УДК 629.78:519.852.33

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОТОТОЖНЕННЯ КОСМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ПРИ СТОХАСТИЧНІЙ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ЇХ КООРДИНАТ

О.А. Макогон
(подав д.в.н., проф. І.О. Кириченко)

У статті розглядається задача селекції космічних апаратів у випадку, коли виміри їх параметрів здійснюються з помилками, а фонові об'єкти відсутні. В таких умовах для прийняття рішення необхідно враховувати інформацію за декілька спостережень. Показано, що при прийнятті рішення після двох спостережень ця задача може бути зведена до трипланарної трьохіндексної задачі лінійного програмування.

Загальна постановка проблеми. Удосконалення методів ототожнення космічних об'єктів і ідентифікація параметрів їх орбіт набуває актуальності в світлі основних концептуальних положень Космічної Програми України. Розглянемо загальну постановку завдання селекції космічних апаратів з стохастичною апріорною невизначеністю параметрів їх орбіт на фоні невідомих космічних об'єктів.

В цілком певному об'ємі простору знаходиться m космічних апаратів, відносно яких є апріорна інформація щодо параметрів їх орбіт. Ці об'єкти будемо далі називати **основними**. Поряд з основними у цьому ж об'ємі простору знаходяться q космічних об'єктів, параметри орбіт яких невідомі. Ці об'єкти, на відміну від основних, будемо надалі називати **фоновими.** У цьому просторі виявлено та одержано набір вимірів параметрів невідомих космічних об'єктів. Елементами цього набору є вектори параметрів руху космічних об'єктів і вони можуть належати до одного із апаратів, відносно яких є апріорні дані, або до множини інших космічних об'єктів, кількість котрих відома, але параметри руху яких не контролюються. За одержаними даними потрібно прийняти рішення, до якого з об'єктів відноситься кожна компонента одержаного набору вимірів, тобто розв'язати задачу ототожнення вимірів за деякий період спостереження. Задача ускладнюється тим, що за час руху космічного апарата інформація щодо його параметрів накопичується і приймати рішення на підставі інформації серії спостережень набагато складніше.

Аналіз літератури. У [1] розглядається найбільш простий випадок, коли завдання ототожнення вирішується відносно лише одного із параметрів вектора параметрів орбіти, а його вимір здійснено абсолютно точно. У таких простих умовах задача ототожнення вирішується шляхом пошуку оптимального вирішального правила у вигляді набору функцій $R^* = \{R^*_i(x)\}$, кожна із котрих приймає значення 0 або 1. Ці функції однозначно визначають області значень вимірюваного параметра при потраплянні у які приймається рішення про належність виміру до того чи іншого об'єкта.

Мета статті. Розглянемо тепер випадок, коли виміри здійснюються з помилками, а фонові об'єкти відсутні. Введемо припущення, що кількість вимірів не більше кількості основних об'єктів.

Нехай S – цілком певний об'єм космічного простору, у якому здійснюється виявлення та вимір параметрів усіх космічних об'єктів, що знаходяться в ньому.

У деякий, цілком певний момент часу t = 0 відносно параметрів орбіт m основних об'єктів одержані апріорні дані у вигляді набору векторів

$$X_i^a \in S, \ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Будемо вважати, що вектори дійсних координат підпорядковані багатовимірним нормальним законам розподілу із щільностями ймовірностей

$$f_i(X) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(K_{ai})}} \; e^{-\frac{1}{2}(X-X_i^a)^T K_{ai}^{-1}(X-X_i^a)}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$

де K_{ai} – коваріантна матриця помилок визначення апріорних векторів параметрів відносно істинних параметрів орбіт.

Згідно з методикою [2] визначимо вирішальні правила $R = \{R_i(X)\}$, які відповідають наступним умовам:

$$\sum_{i=1}^{m} R_i(X) = 1, \quad X \in \mathbf{S};$$

$$0 \le R_i(X) \le 1, \ X \in \mathbf{S}, \ i \in M = \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Нехай тепер у цьому просторі одержано $m \le n$ вимірів параметрів космічних об'єктів Xj, $j \in \mathbf{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Розв'яжемо задачу ототожнення вимірів за умови, що дійсні значення параметрів відносно вимірів розподілені згідно із нормальним законом розподілу:

$$\varphi_j(X) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(Kj)}} \; e^{-\frac{1}{2}(X-X_j)^T K_j^{-1}(X-X_j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

де K_{j-1} – коваріантна матриця помилок j-го виміру.

