

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТРАЕКТОРИЙ АЭРОБАЛЛИСТИЧЕСКИХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ПРИ УНИВЕРСАЛИЗАЦИИ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

д.т.н., проф. О.Н. Фоменко, к.т.н. А.А. Журавлёв

Предложено аналитическое описание характерных траекторий аэробаллистических летательных аппаратов сплайн функциями, формируемыми на основе динамической системы опорных точек траекторных систем координат.

Постановка проблемы. Универсализация траекторного управления аэробаллистическим летательным аппаратом (АБ ЛА) – это обеспечение возможности реализовывать семейства различных классов траекторий в зависимости от целевой задачи и тактической обстановки. Неопределенности моделей объекта управления, физических условий полета и тактической обстановки не позволяют использовать заранее спроектированные (по усредненным значениям параметров) «жесткие» и «гибкие» программы для обеспечения заданной вероятности и высокой точности достижения цели.

Универсализация траекторного управления в ближнем аэрокосмическом пространстве связана с обеспечением управляемости и направлена на разработку математического аппарата, позволяющего в реальном времени полета бортовыми средствами формировать семейства оптимальных программных траекторий маневра по информации о текущих и заданных терминальных условиях с учетом параметрических и функциональных ограничений.

Оптимизация управления высокоскоростным полетом по некоторому критерию требует многократных прогнозов движения. Многократное интегрирование системы дифференциальных уравнений пространственного движения системы ЛА в ускоренном масштабе времени на современных бортовых вычислительных средствах нереализуемо.

Предлагается использовать систему аналитических решений, описывающую характерные участки семейств разных классов управляемых траекторий АБ ЛА. Идентификация этих участков проводится на основе решения навигационной задачи по сигналам интегрированной инерциально-спутниковой навигационной системы и динамической системы опорных точек на фактической траектории.

Анализ литературы. При аналитическом прогнозировании траекторий

широко применяются параболическая и эллиптическая теории движения материальной точки в плоскопараллельном и центральном полях притяжения безвоздушного пространства. На атмосферных участках они приводят к значительным погрешностям вследствие неучета сопротивления воздуха. В [1] приводится решение, полученное для описания движения материальной точки по настильной траектории при сопротивлении воздуха, пропорциональном квадрату скорости $Q = 0,5 S c_x \rho V^2$. Это правомерно для описания коротких участков траектории ЛА в малом диапазоне высот с дозвуковой скоростью, когда работает гипотеза, что коэффициент силы лобового сопротивления $c_x = \text{const}$ и плотность воздуха $\rho = \text{const}$. В [2] получено аналитическое описание рикошетирующей траектории гиперзвукового БЛА. В [3] получены аналитические решения для траекторий спуска космического аппарата в атмосфере. При этом, в опубликованных работах не учитывается зависимость $c_x(M, \alpha, \beta)$ от числа Маха M и углов атаки и скольжения, что характерно для управляемого полета АБ ЛА в широком диапазоне скоростей и высот.

Цель статьи. Изложить методику получения аналитических выражений для математического аппарата универсализации траекторного управления в задачах текущего аналитического прогнозирования траектории материальной точки в атмосфере, а также в задачах универсализации игровой модели движения системы из m ЛА, или при синтезе программных попадающих траекторий маневра.

Основная часть. Вводятся обобщенные координаты q_i ($i = \overline{1, 6}$):

$$\{q_1 := x; q_2 := y; q_3 := z; q_4 := V; q_5 := \theta; q_6 := \Psi\},$$

где x, y, z – действительные декартовы координаты материальной точки в стартовой системе координат $\mathbf{X}_g = \{O; x_g, y_g, z_g\}$; V – модуль вектора скорости; θ, Ψ – угол наклона вектора скорости и угол курса соответственно.

