

## МЕТОД ПЕРЕСЧЕТА КООРДИНАТ ВОЗДУШНЫХ ОБЪЕКТОВ ИЗ ТОПОЦЕНТРИЧЕСКОЙ В ГЕОДЕЗИЧЕСКУЮ СИСТЕМУ КООРДИНАТ

к.т.н. В.М. Грачёв, А.Л. Василенко  
(представил д.т.н. Г.В. Певцов)

*Рассматривается метод пересчета координат воздушных объектов из топоцентрической прямоугольной системы координат в геодезическую систему координат. Пересчет осуществляется на земном эллипсоиде, без замены его сферой.*

**Постановка проблемы.** При решении задач обработки и объединения радиолокационной информации от различных источников (третичной обработки) в автоматизированных системах управления возникает необходимость пересчета координат положения воздушных объектов (ВО) из одной системы координат в другую. В настоящее время в системах управления при передаче и в процессе обработки информации, в основном, используется топоцентрическая прямоугольная система координат (ТПСК), связанная с точкой стояния пункта управления. Для решения многих задач необходимо пересчитывать координаты объектов в геодезическую систему координат (ГСК) с точностью не ниже той, которую обеспечивают источники информации и требуют потребители информации.

**Анализ литературы.** Анализ известных методов и алгоритмов пересчета координат, используемых в системах управления, показывает, что наиболее широко используются две методики пересчета. Первая основывается на решении так называемой прямой геодезической задачи по способу вспомогательной точки, причем при расчетах земной эллипсоид заменяется сферой с неким эквивалентным радиусом. Вторая методика предполагает проведение преобразований, связанных с поворотом осей координат и переносом центра ТПСК в центр Земли, причем земной эллипсоид при расчетах также заменяется сферой. Такая замена неизбежно приводит к существенным ошибкам при пересчете координат: при определении местоположения – порядка нескольких угловых минут и высоты ВО – порядка десятков метров. Эти ошибки имеют сложную нелинейную зависимость от дальности и высоты ВО относительно точки стояния

пункта управления (ПУ).

**Цель статьи.** Разработка и обоснование метода пересчета координат положения ВО из ТПСК в ГСК, который обеспечит высокую точность пересчета. Для обеспечения требуемой точности разрабатываемого метода расчеты следует производить, не заменяя земной эллипсоид сферой, т.е. необходимо использовать математический аппарат пересчета координат на эллипсоиде.

**Основной раздел.** Исходные данные при разработке метода:

1) параметры земного эллипсоида (референц-эллипсоида) – большая полуось  $a$  и полярное сжатие  $f$ , причем известны ошибки их определения [1]:  $\Delta\alpha = \pm 0,1$  м,  $\Delta f = \pm 0,00001$ ;

2) геодезические координаты точки стояния ПУ: широта –  $B_{ПУ}$ , долгота –  $L_{ПУ}$ , высота над земным эллипсоидом –  $H_{ПУ}$ , ошибки определения координат ПУ с помощью системы GPS в режиме реального времени по широте и долготе составляют  $\Delta B = \Delta L = \pm 0,003'$  (в линейной мере это приблизительно 0,1 м), по высоте  $\Delta H = \pm 0,2$  м [2];

3) координаты ВО в ТПСК данного ПУ –  $x, y, z$  (центр системы координат в точке стояния ПУ, ось  $Ox$  – на север по касательной к истинному меридиану, ось  $Oy$  – на восток по касательной к параллели, ось  $Oz$  – в зенит по нормали к земному эллипсоиду), ошибки определения координат ВО  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  зависят от точностных характеристик используемых средств наблюдения и по абсолютной величине значительно превышают ошибки определения координат точки стояния ПУ.

