

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РУХУ НЕКЕРОВАНОГО ОПЕРЕНОГО РЕАКТИВНОГО СНАРЯДА В ЗБУРЕНІЙ АТМОСФЕРІ

к.т.н. О.М. Шийко, В.О. Телухін, Р.Ю. Михайлик  
(подав проф. В.О. Прокопов)

*Розроблена математична модель руху реактивного опереного некерованого снаряда в умовах збуреної атмосфери. Задача вирішена в загальній постановці, коли аеродинамічні сили приведені до головного моменту та головного вектора, кожний з яких представлений трьома взаємно перпендикулярними складовими. Всі сили і моменти записані як векторні добутки одиничних векторів “повітряної” швидкості та осі снаряда, що помножені на відповідні аеродинамічні коефіцієнти.*

**Постановка проблеми.** Подальший розвиток реактивних систем залпового вогню (РСЗВ) пов’язаний з розробкою великої кількості наукових питань, включаючи питання зовнішньої балістики некерованих оперених реактивних снарядів. Це потребує створення досконалих математичних моделей руху, які у більш – менш повній мірі враховували б найбільш суттєві явища, що супроводжують рух снарядів. Зокрема, різного походження збурюючі фактори, до числа яких на активній та пасивній ділянках руху насамперед слід віднести вітер. Вплив вітру на рух некерованих оперених реактивних снарядів досить значний. Тому потрібні такі рівняння руху, до складу яких вітер входить необхідною складовою. Чисельно інтегруючи ці рівняння, можна визначити вплив складових вітру на бокове відхилення снаряда та його відхилення по дальності, використати рівняння при складанні розрахункових таблиць стрільби. Крім цього, за допомогою рівнянь руху, що безпосередньо включають в себе вітер, можна їх чисельним інтегруванням досліджувати поведінку снаряда на траєкторіях в умовах збуреної атмосфери: досліджувати коливні процеси, аналізувати стійкість снаряда на траєкторії. Використовуючи при інтегруванні в якості початкових умов параметри руху снаряда після сходу з пускової установки, можна досліджувати вплив руху снаряда по пусковій установці на кучність стрільби РСЗВ.

**Аналіз літератури.** В літературі із зовнішньої балістики мається досить багато публікацій, що торкаються математичних моделей руху

реактивних оперених снарядів, або ж можуть бути в тій чи іншій мірі придатними для цього. Їхніми недоліками є те, що вони не враховують наявності вітру взагалі, або спрощують ситуацію, поділяючи рух під впливом вітру на повздовжній та боковий, або ж не в повному об'ємі враховують виникаючі при цьому аеродинамічні сили. Форма їх запису не завжди відповідає потребам чисельного інтегрування, а параметри руху не зовсім вдало співвідносяться з параметрами руху снаряда по пусковій установці, що не дає змоги комплексного дослідження руху снаряда по пусковій установці, на активній та пасивній ділянках, аналізу впливу збурюючих факторів на пусковій установці на подальший рух снаряда в збуреній атмосфері.

**Мета даної статті.** Метою даної статті є розробка математичної моделі руху опереного некерованого реактивного снаряда в збуреній атмосфері. Задача розв'язується в загальній постановці, коли враховуються всі можливі складові аеродинамічних сил і моментів шляхом одноманітного їх запису через векторні добутки одиничних векторів “повітряної” швидкості та осі снаряда. Параметри руху снаряда вибираються такими, що можуть бути застосовані при створенні математичної моделі руху по пусковій установці.

Після сходу з направляючих пускової установки реактивний снаряд рухається як тверде тіло, маючи при цьому взаємопов'язані поступальні і обертальні складові руху, що здобуваються снарядом вже на пусковій установці. Атмосфера, в якій відбувається рух, в свою чергу переміщується з деякою швидкістю  $\vec{W}$ . Швидкість снаряда відносно атмосфери (відносна або ж повітряна швидкість) буде:

$$\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{W}, \quad (1)$$

де  $\vec{V}$  – швидкість снаряда відносно нерухомої системи координат.

Вертикальна складова  $\vec{W}_y$  швидкості вітру близька до нуля, і її можна не враховувати. Тому зводимо вітер до двох його складових: повздовжньої  $\vec{W}_x$  та поперечної  $\vec{W}_z$ .

Розрахункова модель снаряда на активній ділянці зображена за допомогою рис. 1. Діючі сили: сила тяги  $\vec{P}$ , сила тяжіння  $m\vec{g}$ , аеродинамічні сили. Представити останні в повному обсязі на одному рисунку досить складно, тому в подальшому зобразимо їх на окремих рисунках по ходу тексту.