1. *Физическая модель пространственного управляемого движения материальной точки* в обобщенных координатах представляется в виде:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_4 \cos q_5 \cos q_6; & \dot{q}_2 &= q_4 \sin q_5; & \dot{q}_3 &= -q_4 \cos q_5 \sin q_6; \\ \dot{q}_4 &= -\dot{w}_\tau - g(h) \sin q_5; & q_4 \dot{q}_5 &= \dot{w}_n - g(h) \cos q_5; & q_4 \cos q_5 \dot{q}_6 &= \dot{w}_b, \quad (1) \\ \dot{w}_\tau &= \sigma \rho(h) q_4^2 c_x(M, \alpha, \beta); & \dot{w}_n &= \sigma \rho(h) q_4^2 c_y(M, \alpha, \beta); \\ \dot{w}_b &= \sigma \rho(h) q_4^2 c_z(M, \alpha, \beta); & M &= q_4 / a_{3\pi}(\rho); & \sigma &= S / 2m; \\ & & h &= q_1 / \sin [\text{arctg}\{q_1 / (R + q_2)\}], \end{aligned}$$

где $\dot{w}_\tau, \dot{w}_n, \dot{w}_b$ – проекции кажущегося ускорения на касательную, нормаль и бинормаль к траектории, обусловленные аэродинамической силой, оцениваются по измерениям бортовых инерциальных средств; h – высота, оценивается по сигналам высотомера; $\rho(h)$ – плотность воздуха; M – число

Маха, оценивается с использованием трубки Питто; $a_{зв}(\rho)$ – скорость звука; S – площадь Миделя; $c_x(M\alpha, \beta)$, $c_y(M\alpha, \beta)$, $c_z(M\alpha, \beta)$ – коэффициенты аэродинамической силы; α , β – углы атаки и скольжения, являются управляющими функциями; m – масса; $g(h)$ – ускорение силы земного притяжения.

Система (1) приводится к квадратурам лишь при некоторых частных предположениях о виде функции $c_x(M\alpha, \beta)$, $c_y(M\alpha, \beta)$, $c_z(M\alpha, \beta)$ и аппроксимации функций \dot{w}_τ , \dot{w}_n , \dot{w}_b . Во внешней баллистике уравнения движения (1) обычно интегрируют численными методами. Разрабатывается способ интегрирования системы (1), при управляемом полете с $\alpha = 0$, $\beta = 0$ и получаются соответствующие множества аналитических решений.

2. *Кусочно-кубическая сплайн функциональная модель семейства из λ программных траекторий маневра имеет вид [1]*

$$q_{i\lambda}^*(q_1) = \sum_{k=1}^K \Lambda_k(q_1) \left(\sum_{n=0}^3 a_{q_i\lambda k n} \Delta q_1^n \right); \quad \Lambda_k(q_1) = \begin{cases} 1, & q_1 \in [q_{1k}; q_{1k+1}[; \\ 0, & q_1 \notin [q_{1k}; q_{1k+1}[; \end{cases} \quad (2)$$

$i = 2, 3$; $\Delta q_1 = q_1 - q_{1k}$; $a_{q_i\lambda k n} \in \Omega_a$; $k = \overline{0, K}$; $q_{1k} = q_{1ц}$; $q_{1k}^*(q_{1ц}) = q_{1ц}$, где q_{1k} – заданные опорные значения координаты; $q_{1ц}$ – координаты цели; λ – количество программных траекторий в семействе; верхним индексом (*) – обозначены программные значения.

При полетах АБ ЛА на дальности, не превышающие нескольких сотен километров, ось $O x_g$ стартовой системы координат близка к линии сферической дальности L , а ось $O y_g$ параллельна линиям высот h над поверхностью сферической модели Земли. Если точки старта и цели неподвижны относительно Земли, то соединяющее их семейство программных траекторий (2) определяет геометрическую форму траектории, вдоль которой АБ ЛА может двигаться быстрее или медленнее. Так как время движения к цели АБ ЛА мало и составляет до нескольких сотен секунд, то учет влияния вращения Земли для повышения точности может быть проведен по аналитическим соотношениям дополнительно.