Выходными данными являются геодезические координаты положения ВО: широта –  $B$ , долгота –  $L$ , высота –  $H$ , причем ошибка определения этих координат будет иметь сложную функциональную зависимость от ошибок используемых входных данных, т.е.

$$\Delta B, \Delta L, \Delta H = \varphi(\Delta\alpha, \Delta f, \Delta B_{ПУ}, \Delta L_{ПУ}, \Delta H_{ПУ}, \Delta x, \Delta y, \Delta z). \quad (1)$$

Разрабатываемый метод пересчета должен удовлетворять следующему требованию: ошибки пересчета координат, т.е. дополнительные ошибки, вносимые при использовании выбранного математического аппарата, должны быть на порядок меньше наименьших ошибок под знаком функции в (1), при этом алгоритм пересчета должен быть реализован в реальном масштабе времени.

Предложенный метод реализует пересчет в два этапа. На первом этапе определяются координаты ВО в геоцентрической прямоугольной системе координат (центр системы координат совпадает с центром земного эллипсоида, ось  $Ox$  располагается в плоскости экватора в гринвичском меридиане, ось  $Oy$  также располагается в плоскости экватора в ме-

ридиане, плоскость которого составляет с плоскостью гринвичского меридиана угол  $90^\circ$ , ось  $OZ$  располагается по полярной оси к северному полюсу). На втором этапе, исходя из координат ВО в ГПСК, определяются его координаты в ГСК.

*1 этап.* Координаты ВО в геоцентрической прямоугольной системе координат (ГПСК) будут определяться суммой двух векторов – вектора точки стояния ПУ (начало в центре земного эллипсоида, конец в точке стояния ПУ) и вектора ВО (начало в точке стояния ПУ, конец в точке нахождения ВО).

Координаты вектора точки стояния ПУ определяются по известным формулам [3, 4] перехода от геодезических к геоцентрическим координатам

$$X_{\text{ПУ}} = (N + H_{\text{ПУ}}) \cdot \cos B_{\text{ПУ}} \cdot \cos L_{\text{ПУ}}, \quad (2)$$

$$Y_{\text{ПУ}} = (N + H_{\text{ПУ}}) \cdot \cos B_{\text{ПУ}} \cdot \sin L_{\text{ПУ}}, \quad (3)$$

$$Z_{\text{ПУ}} = (N \cdot (1 - e^2) + H_{\text{ПУ}}) \cdot \sin B_{\text{ПУ}}, \quad (4)$$

$$N = a \cdot (1 - e^2 \cdot \sin^2 B_{\text{ПУ}})^{-\frac{1}{2}}$$

где  $N$  – радиус кривизны первого вертикала в точке стояния ПУ;  $e^2$  – квадрат первого эксцентриситета земного эллипсоида,  $e^2 = 2f - f^2$ ;  $a$  – большая полуось земного эллипсоида;  $H_{\text{ПУ}}$  – высота ПУ над земным эллипсоидом, которая учитывает превышение геоида над эллипсоидом  $H_{\Gamma}$  в точке стояния ПУ и высоту ПУ над уровнем моря  $H_{\text{М}}$ .

Координаты вектора ВО в ГПСК можно получить из имеющихся координат в ТПСК с помощью матрицы перехода. Матрица перехода  $M$  из ТПСК в систему координат с центром в точке стояния ПУ и с осями, коллинеарными осям ГПСК, будет иметь вид:

$$M = \begin{pmatrix} \sin B_{\text{ПУ}} \cdot \cos L_{\text{ПУ}} & \sin L_{\text{ПУ}} & \cos B_{\text{ПУ}} \cdot \cos L_{\text{ПУ}} \\ \sin B_{\text{ПУ}} \cdot \sin L_{\text{ПУ}} & \cos L_{\text{ПУ}} & \cos B_{\text{ПУ}} \cdot \sin L_{\text{ПУ}} \\ \cos B_{\text{ПУ}} & 0 & \sin B_{\text{ПУ}} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, координаты ВО в ГПСК будут определяться следующим выражением:

$$\begin{pmatrix} X_{\text{ВО}} \\ Y_{\text{ВО}} \\ Z_{\text{ВО}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin B_{\text{ПУ}} \cos L_{\text{ПУ}} & \sin L_{\text{ПУ}} & \cos B_{\text{ПУ}} \cos L_{\text{ПУ}} \\ \sin B_{\text{ПУ}} \sin L_{\text{ПУ}} & \cos L_{\text{ПУ}} & \cos B_{\text{ПУ}} \sin L_{\text{ПУ}} \\ \cos B_{\text{ПУ}} & 0 & \sin B_{\text{ПУ}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{\text{ПУ}} \\ Y_{\text{ПУ}} \\ Z_{\text{ПУ}} \end{pmatrix}.$$

*2 этап.* На основе полученных геоцентрических координат определяются геодезические координаты ВО, причем при расчетах используются математические соотношения для земного эллипсоида. Целесообразно установить следующую последовательность нахождения искомых коор-

динат – долгота, широта, высота.