Запровадимо наступні системи прямокутних координат:

1. Нерухому систему координат  $OXYZ$ , площина осей  $X$  та  $Y$  якої співпадає з площиною стрільби.

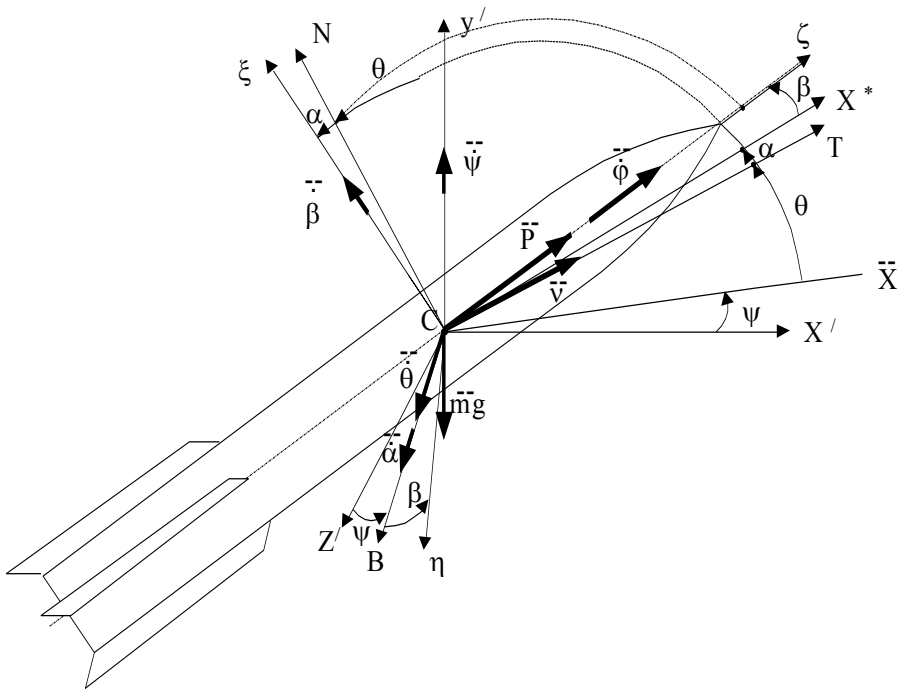


Рис. 1. До руху снаряда на активній ділянці

2. Пов'язану з центром мас систему координат  $CX'Y'Z'$ , осі якої рухаються поступально і паралельно осям  $XYZ$  (стартова поєднана система координат).

3. Швидкісну систему координат  $CTNB$ , вісь  $T$  якої співпадає з вектором швидкості центра мас. Вісь  $N$  спільно з віссю  $T$  утворює вертикальну площину. Вісь  $B$  перпендикулярна цій площині.

4. Пов'язану зі снарядом систему координат  $Cζξη$ , що не бере участі в його обертанні навколо повздовжньої осі, але вісь якої  $ζ$  співпадає з цією віссю. Осі  $ξ$  та  $η$  знаходяться в екваторіальній площині снаряда. При цьому вісь  $ξ$  знаходиться в площині осей  $T$  і  $N$ .

Взаємне положення пов'язаної та швидкісної систем координат визначається кутами  $α$  та  $β$ . В свою чергу положення швидкісної системи відносно нерухомої системи визначається координатами центра мас та

кутами  $\psi$  і  $\theta$ . Послідовність обертів стартової поєднаної до сполучення зі швидкісною та послідовність обертів швидкісної до сполучення з пов'язаною системою координат і відповідні складові кутових швидкостей можна побачити з рис. 1.

Параметрами руху снаряда є такі величини:

$x_c, y_c, z_c$  – координати центра мас снаряда в системі XYZ;

$\psi, \theta$  – кути, що визначають орієнтацію вектора швидкості в системі XYZ;

$V$  – швидкість центра мас;

$\alpha$  і  $\beta$  – кути, що визначають положення осі снаряда відносно вектора швидкості центра мас.