Использование интегрированной инерциально-спутниковой навигационной системы АБ ЛА позволяет в реальном времени полета вычислять значения действительных координат центра масс. Программа семейства траекторий (2) позволяет автоматически учитывать целый ряд параметрических неопределенностей математических моделей объекта управления и геофизических условий движения. Для построения модели (2) на интервале $[q_{10}; q_{1K}]$ в узлах $k = \overline{0, K}$ должны быть заданы физически реализуемые $\lambda(K+1)$ значений функции $q_{i\lambda k}^*(q_{1k})$, а также $\lambda(K+1)$ значе-

ний первых производных $(q_{i\lambda k}^*)' = dq_i^*/dq_{1k} \Big|_{q_1=q_{1k}}$. Коэффициенты сплайна $a_{q_i\lambda k n}$ вычисляются по соотношениям:

$$\begin{aligned} a_{q_i\lambda k 0} &= q_{i\lambda k}^* ; \quad a_{q_i\lambda k 1} = (q_{i\lambda k}^*)' ; \quad \nabla q_{i\lambda k} = q_{i\lambda(k+1)} - q_{i\lambda k} ; \\ a_{q_i\lambda k 2} &= \left[3\nabla q_{i\lambda k}^* / \nabla q_{1k} - 2a_{q_i\lambda k 1} - (q_{i\lambda(k+1)}^*)' \right] / \nabla q_{1k} ; \\ a_{q_i\lambda k 3} &= \left[a_{q_i\lambda k 1} - 2\nabla q_{i\lambda k} / \nabla q_{1k} + (q_{i\lambda(k+1)}^*)' \right] / (\nabla q_{1k})^2 . \end{aligned} \quad (3)$$

Формирование сплайновой модели (2) семейства программных траекторий в реальном времени полета бортовыми вычислительными средствами на основе информации о текущих условиях полета связано с проблемой обоснованного выбора сетки ∇q_{1k} сплайна и заданием множеств физически реализуемых программных значений $q_{i\lambda k}^*(q_{1k})$ и $(q_{i\lambda k}^*)'$.

Семейство программных траекторий (2) управляемого движения АБ ЛА с выключенным двигателем группируется в $\varepsilon(V, h)$ -окрестности энергетически оптимальной траектории – управляемого движения с нулевыми значениями подъемной и боковой составляющих аэродинамической силы. Поэтому, проблема решается на основе получения аналитического описания этой оптимальной траектории.

3. *Оценка требуемых нормальных ускорений при движении АБ ЛА по участку траектории, описываемому кубической параболой (1).* В пятом и шестом уравнениях системы (1) выразим \dot{w}_n и \dot{w}_b через обобщенные координаты q_i , которые затем выражаются через q_4 и программные значения производных $(q_i^*)'$ и $(q_i^*)''$, $i = 2, 3$. Выражения, описывающие нормальные ускорения в силу динамики, будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{w}_n^* &= \left\{ q_4^2 f_{23}^{-1} \left[(q_2^*)'' - (q_3^*)'' (q_2^*)' (q_3^*)' f_3^{-1} \right] + g(h) \right\} f_3^{1/2} f_{23}^{-1/2} ; \quad (4) \\ \dot{w}_b^* &= -q_4^2 (q_3^*)'' f_{23}^{-1} f_3^{-1/2}, \quad \text{где } f_3 = 1 + ((q_3^*)')^2, \quad f_{23} = f_3 + ((q_2^*)')^2 ; \\ (q_i^*)' &= a_{q_i 1} + 2a_{q_i 2} q_1 + 3a_{q_i 3} q_1^2 ; \quad (q_i^*)'' = 2(a_{q_i 2} + 3a_{q_i 3} q_1) ; \quad i = 2, 3. \end{aligned}$$

При проектировании программной траектории можно рассматривать требуемые нормальные перегрузки как функции от $a_{q_i k n}$ коэффициентов сплайна.

Аппроксимация эмпирической зависимости $c_x(M, \alpha = 0, \beta = 0)$ кусочно-степенной функцией позволяет получить аналитические решения для характерных траектории и на их основе формировать сплайн функции для синтеза программной попадающей траектории маневра. Выделение и идентификация

характерных интервалов текущей траектории осуществляется на основе динамической системы опорных точек траекторных систем координат.