*Вычисление долготы.* Долгота ВО определяется из (1) и (2) по формуле

$$L = 2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{Y_{\text{ВО}}}{X_{\text{ВО}} + R},$$

где  $R = \sqrt{X_{\text{ВО}} + Y_{\text{ВО}}}$ .

*Вычисление широты.* Широта ВО может быть найдена из известного [3, 4] трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} B = \frac{Z_{\text{ВО}} + e^2 \cdot N \cdot \sin B}{R} \quad (5)$$

методом последовательных приближений. Анализ этого уравнения с точки зрения условий сходимости итерационных процессов, скорости приближения их к корню, оценки точности получаемых результатов, удобства вычислений показал, что для вычисления широты целесообразно преобразовать (5) следующим образом.

Заменим  $\operatorname{tg} B$  и  $\sin B$  их выражениями через приведенную широту  $U$  ( $\operatorname{tg} U = \operatorname{tg} B \cdot \sqrt{1 - e^2}$ ), получим

$$\operatorname{tg} U = A + C \cdot \sin U, \quad (6)$$

где  $A = Z \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot R^{-1}$ ,  $C = a \cdot e^2 \cdot R^{-1}$  при  $R \neq 0$ .

С помощью тождества  $C \sin U = C \sin U (\sin^2 U + \cos^2 U)$  выражение (6) можно представить в следующем виде

$$\operatorname{tg} U = \frac{A + C \cdot \sin^3 U}{1 - C \cdot \cos^3 U}. \quad (7)$$

Обозначив  $\operatorname{tg} U = t$ , запишем уравнение (7) в форме  $t = \varphi(t)$ , где

$$\varphi(t) = \frac{A + C \cdot t^3 \cdot (1 + t^2)^{-\frac{3}{2}}}{1 - C \cdot (1 + t^2)^{-\frac{3}{2}}}. \quad (8)$$

Решение такого уравнения находится методом последовательных приближений по рекуррентной формуле  $t_k = \varphi(t_{k-1})$ , количество итераций определяется требуемой точностью. В функциях с геодезической широтой итерационный процесс примет вид

$$\operatorname{tg} B_k = \frac{n_1 \cdot Z_{\text{ВО}} + n_2 \cdot (n_1 \cdot \operatorname{tg} B_{k-1})^3 \cdot (1 + n_1^2 \cdot \operatorname{tg}^2 B_{k-1})^{-\frac{3}{2}}}{R - n_2 \cdot (1 + n_1^2 \cdot \operatorname{tg}^2 B_{k-1})^{-\frac{3}{2}}}, \quad (9)$$

где  $n_1 = \sqrt{1 - e^2} = 1 - f$ ;  $n_2 = a \cdot e^2 = a \cdot (2f - f^2)$ .

Определим начальное значение широты  $B_0$ . Учитывая, что высота полета ВО намного меньше параметра  $a$ , из системы уравнений (2), (3), (4) полагая  $H = 0$ , можно получить формулу для определения начального значения широты  $B_0$ :

$$\operatorname{tg} B_0 = \frac{Z_{\text{ВО}}}{R \cdot n_1}.$$

Количество итераций в (9) определяется требуемой точностью вычислений. Проведенное моделирование показало, что уже после первой итерации ( $k = 1$ ) ошибка составит  $\Delta B_1 = 0,012''$  (в линейной мере примерно 0,37 м). После второй итерации ошибка составляет  $\Delta B_2 = 2'' \cdot 10^{-9}$ , т.е. имеет место избыток точности. Следует отметить, что ошибка пересчета максимальна при  $B = 45^\circ$ , и убывает по мере удаления ВО к полюсу или экватору (при одинаковой высоте ВО).