1. Задача ототожнення вимірів за умови, що дійсні значення параметрів відносно вимірів розподілені згідно із нормальним законом розподілу. Введемо сукупність гіпотез $H = \{H_{ij}\}$, яка визначає належність вимірів до об'єктів, що спостерігаються. Таким чином, H_{ij} $(i \in M \times N)$ – гіпотеза, згідно з якою одержаний j-й вимір відноситься до i-го контролюємого об'єкта. Загальна кількість гіпотез дорівнює m x n. Оскільки виміри параметрів випадкові величини, то ми не можемо (на відміну від точних вимірювань) однозначно визначити належність того чи іншого виміру до того чи іншого об'єкта. Разом з тим, за апріорною інформацією ми одержали цілком визначене детерміноване правило однозначного прийняття рішення, згідно з яким вся множина можливих значень параметрів, що вимірюються, розділяється на m підмножин, що не перетинаються. Тому, користуючись цим правилом, можна лише визначити ймовірність належності виміру до кожного із об'єктів. Ці ймовірності визначаються наступними формулами:

$$C_{ij} = \int\limits_S \varphi_j(X) R_i(X)\, dX, \quad i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Зрозуміло, що для усіх i = 1, 2, … , m; j = 1, 2, … , n справедлива тотожність

$$\sum_{i=1}^{m} C_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_S \varphi_j(X) R_i(X)\, dX = \int\limits_S \varphi_j(X) \sum_{i=1}^{m} R_i(X)\, dX = \int\limits_S \varphi_j(X)\, dX = 1.$$

Для розв'язання задачі у загальному вигляді потрібно сформувати так звану сукупну гіпотезу. Зробимо це наступним чином. Кожній гіпотезі H_{ij} поставимо у відповідність числовий параметр z_{ik}, i = 1, 2, … , m; j = 1, 2, … , n. Набір цих параметрів повинен задовільняти вимогам:

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_{ij} \le 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \tag{5}$$

$$z_{ij} \in \{0; 1\}. \tag{6}$$

Умова (4) означає, що кожен вимір повинен відноситись до одного об'єкта. Умова (5) полягає у тому, що до кожного об'єкта можна віднести не більше одного виміру. По суті введений числовий набір має таку структуру: він є матрицею, яка складається із нулів та одиниць, причому у кожному стовпці матриці є рівно одна одиниця, а у кожному рядку – не більше однієї одиниці.

Для кожного такого набору сформуємо множину гіпотез, що відповідають одиничним елементам матриці Z:

$$H(Z) = \{H_{ij}\ z_{ij} = 1\}.$$

Така множина гіпотез і називається сукупною гіпотезою. Сукупна гіпотеза – це гіпотеза, яка визначає належність усіх вимірів до відповідних об’єктів. При m = n загальна кількість таких сукупних гіпотез дорівнює n!. Ймовірність, що визначає справедливість сукупної гіпотези, визначається за формулою

$$P(Z) = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n} C_{ij}^{z_{ij}} . \tag{7}$$

Можна показати, що P(Z) є дискретним розподілом на множині можливих значень Z, що задовольняють умовам (4) – (6).

Тепер задачу прийняття рішення можна сформулювати наступним чином.

Знайти набір Z* = {zij*}, такий, що максимізує ймовірність прийняття рішення P(Z) та задовольняє обмеженням (4) – (6).

Функція (7) є нелінійною відносно параметрів Z. Логарифмуючи P(Z), одержуємо лінійну функцію

$$L(Z) = \ln(P(Z)) = \ln(\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{m} C_{ij}^{z_{ij}}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \ln C_{ij}^{z_{ij}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} z_{ij} \ln C_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} z_{ij} D_{ij},$$

де $D_{ij} = \ln C_{ij}$.

Оскільки логарифм є монотонною функцією, то таке перетворення не впливає на оптимальне рішення сформульованої вище задачі. Тому нелінійну функцію (7) можна замінити на щойно одержану лінійну і таким чином одержати класичну задачу лінійного програмування – задачу призначення, методи вирішення якої відомі [3]:

знайти набір $Z^* = \{z_{ij}^*\}$, такий, що максимізує функцію

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} z_{ij} D_{ij} \tag{8}$$

та задовольняє обмеженням (4) – (6).

Нехай функція Z* = {zij*} – оптимальний розв’язок цієї задачі. Тоді приймається рішення про належність i-го виміру до j-го об’єкта для усіх i та j, при яких $z_{ij}^* = 1$.