4. *Динамическая система опорных точек траекторных систем координат и их связь со стартовой системой координат (ССК).* Текущее значение высоты над подстилающей поверхностью на борту АБ ЛА может быть оценено по измерениям радиовысотомера, а текущее значение числа Маха – с использованием трубки Питто. Поэтому, для формирования сплайн функциональной модели вводится динамическая сетка $\Delta(h, M)$, величина шага которой заранее не определена. Для формирования динамической системы траекторных опорных точек, вводятся: 1) сетка высот h_i , $i = \overline{0, I}$: $h_0 < h_1 < \dots < h_I$ и 2) сетка чисел Маха M_j , $j = \overline{1, J}$: $0 < M_1 < \dots < M_J$.

Для построения сплайновой модели траектории используется множество траекторных систем координат (ТСК) $X_k = \{O_k; x_k, y_k, z_k\}$, $k = \overline{1, K}$ с началом координат в k -й динамической опорной точке траектории $O_k = (a, b, c)_k$ ССК. Ось $O_k y_k$ направлена вверх вдоль линии местной вертикали. Ось $O_k x_k$ параллельна плоскости местного горизонта и направлена в сторону увеличения дальности полета так, чтобы вектор текущей скорости \bar{V}_k располагался в вертикальной плоскости $O_k x_k y_k$. Ось $O_k z_k$ дополняет систему до правой тройки. Заранее неопределенная k -я динамическая опорная точка траектории определяется в момент времени, когда: 1) текущее значение числа Маха M совпадает с заданным опорным значением M_j :

$a_k = x$; $b_k = y$; $c_k = z$ при $M \in [M_j - \delta M; M_j + \delta M]$, где $\delta M > 0$, либо 2) текущее значение высоты h совпадает с заданным значением условной границы h_i :

$$a_k = x; b_k = y; c_k = z \text{ при } h \in [h_i - \delta h; h_i + \delta h], \text{ где } \delta h > 0.$$

Область пространства, ограниченного каждой k -й ТСК, с заданной точностью характеризуется: 1) плоскопараллельным гравитационным полем с постоянным значением ускорения силы земного притяжения g_{ck} и 2) постоянным значением плотности воздуха ρ_{ck} . Использование ТСК позволяет пространственную траекторию аппроксимировать кусочно-плоскими траекториями и рассматривать движение центра масс только в вертикальной

Рис. 1. Траекторная система координат

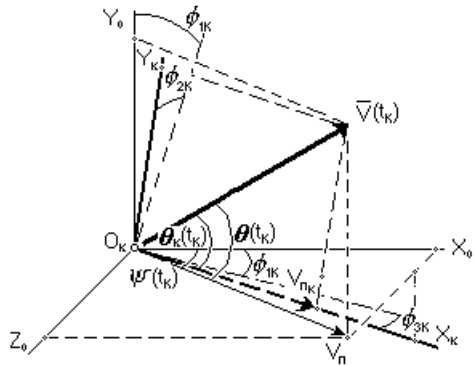


Рис. 1. Траекторная система координат

плоскости $O_k x_k y_k$. Для определения ориентации осей $O_k z_k$ и $O_k x_k$ вычисляются направления соответствующих ортов \mathbf{z}_k^0 и \mathbf{x}_k^0 по соотношениям:

$$\mathbf{z}_k^0 = \mathbf{V}^0 \times \mathbf{y}_k^0, \quad \mathbf{x}_k^0 = \mathbf{y}_k^0 \times (\mathbf{V}^0 \times \mathbf{y}_k^0).$$

Углы Эйлера ϕ_{1k} , ϕ_{2k} и ϕ_{3k} (рис. 1) при сферической модели Земли вычисляются по выражениям:

$$\begin{aligned} \phi_{1k} &= \arctg\{a_k / (R + b_k)\}; \quad \phi_{2k} = \arctg\{c_k / (R + b_k)\}; \\ \phi_{3k} &= \arcsin\{\cos\phi_{1k} \cos^2\phi_{2k} \cos\theta \cos\psi [\operatorname{tg}\phi_{1k} (\operatorname{tg}\psi \sin\phi_{1k} - \operatorname{tg}\phi_{2k}) + \\ &\quad + \operatorname{tg}\psi \cos\phi_{1k} - \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\phi_{2k} / \cos\psi]\}; \\ \phi_{1k} &\in [0; L_{\max}/R], \quad \phi_{2k} \in [0; B_{\max}/R], \end{aligned} \quad (5)$$

где L_{\max} и B_{\max} – заданные максимально возможные значения дальности и бокового отклонения соответственно.

