсов В.И., Московченко И.В. Связь между ростом модуля и ростом характеристики мероморфной функции, заданной над полуплоскостью // Системы обработки информации – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2000. – Вып. 3(9). – С. 119 – 122.*

Поступила 30.05.2003

***ЛЬВОВА Светлана Владимировна**, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ИВЦ ХВУ. Окончила мехмат ХГУ. Область научных интересов – современный анализ, теория функций комплексного переменного.*

***ЛЕБЕДЕВА Ирина Анатольевна**, с.н.с. ИВЦ ХВУ. Окончила факультет прикладной математики ХИРЭ. Область научных интересов – современный анализ.*
