

## КЛАССИФИКАЦИЯ ФРАКТАЛОВ ПО ТИПАМ ФРАКТАЛЬНЫХ СТРУКТУР И ОБЛАСТЯМ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

С.В. Рыбалко, З.Б. Холодная  
(представил д.т.н., проф. В.С. Харченко)

*Разработана классификация результатов исследований в теории фракталов, относящихся к базовым фрактальным структурам и областям их применения.*

**Постановка проблемы.** В книге «Фрактальная геометрия природы» [1] Б. Мандельброт указал, что традиционная геометрия с прямыми линиями и гладкими поверхностями описывает не все явления и объекты окружающего мира и выделил так называемые фрактальные структуры. Теория фракталов, изначально связанная с задачами физики и гидромеханики, по своим результатам и приложениям сразу вышла за границы указанной предметной области, найдя свои методы решения и приложения в прикладной математике и компьютерных науках. Определение фрактала, введенное в научный обиход Б. Мандельбротом [1, 2], как множества, Хаусдорфова размерность которого строго больше топологической размерности, не включает в себя некоторые объекты, рассматриваемые многими математиками, как фракталы. Поэтому в понятие фрактала включаются самоподобные или самоаффинные, в том или ином смысле, преобразования, а также некоторые преобразования на комплексной плоскости. Только такое расширение позволяет охватить без видимых пробелов все множество объектов, которые можно рассматривать как фрактальные структуры. Любая попытка дать более строгое определение отсекает какой-то достаточно емкий класс объектов, что приводит к определенному роду ограничений, связанных с классификацией фракталов. Таким образом, возникает проблема разработки научно обоснованных классификационных схем в теории фракталов и ее приложениях.

**Анализ литературы.** Работы Б.Мандельброта [1, 2] описывают его научные исследования в области фрактальной (неевклидовой) геометрии, в результате которых последняя становится инструментарием с разнообразным применением, как в прикладных науках, так и в чистой математике. На основе фрактальной (дробной) размерности, предложенной в 1919 г. Хаусдорфом, автором вводится в употребление сам термин «фрактал». Раскрывается фрактальная природа таких объектов, как множество

Кантора, кривые Пеано, функции Вейерштрасса и их многочисленные разновидности, которые до Б. Мандельброта считались нонсенсом. В механике и физике теория фракталов применяется при: моделировании пористых сред [3], броуновского движения частиц [3, 4], исследованиях в гидрологии «фрактальных шумов Гаусса» [5, 6, 7] и в геофизике [8, 9], моделировании перемежающейся турбулентности [10, 11], разработке математической теории перколяционных кластеров и диффузии [3, 12, 13, 14], анализе теории фрактальных трещин [17], моделировании трения для фрактальных поверхностей [18], а также в материаловедении [15, 16], во фрактальной механике древесно-полимерных композитов [19]. На основе теории фракталов создаются новые критерии прочности материалов, в том числе и композиционных [20]. Сам Б. Мандельброт резюмирует итоги фрактальной физики в [21, 22]. Фрактальные подходы находят свое применение в теории динамических систем. Так, Э. Лоренц [23] исследует и анализирует открытые им «странные» аттракторы.

Формируется новая быстроразвивающаяся математическая дисциплина – фракталы и хаос в динамических системах. Группа бременских математиков под руководством Пайтгена и Рихтера проводит анализ комплексных динамических систем, в иллюстрациях [24] запечатлены экспонаты выставки их фрактальных отображений. В монографии [25] представлен современный подход к изучению этой теории, что является ценным результатом для специалистов в различных областях естествознания. Рассматриваются классические фракталы (L-системы, кривые Пеано, пыль Кантора), теория множеств и отображений, раскрывается понятие размерности вообще и, в частности, фрактальной (дробной) размерности. Особое внимание уделено рассмотрению Систем Итерируемых Функций (СИФ) – перспективной области применения теории фракталов. Немаловажное значение уделено и рассмотрению самой теории хаоса: изучаются элементы хаотической и комплексной динамики. В итоге, показана неразрывная взаимосвязь теории фракталов и теории хаоса (например, как некоторые фракталы могут порождать хаос).