Таким образом, для определения широты с требуемой ошибкой  $|\Delta B| \leq 0,0001^\circ$  (что соответствует 0,03 м в линейной мере) при использовании формулы (9) потребуется не более двух итераций при любом положении ВО по широте относительно местоположения КП.

*Вычисление высоты.* Для определения высоты, в зависимости от широты, рекомендуются зависимости [4, 5]

$$H = R \cdot (\cos B)^{-1} - N, \quad \text{если } 0^\circ \leq B \leq 45^\circ; \quad (10)$$

$$H = Z \cdot (\sin B)^{-1} - N \cdot (1 - e^2), \quad \text{если } 45^\circ < B \leq 90^\circ. \quad (11)$$

Учитывая географическое положение Украины, следует использовать такое соотношение, которое даст стабильные по точности результаты на любой широте. Умножая обе части выражения (10) на  $\cos^2 B$ , а (11) на  $\sin^2 B$ , после сложения и преобразований получим универсальную формулу

$$H = Z_{\text{ВО}} \cdot \sin B + R \cdot \cos B - a \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \sin^2 B. \quad (12)$$

Для уменьшения объемов вычислений выразим в (12) функции  $\sin B$  и  $\cos B$  через  $\operatorname{tg} B$ , тогда выражение (12) примет вид

$$H = \frac{Z_{\text{ВО}} \cdot \operatorname{tg} B + R - a \cdot \sqrt{1 + n_1^2} \cdot \operatorname{tg}^2 B}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 B}}. \quad (13)$$

Уравнение (13) теряет смысл при  $|B|=90^\circ$ , поэтому следует руководствоваться следующим правилом: при уменьшении  $R$  меньше пороого-

вого уровня ( $R_{\text{пор}} = 0,1$  м) высота ВО определяется из выражения

$$H = |Z_{\text{ВО}}| - a \cdot (1 - f).$$

Проведенное моделирование показало, что наибольшая величина ошибки вычисления высоты составляет  $\Delta H = \pm 6 \cdot 10^{-8}$  м.

**Выводы.** В предлагаемом методе пересчета координат положения ВО из ТПСК в ГСК использован математический аппарат геометрии на эллипсоиде и математический аппарат решения трансцендентных уравнений, что позволило получить новый научный результат. Практический результат состоит в том, что предлагаемый метод обеспечивает высокую точность пересчета и может быть реализован на современных вычислительных средствах в реальном масштабе времени. Внедрение данного метода в математическое обеспечение автоматизированных систем управления обеспечит требуемые точностные характеристики алгоритмов обработки и объединения информации о воздушных объектах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бурша М. *Фундаментальные геодезические постоянные* // *Геодезия и картография*. – 1996. – № 5. – С. 15 – 22.
2. *Использование за рубежом глобальных спутниковых систем для создания и развития координатной основы: Обзорная информация*. – М.: ЦНИИГАиК, 1998. – 40 с.
3. *Алексакин Е.П., Ширенин А.М. Метод и алгоритмы определения параметров преобразования между различными системами координат применительно к задачам обработки спутниковых измерений* // *Геодезия и картография*. – 2002. – № 6. – С. 4 – 26.
4. *Машимов М.М. Геодезия. Теоретическая геодезия: Справочное пособие*. – М.: Недра, 1991. – 268 с.
5. *Баранов В.Н., Бойко Е.Г., Краснорылов И.И. и др. Космическая геодезия*. – М.: Недра, 1986. – 407 с.

Поступила 2.06.20003

**ГРАЧЁВ Виктор Михайлович**, канд. техн. наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник научного центра при ХВУ. В 1975 году окончил ВИРТА ПВО. Область научных интересов – автоматизированные системы управления и обработки информации.

**ВАСИЛЕНКО Александр Леонидович**, начальник лаборатории научного центра при ХВУ. В 1994 году окончил ВИРТА ПВО. Область научных интересов – автоматизированные системы управления и обработки информации.