Всі ці параметри пов'яжемо між собою рівняннями руху. Поступальна складова руху може бути визначена рівняннями руху центра мас снаряда, що на підставі роботи [2] мають вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{y}_c &= V \cdot \sin \theta; & \dot{V} &= \Sigma F_T / m; \\ \dot{x}_c &= V \cdot \cos \theta \cdot \cos \psi; & \dot{\theta} &= \Sigma F_N / (m \cdot V); \\ \dot{z}_c &= -V \cdot \cos \theta \cdot \sin \psi; & \dot{\psi} &= -\Sigma F_B / (m \cdot V \cdot \cos \theta). \end{aligned} \quad (2)$$

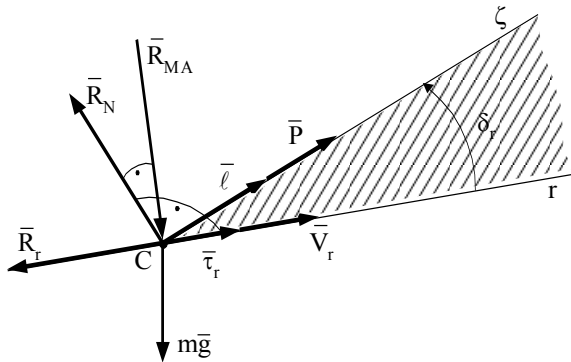


Рис. 2. До визначення аеродинамічних сил

Головний вектор діючих сил представимо у вигляді (рис. 2):

$$\Sigma \vec{F} = \vec{R}_r + \vec{R}_N + \vec{R}_{MA} + m\vec{g} + \vec{P}, \quad (3)$$

де  $\vec{R}_r$  – складова аеродинамічної сили, спрямована вздовж (проти) повітряної швидкості снаряда (лобовий опір);  $\vec{R}_N$  – складова аеродинамічної сили, що перпендикулярна напрямку повітряної швидкості і знаходиться в

площині опору снаряда (бокова сила);  $\vec{R}_{MA}$  – складова аеродинамічної сили перпендикулярна площині опору, сила Магнуса, обумовлена обтіканням снаряда, що обертається, під кутом атаки (під’ємна сила).

При цьому модулі зазначених сил можна поррахувати у відповідності з [1] або [2].

Введемо у розгляд два одиничних вектори:  $\vec{l}$  – одиничний вектор осі снаряда;  $\vec{\tau}_r$  – одиничний вектор напрямку повітряної швидкості. Слідуючи В.С. Пугачову [1], складемо векторні вирази для кожної з аеродинамічних сил:

$$\vec{R}_r = -R_r \cdot \vec{\tau}_r; \quad \vec{R}_N = A_N \cdot [\vec{\tau}_r \times (\vec{l} \times \vec{\tau}_r)]; \quad \vec{R}_{MA} = A_{MA} \cdot (\vec{l} \times \vec{\tau}_r), \quad (4)$$

$$\text{де } A_N = \frac{R_N}{\text{mod}(\vec{l} \times \vec{\tau}_r)}; \quad A_{MA} = \frac{R_{MA}}{\text{mod}(\vec{l} \times \vec{\tau}_r)}.$$

Векторна залежність для  $\vec{R}_N$  відповідає ситуації, коли потік набігає зліва – сила спрямована вправо, і навпаки. Векторна залежність для  $\vec{R}_{MA}$  відповідає правому напрямку обертання снаряда навколо повздовжньої осі. Якщо він зміниться, то і векторний добуток  $(\vec{l} \times \vec{\tau}_r)$  слід змінити на протилежний.

Згідно правила векторного добутку:

$$[\vec{\tau}_r \times (\vec{l} \times \vec{\tau}_r)] = \vec{l} - \vec{\tau}_r \cdot \cos \delta_r. \quad (5)$$

Приймаючи до уваги (4) та (5), запишемо (3) у вигляді:

$$\Sigma \vec{F} = -R_r \cdot \vec{\tau}_r + A_N \cdot (\vec{l} - \vec{\tau}_r \cdot \cos \delta_r) + A_{MA} \cdot (\vec{l} \times \vec{\tau}_r) + m\vec{g} + \vec{P}. \quad (6)$$

Рівняння (1) в проекціях на осі  $xuz$  дає:

$$\tau_{rx} = \frac{\dot{x} - W_x}{V_r}; \quad \tau_{ry} = \frac{\dot{y}}{V_r}; \quad \tau_{rz} = \frac{\dot{z} - W_z}{V_r},$$

$$\text{де } V_r = \sqrt{(\dot{x} - W_x)^2 + \dot{y}^2 + (\dot{z} - W_z)^2}.$$

Користуючись перетворенням координат, знаходимо проекції вектора  $\vec{\tau}_r$  на осі швидкісної системи координат:

$$\tau_{rT} = \tau_{rx} \cdot \cos \theta \cdot \cos \psi + \tau_{ry} \cdot \sin \theta - \tau_{rz} \cdot \cos \theta \cdot \sin \psi;$$

$$\tau_{rN} = -\tau_{rx} \cdot \sin \theta \cdot \cos \psi + \tau_{ry} \cdot \cos \theta + \tau_{rz} \cdot \sin \theta \cdot \sin \psi;$$

$$\tau_{rB} = \tau_{rx} \cdot \sin \psi + \tau_{rz} \cdot \cos \psi.$$

Так як  $l_\zeta = 1$ ,  $l_\xi = l_\eta = 0$ , то подальше перетворення координат дає:

$$l_T = \cos \alpha \cdot \cos \beta; \quad l_N = \sin \alpha \cdot \cos \beta; \quad l_B = -\sin \beta.$$

Проекції векторного добутку  $(\vec{l} \times \vec{\tau}_r)$  на осі швидкісної системи координат отримуємо, розкривши визначник цього добутку:

$$\begin{aligned}(\vec{l} \times \vec{\tau}_r)_T &= l_N \cdot \tau_{rB} - l_B \cdot \tau_{rN}; & (\vec{l} \times \vec{\tau}_r)_N &= l_C \cdot \tau_{rT} - l_T \cdot \tau_{rB}; \\ (\vec{l} \times \vec{\tau}_r)_B &= l_T \cdot \tau_{rN} - l_N \cdot \tau_{rT}.\end{aligned}$$

Кут між вектором повітряної швидкості та віссю снаряда:

$$\delta_r = \arcsin [\text{mod}(\vec{l} \times \vec{\tau}_r)],$$

$$\text{де } \text{mod}(\vec{l} \times \vec{\tau}_r) = \sqrt{(\vec{l} \times \vec{\tau}_r)_T^2 + (\vec{l} \times \vec{\tau}_r)_N^2 + (\vec{l} \times \vec{\tau}_r)_B^2}.$$

Якщо записати  $(\vec{l} \times \vec{\tau}_r)$  через визначник, що містить проєкції  $\vec{l}$  та  $\vec{\tau}_r$  на осі  $\zeta$ ,  $\xi$  та  $\eta$ , то отримуємо більш спрощену залежність:

$$\text{mod}(\vec{l} \times \vec{\tau}_r) = \sqrt{\tau_{r\xi}^2 + \tau_{r\eta}^2}.$$

Перейдемо до руху снаряда відносно центра мас. У відповідності з [1] складемо рівняння руху у вигляді:

$$\begin{cases} A \cdot \ddot{\alpha} - H \cdot \dot{\beta} + A \cdot \ddot{\theta} = M_\alpha; \\ A \cdot \ddot{\beta} + H \cdot (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) = M_\beta, \end{cases}$$

де  $H = C \cdot \dot{\phi}$  – кінетичний момент обертання снаряда навколо повздовжньої осі;  $\dot{\phi}$  – кутова швидкість обертання (провертання) снаряда;  $M_\alpha$  – момент діючих сил відносно осі обертання на кут  $\alpha$  (вісь B);  $M_\beta$  – момент діючих сил відносно осі обертання на кут  $\beta$  (вісь  $\xi$ ).

Для більшої зручності подальшого користування, перепишемо рівняння руху у вигляді:

$$\begin{cases} (\ddot{\alpha} + \ddot{\theta}) = \frac{H}{A} \cdot \dot{\beta} + \frac{M_\alpha}{A}; \\ \ddot{\beta} = \frac{H}{A} \cdot (\dot{\alpha} + \dot{\theta}) + \frac{M_\beta}{A}. \end{cases} \quad (7)$$

Перейдемо до системи рівнянь першого порядку ( $\varepsilon = \dot{\alpha} + \dot{\theta}$ ;  $\sigma = \dot{\beta}$ ):

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = \frac{1}{A} \cdot (H \cdot \sigma + M_\alpha); \\ \dot{\sigma} = \frac{1}{A} \cdot (M_\beta - H \cdot \varepsilon); \\ \dot{\alpha} = \varepsilon - \dot{\theta}; \\ \dot{\beta} = \sigma. \end{cases} \quad (8)$$

Розв'язуючи рівняння (8) сумісно з рівняннями (2), маємо змогу чисельним інтегруванням визначити значення  $\varepsilon$ ,  $\dot{\theta}$  і нарешті  $\dot{\alpha} = \varepsilon - \dot{\theta}$ . Шляхом подальшого інтегрування визначаємо кут  $\alpha$ . При таких формі запису та порядку розв'язання рівнянь руху нема потреби в складанні окремого аналітичного виразу для  $\ddot{\theta}$ .