В работах [26, 27] рассматривается как понятие «фрактал» соотносится с синтезом изображений. В исследованиях [28] и [29] впервые предложена методика фрактального сжатия изображений на основе теоремы коллажа и формата IFS (Iterated Function Systems). В источниках [30 – 33] рассматривается фрактальное искусство, как комплекс специфических знаний и методов в области фрактальной теории.

В [24] подробно показаны преобразования, задающие множества Жюлиа и Мандельброта, и взаимосвязь этих множеств, а в [34 – 38] рассматриваются алгоритмы вывода их изображений. Источники [39 – 41] содержат информацию о кватернионах и гипернионах, с помощью которых синтезируются

3D-изображения. Информация о «пламенных» фракталах содержится в [42].

В работах [43 – 47] рассматривается технология моделирования фрактальных ландшафтов, а в [48 – 50] – многомерные фрактальные структуры.

Техника устранения эффекта алиазинга при синтезе фрактальных структур предложена в [51 – 53]. Сайты [54 – 57] содержат галереи фрактальных изображений, а также ссылки на другие подобные веб-ресурсы. Источники [56, 57] являются веб-группами по данной предметной области.

Анализ литературы показывает глубокую проработку фрактальной теории, выполненную ее исследователями, широкое применение полученных результатов и неубывающий интерес к этой предметной области. Однако, в приведенных источниках нет подробной классификации теории фракталов ни по областям ее применения, ни по фрактальным структурам.

**Цель статьи** — разработка классификационной схемы результатов исследований в теории фракталов по фрактальным объектам и по областям ее применения.

**Классификация фракталов по типам фрактальных структур.** Существует большое число математических объектов, называемых фракталами: треугольник Серпинского, снежинка Коха, кривая Пеано, множество Мандельброта, Лоренцевы аттракторы и т. д. Фракталы с большой точностью описывают многие природные объекты, которые не соответствуют простым геометрическим формам и сложные динамические процессы. Слово фрактал происходит от латинских слов fractus – дробный, что отражает суть фрактала, как «изломанного», нерегулярного множества.

Исходя из описания классических фрактальных объектов и фрактальных моделей естественных объектов, приведенных в проанализированных источниках, можно указать следующее очевидное разбиение фрактальных структур: геометрические, алгебраические и стохастические фракталы. В предлагаемой классификации (рис. 1 – 4) в этом разбиении учитывается признак детерминированности и недетерминированности фрактальных структур.

В детерминированных системах входные параметры однозначно задают результат, прогнозируемый по входным данным (классическая модель, используемая в большинстве математических приложений). Для недетерминированных систем уже при малом возмущении начальных параметров развитие происходит существенно иначе, чем в случае с невозмущенными начальными условиями. Такие системы, не обладающие устойчивостью, будут недетерминированными в смысле предсказуемости их отклика, хотя сами по себе они описываются детерминированными уравнениями, т.е. без учета случайных характеристик. Другими словами, системы с сильными нелинейностями будут обладать свойством недетерминированности или непредсказуемости, связанным с их неустойчивостью.

Фактически все системы реального мира являются таковыми.