Для перехода от ТСК к ССК (при осуществлении поворотов в положительном направлении в последовательности $\phi_{1k} \rightarrow \phi_{2k} \rightarrow \phi_{3k}$, и учитывая, что $\phi_{1k} \leq 0$) используется следующее преобразование

$$|x_g, y_g, z_g|^T = |a_k, b_k, c_k|^T + \mathbf{M} |x_k, y_k, z_k|^T, \quad (6)$$

где индекс «Т» обозначает операцию транспонирования, элементы матрицы \mathbf{M} направляющих косинусов (3×3) вычисляются по соотношениям:

$$\begin{aligned} m_{11} &= \sin\phi_{1k} \sin\phi_{2k} \sin\phi_{3k} + \cos\phi_{1k} \cos\phi_{3k}; \\ m_{12} &= \cos\phi_{1k} \sin\phi_{2k} \sin\phi_{3k} - \sin\phi_{1k} \cos\phi_{3k}; \quad m_{13} = \cos\phi_{2k} \sin\phi_{3k}; \\ m_{21} &= \sin\phi_{1k} \cos\phi_{2k}; \quad m_{22} = \cos\phi_{1k} \sin\phi_{2k}; \quad m_{23} = -\sin\phi_{2k}; \\ m_{31} &= \sin\phi_{1k} \sin\phi_{2k} \cos\phi_{3k} - \cos\phi_{1k} \sin\phi_{3k}; \\ m_{32} &= \cos\phi_{1k} \sin\phi_{2k} \cos\phi_{3k} + \sin\phi_{1k} \sin\phi_{3k}; \quad m_{33} = \cos\phi_{2k} \cos\phi_{3k}. \end{aligned}$$

Угол θ_k наклона вектора скорости \bar{V}_k к оси $O_k x_k$ – по выражению

$$\begin{aligned} \theta_k &= \pi / 2 - \arcsin\{\cos\theta \cos\psi \cos\phi_{1k} \cos\phi_{2k} \times \\ &\quad \times [\operatorname{tg}\phi_{1k} + (\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}\psi \operatorname{tg}\phi_{2k}) / \cos\psi]\}. \end{aligned} \quad (7)$$

5. *Аппроксимация коэффициента силы лобового сопротивления кусочно-степенной функцией.* Так как управляемое движение происходит при $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, то коэффициент силы лобового сопротивления (рис. 2) представляется в виде $c_x = c_{x0}(M) + c_x^{\alpha\alpha}(M) \alpha^2 + c_x^{\beta\beta}(M) \beta^2 = c_x(M, \alpha = 0, \beta = 0) = c_{x0}(M)$.

Для области k -й ТСК, при $\rho_{ck} = \text{const}$, коэффициент $c_{x0}(M)$ аппроксимируется функцией вида [5]:

$$c_{x0} = \sum_{j=0}^5 \Lambda_j(M) \left(c_{x0j}^0 \left(\frac{a_{зв}(\rho_{0j})}{a_{зв}(\rho)} \frac{V}{V_{0j}} \right)^{\eta(M)} \right); \quad (8)$$

где $\Lambda_j(M) = \begin{cases} 1, & M \in [M_j; M_{j+1}[; \\ 0, & M \notin [M_j; M_{j+1}[, \end{cases}$ $a_{зв}(\rho) = a_{зв}(\rho_{0j})$, $a_{зв}(\rho)$ – скорость звука на данной высоте; c_{x0j}^0 , V_{0j} – начальные номинальные значения коэффици-

ента и модуля вектора скорости на j -м участке аппроксимации; $\eta(M)$ – показатель степени, значение которого определяется по выражению

$$\eta(M) = \begin{cases} 0, & \text{при } M \in [0, M_1[\text{ или } M \in [M_2, M_3[\text{ или } M \in [M_4, M_5[; \\ 1, & \text{при } M \in [M_1, M_2[; \\ -1 \text{ (или } -2), & \text{при } M \in [M_3, M_4[. \end{cases} \quad (9)$$

Для краткости обозначения далее будем записывать $\eta(M)$ как η .