Таким чином, задача селекції космічних апаратів формулюється як задача призначення. Для її розв'язання можна використати відомий "угорський алгоритм" [3]. При достатній ємності пам'яті задачу можна також розглядати як частковий випадок задачі лінійного програмування і розв'язувати симплексним методом [4].

2. Розв'язання задачі ототожнення після другого спостереження космічних об'єктів, тобто після отримання другої серії вимірів. Розглянемо тепер більш складний випадок, коли необхідно прийняти рішення після другого спостереження космічних об'єктів тобто після отримання другої серії вимірів.

Нехай у просторі S на момент часу t_1 одержано виміри

$$X_j^{(1)},\ j \in \mathbf{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$$

параметрів n космічних об'єктів, а на момент $t_2 = t_1 + t_{орб}$, де $t_{орб}$ – час повторного входу групи космічних об'єктів у зону видимості інформаційно-вимірювального комплексу, одержано виміри

$$X_k^{(2)},\ k \in \mathbf{P} = \{1, 2, \ldots, p\}$$

параметрів орбіт $p < m$ об'єктів із множини космічних апаратів, що контролюються.

Одержані виміри підпорядковані нормальним законам розподілу. Таким чином, для перших вимірів, як і раніше, щільність ймовірностей має вигляд

$$\varphi_j(X) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(K_{1j})}}\ e^{-\frac{1}{2}(X - X_j^{(1)})^T K_j^{-1}(X - X_j^{(1)})}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Для повторних вимірів щільність ймовірностей позначимо так:

$$\psi_k(X) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(K_{2k})}}\ e^{-\frac{1}{2}(X - X_k^{(2)})^T K_k^{-1}(X - X_k^{(2)})}, \quad k = 1, 2, \ldots, p.$$

Таким чином, сукупність вимірів при першому та другому спостереженнях складається з двох наборів:

$$\{X_j^{(1)}\},\ j \in \mathbf{N} = \{1, 2, \ldots, n\};$$

$$\{X_k^{(2)}\},\ k \in \mathbf{P} = \{1, 2, \ldots, p\}.$$

Формалізуємо задачу ототожнення вимірів на момент часу t_2.

Введемо множину сукупних гіпотез $\{H_{ijk}\}$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$,

$k = 1, \dots, p$, кожна з яких свідчить про належність вимірів $X_j^{(1)}$ та $X_k^{(2)}$ до i-го контролюємого об'єкта. Простір гіпотез буде являти собою 3-мірну матрицю розмірністю $(m \times n \times p)$.

Число таких гіпотез дорівнює $r = mnp$. Для кожної гіпотези H_{ijk} запишемо сумісний закон розподілу оцінок параметрів у вигляді

$$\hat{f}_{jk}(X) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(\hat{K}_{jk})}} \; e^{-\frac{1}{2}(X-\hat{X}_{jk})^T \hat{K}_{jk}^{-1}(X-\hat{X}_{jk})}, \; k \in \mathbf{K}, \; j \in \mathbf{M}.$$

Умовні математичні сподівання $\hat{X}_{jk}$, що є оцінками параметрів орбіт при умові, що вектори вимірів $X_j^{(1)}$ та $X_k^{(2)}$ належать до одного об'єкта, можуть бути знайдені шляхом максимізації функції вірогідності $F_{jk}(X) = \varphi_j(X)\psi_k(X)$ по вектору X, тобто при розв'язанні такої задачі: найти вектор $\hat{X}_{jk}$, що максимізує функцію

$$F_{jk}(X) = \varphi_j(X)\psi_k(X) = \frac{\exp\left(\frac{1}{2}\left\{\left(X - X_j^{(1)}\right)^T K_{1j}^{-1}\left(X - X_j^{(1)}\right) + \left(X - X_k^{(2)}\right)^T K_{2k}^{-1}\left(X - X_k^{(2)}\right)\right\}\right)}{(2\pi)^n \sqrt{\det(K_{1j} \det(K_{2k}}}.$$

Можна показати, що цей максимум досягається при умові [5]:

$$\hat{X}_{jk} = \left(K_{1j}^{-1}X_j^{(1)} + K_{2k}^{-1}X_k^{(2)}\right)\left(K_{1j}^{-1} + K_{2k}^{-1}\right)^{-1}.$$

При цьому, як показано у [5], коваріантна матриця помилок оцінювання визначається формулою

$$\hat{K}_{jk} = K_{2k}(K_{1j} + K_{2k})^{-1}K_{1j}.$$

Таким чином, одержано умовний закон сумісного розподілу оцінки векторів параметрів.