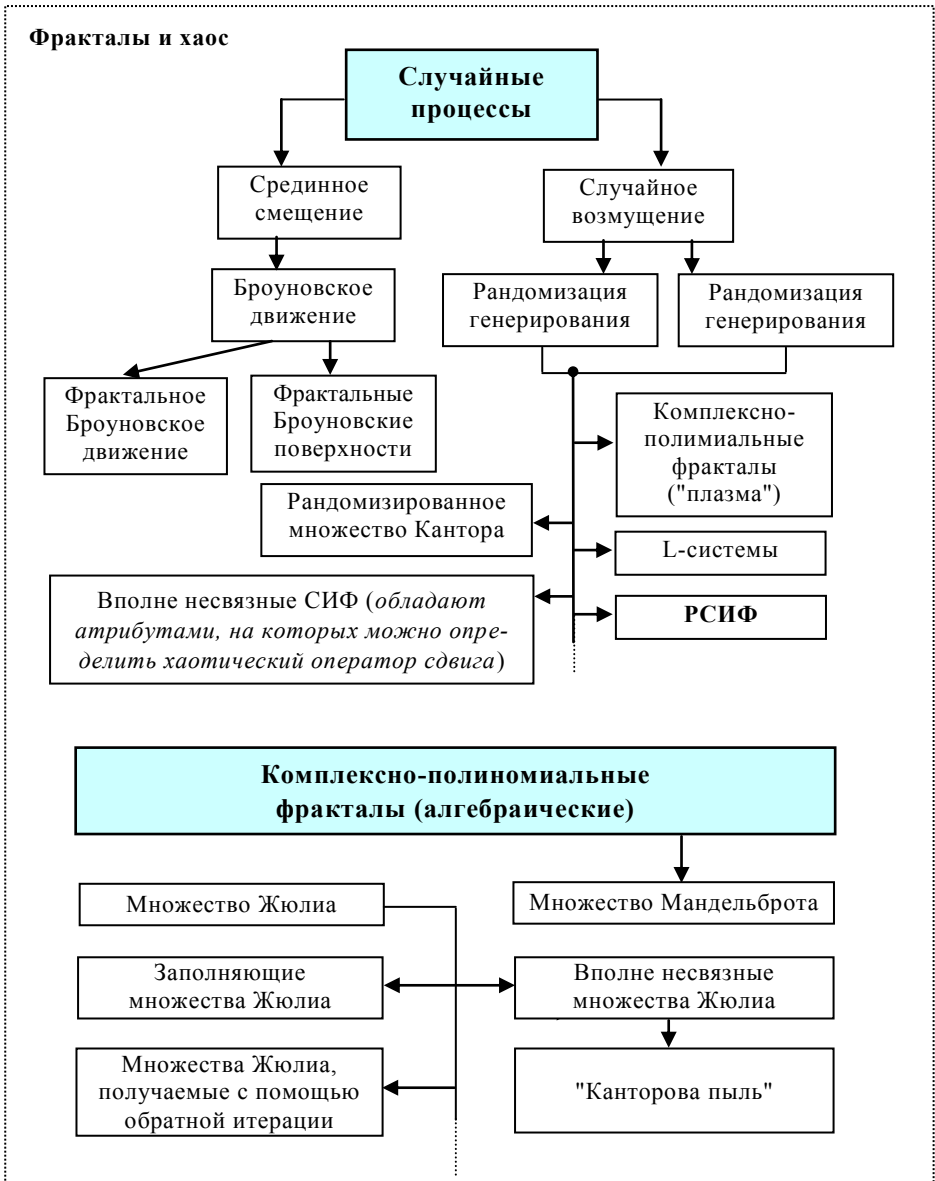


Рис. 1. Классификационная схема теории фракталов

по типам фрактальных структур (продолжение)

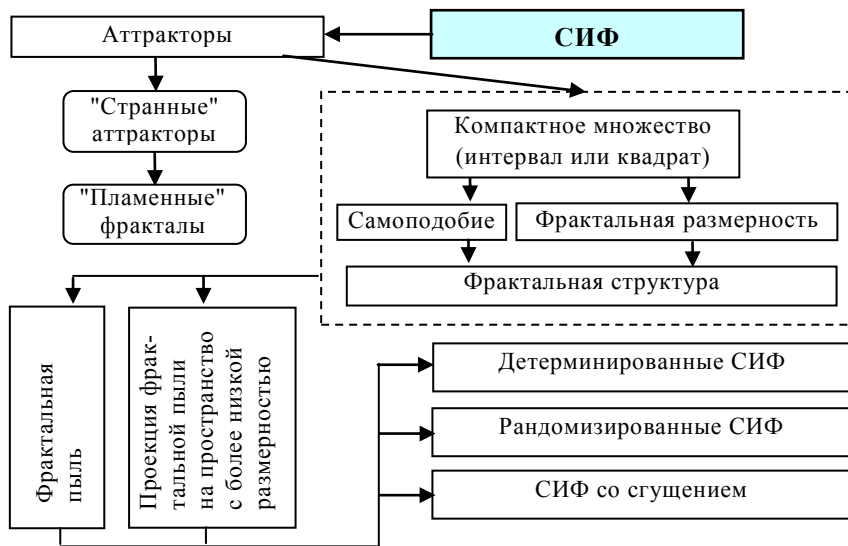


Рис. 1. Классификационная схема теории фракталов по типам фрактальных структур (окончание)