6. Аналитическое описание участка траектории в ТСК при управляемом движении АБ ЛА с нулевыми значениями подъемной и боковой составляющих аэродинамической силы. Для получения аналитических зависимостей, которые позволят оценить значения параметров невозмущенной траекторий управляемого движения АБ ЛА при $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, проведем преобразования системы (3). Подставим выражение (8) в пятое уравнение системы (3), исключим из системы dt и, принимая во внимание,

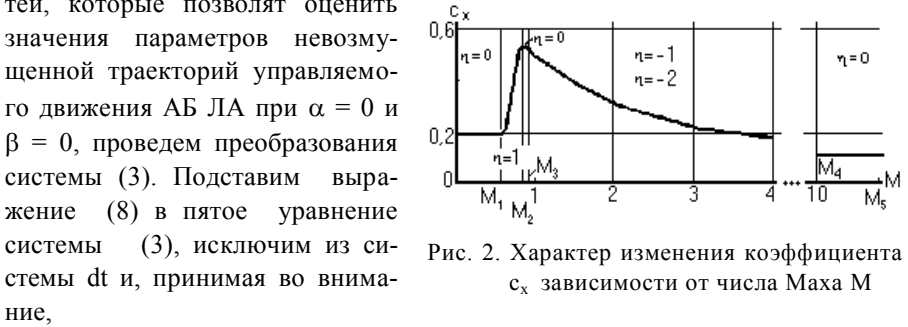


Рис. 2. Характер изменения коэффициента c_x зависимости от числа Маха M

что $q_4 \cos q_5 = \dot{q}_1$, а также, умножив и разделив правую часть на $\cos^{(3+\eta)} q_5$, проведем разделение переменных, и, основываясь на обобщенной первой теореме о среднем значении, получим:

$$\frac{dq_5}{\cos^{(3+\eta)} q_5} = \frac{g_{ck}}{b_{nk}} \frac{d\dot{q}_1}{\dot{q}_1^{(3+\eta)}}, \quad h_{nk} = \rho_{ck} S c_{xj}^0 / 2 m q_{4k}^\eta; \quad n = 1, \dots, 4; \quad (10)$$

$$g_{ck} = \frac{g_0}{(1+h_k/R)(1+h_{k+1}/R)}; \quad \rho_{ck} = \frac{\rho_0}{\beta} \frac{1}{h_{k+1}-h_k} (\exp(-\beta h_k) - \exp(-\beta h_{k+1}));$$

$$R = 6371110 \text{ м}; \quad g_0 = 9,81 \text{ м/с}^2; \quad \rho_0 = 1,225875 \text{ кг/м}^3; \quad \beta = 0,000141 \text{ м}^{-1};$$

где g_{ck} , ρ_{ck} – средние интегральные значения по высоте величин $g(h)$, $\rho(h)$.

Решениями уравнения (10) для $j = \overline{1,5}$ являются:

1) на интервалах аппроксимации $[0, M_1[$, $[M_2, M_3[$ и $[M_4, M_5[$ при $\eta = 0$:

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_{1k} \exp(-\mu \Delta q_1), \quad \text{где } \mu = b_{1k} / \cos q_{5k}; \quad b_{1k} = \rho_{ck} S c_{xj}^0 / 2 m; \quad (11)$$

$$\Delta q_2 = \Delta q_1 \operatorname{tg} q_{5k} - \left(g_{ck} / 4 b_{1k}^2 q_{4k}^2 \right) (\exp(2\mu \Delta q_1) - 2\mu - 1); \quad (12)$$

2) на интервале аппроксимации $[M_3, M_4[$ при $\eta = -2$ ($c_{1k} = 2 b_{2k} \cos q_{5k}$):

$$\dot{q}_1 = \sqrt{\dot{q}_{1k}^2 - 2 b_{2k}^{-1} \cos q_{5k} \Delta q_1}, \quad \text{где } b_{2k} = \rho_{ck} S c_{xj}^0 q_{4k}^2 / 2 m; \quad (13)$$

$$\Delta q_2 = \left(\operatorname{tg} q_{5k} - g_{ck}/c_{1k} \left[1 + 2 \ln |\dot{q}_{1k}| \right] \right) \Delta q_1 - g_{ck}/c_{1k}^2 \left((\dot{q}_{1k}^2 - c_{1k} \Delta q_1) \ln |\dot{q}_{1k}^2 - c_{1k} \Delta q_1| - 2 \dot{q}_{1k}^2 \ln |\dot{q}_{1k}| \right); \quad (14)$$