Тепер ймовірність вірного прийняття гіпотези H_{ijk} з урахуванням апріорного вирішального правила можна обчислити за формулою

$$C_{ijk} = \int_S \hat{f}_{jk}(X) R_i(X)\, dX.$$

Як і у першому випадку, узагальнюючи, для формування сукупної гіпотези кожній гіпотезі Hijk поставимо у відповідність числовий параметр z_{ijk}, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, p$. Набір цих параметрів повинен задовольняти вимогам:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} z_{ijk} \le 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_{ijk} = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, p; \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} z_{ijk} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \tag{11}$$

$$z_{ijk} \in \{0; 1\}. \tag{12}$$

Умова (9) означає, що кожна пара вимірів із різних періодів спостереження повинна відноситись не більше, ніж до одного об’єкта. Умови (10) та (11) полягають у тому, що кожен вимір обов’язково повинен бути віднесений тільки до одного об’єкта.

Введений числовий набір має таку структуру: він є трьохмірною матрицею, яка складається із нулів та одиниць, причому у кожному перетині матриці є не більше, ніж одна одиниця. При цьому у перетинах типів (ij) та (ik) знаходиться рівно одна одиниця (ми користуємось термінологією із [6]).

Для кожного такого набору сформуємо сукупну гіпотезу

$$H = \{H_{ijk}: zijk = 1\}.$$

Ця сукупна гіпотеза визначає належність усіх вимірів за два спостереження до відповідних об’єктів. Якщо m = n = p, то загальна кількість сукупних гіпотез дорівнює $r = (m^2!)$. Ймовірність, що визначає справедливість сукупної гіпотези визначається за формулою:

$$P(Z) = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{p} C_{ijk}^{z_{ijk}}.$$

Тепер задачу прийняття рішення після двох спостережень можна сформулювати таким чином.

Знайти набір Z* = {zijk*}, такий, що максимізує імовірність прийняття рішення *P(Z)* та задовольняє обмеженням (9) – (12).

Логарифмуючи P (Z), одержуємо лінійну функцію

$$L(Z) = \ln(P(Z)) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} z_{ijk} G_{ijk},$$

де $G_{ik} = \ln C_{ijk}$.

Таким чином одержуємо задачу лінійного програмування – трьохіндексну трипланарну задачу призначення, методи рішення якої відомі [6]:

знайти набір змінних $Z=\{z_{ijk}\}$, що мінімізує функцію

$$L(Z)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} z_{ijk}G_{ijk}$$

та задовольняє умовам (9) – (12).

Нехай функція $Z^* = \{z_{ijk}^*\}$ – рішення цієї задачі. Тоді приймається рішення про належність від j-го до k-го вимірів i-го об'єкта, якщо $z_{ijk}^* = 1$.

Торкаючись обчислювальних аспектів, відмітимо, що задача, яка щойно сформульована, має експоненціальну складність і може бути розв'язана за допомогою алгоритмів переборного типу [6].

Висновки. Таким чином, рішення про ототожнення інформації щодо параметрів орбіт космічних об'єктів з стохастичною апріорною невизначеністю доцільно прийняти після декількох спостережень. У випадку, коли рішення приймається після отримання другого виміру задача, зводиться до трьохіндексної трипланарної задачі лінійного програмування.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Макогон О.А. Ототожнення інформації щодо параметрів орбіт космічних об'єктів методами перевірки багатоальтернативних гіпотез // Зб. наук. праць ХВУ. – Х.: ХВУ. – 2002. – Вип. 1 (27). – С. 85 – 89.*
2. *Кириченко І.О., Макогон О.А. Задача проверки статистических гипотез как задача линейного программирования // Труди академії. – К.: НАОУ. –1999. – Вип. 13. – С. 78 – 82.*
3. *Юдин Е.Г., Гольштейн Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. – М.: Наука, 1969. – 426 с.*
4. *Деордица Ю.С., Нефедов Ю.М. Исследование операций в планировании и управлении. – К.: Вища школа, 1991. – 320 с.*
5. *Стюарт А., Кендалл М. Теория распределений. – М: Наука, 1966. – 388 с.*
6. *Раскин Л.Г., Кириченко И.О. Математические основы исследования операций и анализа сложных систем вооружения ПВО. – Х.: ВИРТА, 1987. – 240 с.*

Надійшла 12.06.2003

***МАКОГОН Олена Анатоліївна**, начальник лабораторії Харківського інституту танкових військ. У 2002 році закінчила ад'юнктуру при Харківському військовому університеті. Галузь наукових інтересів – застосування теорії лінійного програмування для розробки обчислювальних методів перевірки багатоальтернативних статистичних гіпотез.*