Следующим признаком данной классификации является математический аппарат, с помощью которого происходит синтез фрактальных структур: аффинные преобразования (самоподобие), комплексные преобразования, СИФ (аттракторы), рандомизация по параметрам фрактала и по типу генерации. В качестве дополнительного критерия классификации взято визуальное отображение фрактальной структуры: классические фракталы, пламенные, гипернионы, кватернионы и т. д. В классификационной схеме выделены основные классы фрактальных структур. Вследствие большого многообразия фрактальных структур, на рисунке приведены названия только классических фракталов, используемых в качестве примеров соответствующих классов.

**Классификация фракталов по областям применения.** Структура фракталов настолько сложна, что оставляет заметный отпечаток на физических процессах, протекающих на фракталах как на носителях. Фракталы иначе рассеивают электромагнитное излучение, по-другому колеблются и звучат, иначе проводят электричество, по фракталам иначе происходит диффузия вещества. Возникает новая область естествознания – физика фракталов. Фракталы становятся удобными моделями, чем-то вроде интегрируемых задач классической механики, для описания процессов в средах, ранее считавшихся неупорядоченными. В отличие от существовавших ранее подходов, основанных, как правило, на усреднении, т.е. на стирании мелких деталей, фрактальная физика учитывает *самоаффинную* структуру среды. Фрактальными структурами успешно

моделируются различные биологические и анатомические конфигурации (например, системы кровообращения, легочная система и пр.), а также социологические и экономические объекты. Математические аспекты теории фракталов связаны с теорией меры, теорией фрактальных множеств, теорией итерируемых функций, комплексных чисел, теорией динамических систем. В компьютерных науках фрактальные методы встроены в различное специализированное программное обеспечение, которое выполняет функции фрактальной геометрии, реализует алгоритмы создания электронных фрактальных подписей почтовых файлов и даже генерации фрактальной музыки. Важным направлением компьютерных наук являются фрактальные методы сжатия изображений.

Исходя из вышеизложенного, можно предложить следующую классификационную схему областей применения фрактальной теории (рис. 2).