3) на интервале аппроксимации $[M_1, M_2]$ при $\eta = 1$:

$$\dot{q}_1 = 1 / \left(\dot{q}_{1k}^{-1} + \Delta q_1 b_{3k} / \cos^2 q_{5k} \right), \quad \text{где } b_{3k} = \rho_{ck} \operatorname{Sc}_x^0 q_{4k} / 2 m; \quad (15)$$

$$\Delta q_2 = \operatorname{tg} q_{5k} \Delta q_1 - \frac{g_{ck}}{2 \dot{q}_{1k}^2} \Delta q_1^2 - \frac{g_{ck} b_{3k}}{3 \cos^2 q_{5k} \dot{q}_{1k}} \Delta q_1^3 - \frac{g_{ck} b_{3k}^2}{12 \cos^4 q_{5k}} \Delta q_1^4; \quad (16)$$

4) на интервале $[M_3; M_4]$ при $\eta = -1$:

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_{1k} - b_{4k} \Delta q_1, \quad \text{где } b_{4k} = \rho_{ck} \operatorname{Sc}_x^0 / 2 m q_{4k}; \quad (17)$$

$$\Delta q_2 = \operatorname{tg} q_{5k} \Delta q_1 - \left(g_{ck} / 2 \dot{q}_{1k}^2 \right) \Delta q_1^2 - \left(g_{ck} b_{4k} / 3 \dot{q}_{1k}^3 \right) \Delta q_1^3. \quad (18)$$

Выражения (12), (14), (16) и (18) позволяют в зависимости от числа Маха M и значения показателя степени $\eta(M)$ аппроксимировать участок траектории k -й ТСК при $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Разложим выражения (12) и (14) в ряд Тейлора, оставим в разложениях и в выражении (16) слагаемые, содержащие показатель степени не более 3, и, после преобразования, получим выражение для аппроксимации i -го участка траектории в обобщенном виде

$$\Delta q_{2i} = \Delta q_1 (a_{1i} + \Delta q_1 (a_{2i} + a_{3i} a_{3ji} \Delta q_1)), \quad j = 0, 1, 2, \quad (19)$$

где $a_{1i} = \operatorname{tg} q_{5ki}$; $a_{2i} = -g_{ci} / 2 \dot{q}_{1ki}^2$; $a_{3i} = -g_{ci} b_i / 3 \dot{q}_{1ki}^2$; $a_{30i} = 0$ при $\rho_c \leq \gamma$, $\gamma > 0$; $a_{31i} = 1$ при $\eta = 0$, $M \in [0; M_1] \cup [M_2; M_3]; [M_4; M_5];$ $a_{32i} = \cos^{-1} q_{5ki}$ при $\eta = 1$, $M \in [M_1; M_2];$ при $\eta = -1$, $M \in [M_3; M_4];$ при $\eta = -2$, $M \in [M_3; M_4].$

7. *Вычисление длительности движения БАЛА по дуге кубической параболы.* На заданном интервале $[q_{1k}; q_{1k+1}]$ программное значение угла наклона вектора скорости к стартовому горизонту q_5^* определяется соотношением

$$q_5^* = \operatorname{arctg} \left(3 a_3 a_{3j} \Delta q_1^2 + 2 a_2 \Delta q_1 + a_1 \right). \quad (20)$$

Для определения времени движения по участку траектории, воспользуемся пятым дифференциальным уравнением системы (3). Разделив переменные, учитывая, что q_4 и q_5^* являются функциями аргумента q_1 , получим

$$dt = - \left(q_4 / g_{ck} f_4 \right) dq_5, \quad \text{где } f_4 = \left(1 + ((q_2^*))^2 / \left[1 + ((q_3^*))^2 \right] \right)^{1/2}. \quad (21)$$