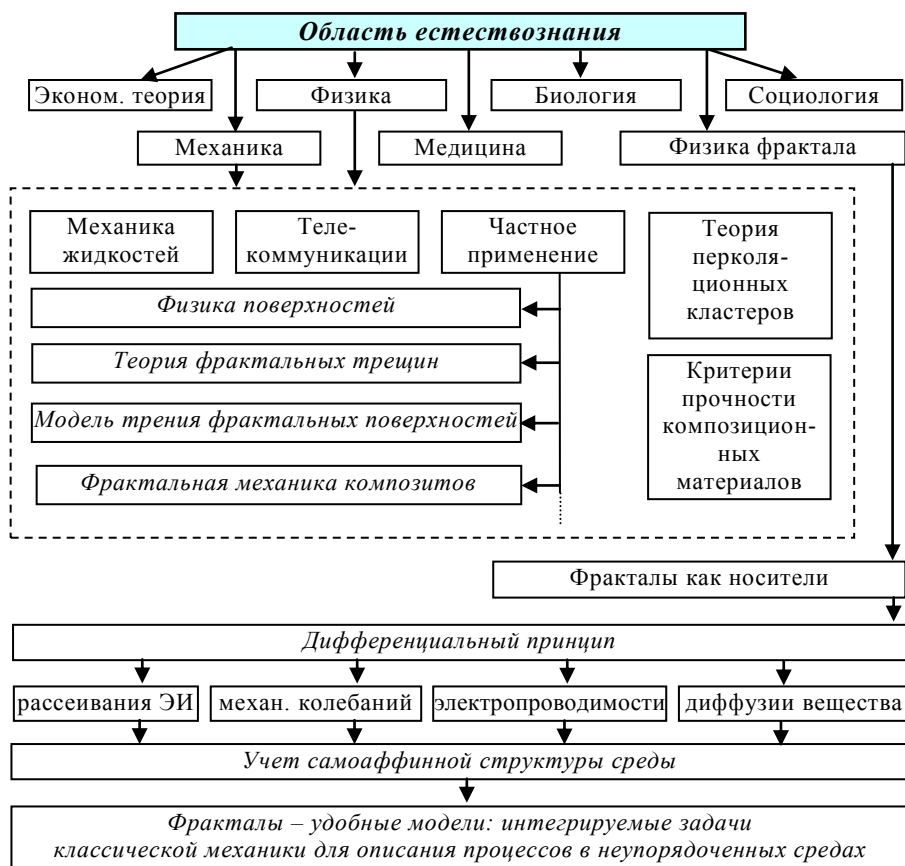


Рис. 2. Классификационная схема теории фракталов по областям ее применения



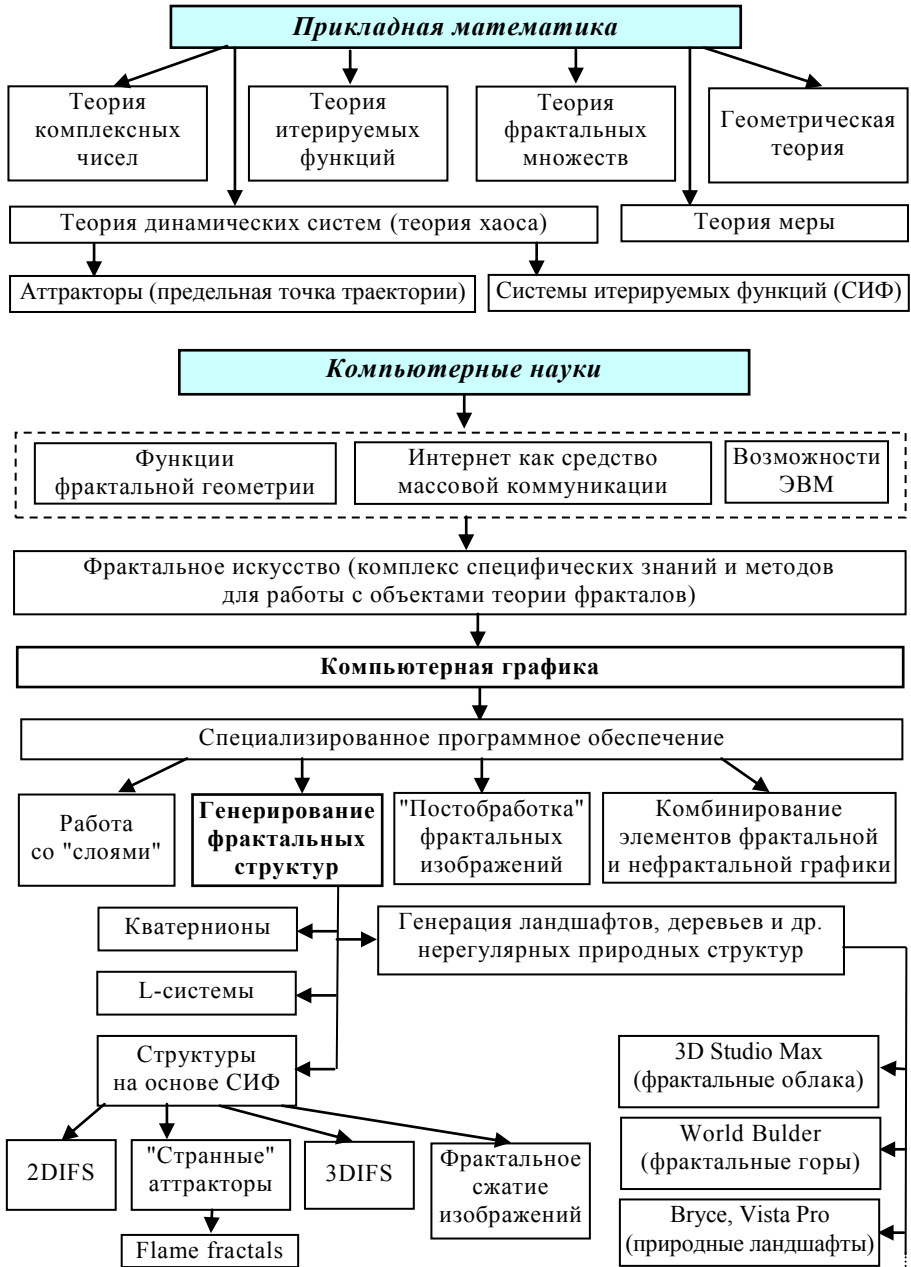


Рис. 2. Классификационная схема теории фракталов по областям ее применения (окончание)

**Выводы.** Разработана классификационная схема, позволяющая проследить взаимосвязь фрактальных структур в их развитии. Разработана классификационная схема областей применения фрактальной теории в математике, естественных и компьютерных науках. Эта схема наглядно показывает применение фрактальной теории в различных областях науки и техники.

Таким образом, предложенные классификации представляют несомненный методический интерес и характеризуют как широкий охват предметной области фрактальной теории, так и взаимосвязи разнообразных фрактальных структур. Дальнейшие исследования могут быть направлены на создание более детальной и формализованной таксономии для рассмотрения результатов в теории фракталов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Mandelbrot B.B. *The Fractal Geometry Of Nature*. – Freeman, San Francisco, 1982.
2. Mandelbrot B.B. *Fractals: Form, Chance, and Dimension*. – Freeman, San Francisco, 1977.
3. Федер Е. *Фракталы*. – М.: Мир, 1991.
4. Mandelbrot B.B., Van Ness J.W. *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications* // *SIAM Rev.* – 1968. – № 10. – P. 422 – 437.
5. Mandelbrot B.B., Wallis J.R. *Noah, Joseph, and operational hydrology* // *Water Resour. Res.* – 1968. – 4. – P. 909 – 918.
6. Mandelbrot B.B., Wallis J.R. *Computer experiments with fractional Gaussian noises. Parts 1 – 3* // *Water Resour. Res.* – 1969. – 5. – P. 228 – 267.
7. Mandelbrot B.B. *A fast fractional Gaussian noise generator* // *Water Resour. Res.* – 1971. – 7. – P. 543 – 553.
8. Mandelbrot B.B., Wallis J.R. *Some long-run properties of geophysical records* // *Water Resour. Res.* – 1969. – 5. – P. 321 – 340.
9. Mandelbrot B.B. *Stochastic models of the Earth's relief, the shape and the fractal dimension of the coastlines, and the number-area rule for islands* // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* – 1975. – 72. – P. 3825 – 3828.
10. Mandelbrot B.B. *Possible refinement of the lognormal hypothesis concerning the distribution of energy dissipation in intermittent turbulence* // *Lecture Notes in Physics 12, Springer, New York.* – 1972. – P. 333 – 351.
11. Mandelbrot B.B. *Intermittent turbulence in self-similar cascades: Divergence, of high moments and dimension of the carrier* // *J.Fluid Mech.* – 1974. – P. 331 – 358.
12. Mandelbrot B.B. *Fractals in physics: Squig clusters, diffusions, fractal measures, and the unicity of fractal dimensionality* // *J. Stat. Phys.* 1983. – 34. – P. 895 – 930.
13. Mandelbrot B.B., Given J.A. *Physical properties of a new fractal model of percolation clusters* // *Phys. Rev. Lett.* 1984. – 52. – P. 1853 – 1856.
14. Меньшиков М.В., Молчанов С.А., Сидоренко А.Ф. *Теория перколяции и некоторые приложения* // *Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика.* – М.: ВИНТИ. – 1986. – Т. 24. – С. 53 – 110.
15. Иванова В.С., Баланкин А.С., Бунин И.Ж., Оксогов А.А. *Синергетика и фракталы в материаловедении.* – М.: Наука, 1994.
16. Mandelbrot B.B. *Fractals, Encyclopedia of Physical Science and Technology*, 1987.
17. Бородич Ф.М. *Энергия разрушения фрактальной трещины, распространяющейся в бетоне или горной породе* // *Докл. АН СССР.* – 1992. – Т. 325, № 3. – С. 1138 – 1141.