В правой части выражения (21) перейдем от дифференциала dq_5 к дифференциалу dq_1 . Для этого продифференцируем выражение (20) и получим

$$d q_5 = - \frac{g_{ck} (1 + 2 b_{jk} a_{3j} \Delta q_1)}{\dot{q}_{1k}^2 \left(1 + \left[\operatorname{tg} q_{5k} - \frac{g_{ck} \Delta q_1 (1 + b_{jk} a_{3j} \Delta q_1)}{\dot{q}_{1k}^2} \right]^2 \right)} d \Delta q_1 .$$

Подставим это выражение в (21) и учитывая (11), (13), (15) и (17), после преобразований и интегрирования получим аналитические выражения для оценки времени движения АБ ЛА по дуге кубической параболы (19):

$$T_k = \left[1 + 2f_4 - \exp(-\Delta q_1 b_{jk}/f_4) (1 + 2f_4 + 2b_{jk} \Delta q_1) \right] / b_{jk} q_{4k} \quad \text{при } \eta = 0; \quad (22)$$

$$T_k = \Delta q_1 \left[1 + \Delta q_1 b_{jk} / 2q_{4k} f_4 (1 - 4\Delta q_1 b_{jk} / 3q_{4k}) \right] / q_{4k} f_4 \quad \text{при } \eta = -1; \quad (23)$$

$$T_k = \frac{1}{15 b_{jk}} \left[q_{4k} (2q_{4k} + 5) - \sqrt{1 - \frac{2\Delta q_1 b_{jk}}{q_{4k}^2 f_4}} \frac{1}{f_4^2} \left(2q_{4k} + 5 + 6 \frac{\Delta q_1 b_{jk}}{q_{4k} f_4} \right) \right] \quad \text{при } \eta = -2; \quad (24)$$

$$T_k = \left[\ln \left[(1 + b_{jk} \Delta q_1 / f_4)^{-1} \right] + 2b_{jk} \Delta q_1 / f_4 \right] / b_{jk} q_4 \quad \text{при } \eta = 1. \quad (25)$$

Выводы. Выражение (19) является обобщением параболической теории. Оно используется для синтеза сплайн функциональных моделей аэробаллистических траекторий АБ ЛА в ближайшем аэрокосмическом пространстве с широким диапазоном скоростей и высот. Также выражения (19) и (22) – (25) используются в задачах текущего аналитического прогнозирования траектории центра масс, при учете влияния вращения Земли по аналитическим выражениям для повышения точности стрельбы, а также в задачах универсализации игровой модели движения системы из m ЛА, или при синтезе программных попадающих траекторий маневра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика. – М.: Наука, 1983. – 640 с.
2. Фоменко О.Н., Куций С.И., Журавлёв А.А. Вопросы повышения скорости обработки информации в задачах управления атмосферным гиперзвуковым движением ЛА // Материалы международной НТК «Представление, обработка и передача информации». – Сочи – Х.: АНУ, ПАНИ. – 1992. – С. 136 – 138.
3. Лох У. Динамика и термодинамика спуска в атмосфере планет. – М.: Мир, 1967.
4. Фоменко О.Н., Журавлёв А.А. Универсальная математическая модель движения центра масс летательного аппарата с выключенным двигателем при межвидовой универсализации в условиях неопределенности // Системы обработки информации. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2001. – Вып. 4(14). – С. 137 – 144.
5. Костров А.В., Шатило А.М. Модельно-экспериментальные методы определения аэромеханических характеристик летательных аппаратов на баллисти-

ческих трассах. – М.: МО СССР, 1982. – 196 с.

Поступила 5.06.2003

ФОМЕНКО Олег Николаевич, доктор техн. наук, профессор, профессор кафедры ХВУ. *Области научных интересов – управление в условиях неопределенности, цифровые управляющие вычислительные системы, методы и математические модели универсализации систем управления движением аэробаллистических летательных аппаратов.*

ЖУРАВЛЁВ Александр Александрович, канд. техн. наук доцент, докторант ХВУ. В 1984 году окончил ХВВКИУ. *Область научных интересов – методы и математические модели универсализации систем управления движением аэробаллистических летательных аппаратов.*