18. Бородин Ф.М., Онищенко Д.А. Фрактальная шероховатость в задачах контакта и трения (простейшие модели) // Трение и износ. – 1993. – Т. 14. – № 3. – С. 452 – 459.
19. Кулак М.И. Структурные аспекты фрактальной механики древесно-полимерных композитов // Изв. АН БССР. Сер. физ.-техн. наук. – 1991. – № 2. – С. 18 – 22.
20. Наймарк О.Б., Давыдова М.М. Топологический (фрактальный) анализ кинетики накопления дефектов при оценке прочности углеродных композитов // Механика композитных материалов. – 1994. – Т. 30. – № 1. – С. 19 – 30.
21. Mandelbrot B.B., Passoja D.E., Paullay A.J. Fractal character of fracture surfaces of metals // Nature. – 1984. – 308. – P. 721 – 722.
22. Мандельброт Б.Б. Самоаффинные фрактальные множества. В кн.: Фракталы в физике / Под ред. Л. Пьетронеро, Э. Тозатти. – М.: Мир, 1988.
23. Лоренц Э. Детерминированное неперiodическое течение в "странные аттракторы". – М.: Мир, 1981.
24. Пайтген Х.-О., Рухтер П.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. – М.: Мир, 1993.
25. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – М.: Постмаркет, 2000.
26. Voss R.F. Random fractals forgeries. – In.: Fundamental Algorithms in Computer Graphics (ed. R.A. Earnshaw, Springer-Verlag, Berlin, P. 805 – 835.), 1985.
27. Сундучков А. Фракталы и синтез изображений //Компьютеры + Программы. – 1996. – № 6 (30). – С. 27 – 33.
28. Barnsley M.F., Fractals everywhere. – Boston: Acad. Press, 1988.
29. Barnsley M.F., Fractal Image Compression // Notices. –1996. – V. 43. – No. 6.
30. Франке Г. Преломление науки в искусстве. В кн.: Красота фракталов./ Под ред. Х.-О. Пайтген, П.Х. Рухтер – М.: Мир, 1993.
31. <http://www.fractalus.com/info/manifesto.htm>
32. <http://www.fractovia.org/Opinion/art.html>
33. <http://www.parkenet.org/jp/temp/ylem.html>
34. <http://www.mrob.com/pub/muency.html>
35. <http://www.people.nnov.ru/fractal/MSet/Contents.htm>
36. <http://www.globalserve.net/~derbyshire/manguide.html>
37. <http://home.hia.no/~fgill/mandel.html>
38. <http://www.math.binghamton.edu/MATH/topics/mandel/index.html>
39. <http://skal.planet-d.net/quat/f-gal.html>
40. <http://my.cybersoup.com/twgg/>
41. <http://home.hia.no/~fgill/quatern.html>
42. <http://draves.org/flame/>
43. <http://life.csu.edu.au/complex/tutorials/tutorial2.html>
44. <http://astronomy.swin.edu.au/pbourke/terrain/>
45. <http://www.gameprogrammer.com/fractal.html>
46. <http://www.wizardnet.com/musgrave/article.html>
47. <http://www.geocities.com/Area51/6902/terrain.html>
48. <http://www.lystad.us/fractals/docfiles/higher-dimensions.html>
49. [http://fractals.iut.u-bordeaux1.fr/jpl/dimension\\_a.html](http://fractals.iut.u-bordeaux1.fr/jpl/dimension_a.html)
50. <http://www.cut-the-knot.com/do-you-know/dimension.html>
51. <http://www.fractalus.com/info/antialias.htm>
52. <http://www.fractaldomains.com/anti-alias/antialias.html>
53. <http://fractals.iuta.u-bordeaux.fr/sci-faq/aliasing.txt>
54. <http://www.fractalus.com/iff/>
55. <http://www.fractovia.org/faq4.html>
56. <http://groups.yahoo.com/group/fractal-world>
57. <http://groups.yahoo.com/group/mbfusersgroup>

Поступила 4.07.2003

**РЫБАЛКО Сергей Вячеславович**, специалист. В 2003 г окончил НАУ "ХАИ". Области научных интересов – компьютерные системы, фрактальная графика.

**ХОЛОДНАЯ Зоя Борисовна**, старший преподаватель НАУ "ХАИ". Области научных интересов – компьютерные системы, компьютерная графика, дискретная математика.