Зупинимося на аеродинамічних моментах, визначивши їх за допомогою тих же одиничних векторів  $\vec{l}$  та  $\vec{\tau}_r$  (рис. 3).

Стабілізуючий момент:

$$\vec{M}_{CT} = B \cdot (\vec{l} \times \vec{\tau}_r),$$

де  $B = B^* \cdot \frac{\delta_r}{\text{mod}(\vec{l} \times \vec{\tau}_r)}$ ;  $B^* = \frac{\pi d^2}{8} \cdot \frac{\rho_{ON}}{g} \cdot H(y) \cdot V_r^2 \cdot l \cdot C_m$ ;  $C_m$  – аеродинамічний коефіцієнт стабілізуючого моменту.

Момент сил Магнуса:

$$\vec{M}_{МАд} = M \cdot [\vec{l} \times (\vec{l} \times \vec{\tau}_r)],$$

де  $M = M^* \cdot \frac{\delta_r}{\text{mod}(\vec{l} \times \vec{\tau}_r)}$ ;  $M^* = \frac{d^3 \cdot l}{g} \cdot 10^3 \cdot H(y) \cdot \dot{\phi} \cdot V_r \cdot k_{МА}$ ,  $k_{МА}$  – аеродинамічна функція моменту.

Ділення на  $\text{mod}(\vec{l} \times \vec{\tau}_r)$  пов'язано з тим, що модулі векторних добутків  $\vec{l}$  і  $\vec{\tau}_r$  дорівнюють  $\sin \delta_r$ . Ділячи, ми отримуємо одиничні вектори відповідних напрямків.

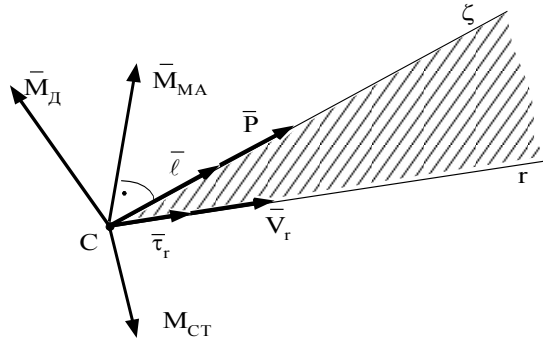


Рис. 3. До визначення аеродинамічних моментів

Гасячий момент  $\vec{M}_D = -D \cdot \vec{\omega}$ , де  $D = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot H(y) \cdot \frac{\rho_{ON}}{g} \cdot V_r \cdot l^2 \cdot C_D$ ;  $C_D$  – аеродинамічний коефіцієнт;  $\vec{\omega}$  – кутова швидкість коливань снаряда

біля центра мас. Якщо нехтувати значеннями  $\dot{\psi}$  та  $\dot{\theta}$ , то:  $\vec{\omega} = \vec{\dot{\alpha}} + \vec{\beta}$ .

Визначимо проекції зазначених моментів на осі узагальнюючих кутових координат, якими є осі В та  $\xi$ . Вектор моменту  $\vec{M}_{CT}$ , записаний за допомогою визначника, що містить проекції одиничних векторів  $\vec{l}$  і  $\vec{\tau}_r$ , має вигляд

$$\vec{M}_{CT} = e \cdot \begin{vmatrix} \vec{\zeta} & \vec{\xi} & \vec{\eta} \\ I_{\zeta} & I_{\xi} & I_{\eta} \\ \tau_{r\zeta} & \tau_{r\xi} & \tau_{r\eta} \end{vmatrix},$$

де  $\vec{\zeta}, \vec{\xi}, \vec{\eta}$  – одиничні вектори осей  $\zeta, \xi$  та  $\eta$ .

Розкриваючи визначник, маємо:

$$(\vec{M}_{CT})_{\zeta} = 0; \quad (\vec{M}_{CT})_{\xi} = -e \cdot \tau_{r\eta}; \quad (\vec{M}_{CT})_{\eta} = e \cdot \tau_{r\xi}.$$

На підставі перетворення координат

$$(\vec{M}_{CT})_e = -(\vec{M}_{CT})_{\zeta} \cdot \sin\beta + (\vec{M}_{CT})_{\eta} \cdot \cos\beta = B \cdot \tau_{r\xi} \cdot \cos\beta.$$

Таким чином:

$$(\vec{M}_{CT})_{\alpha} = e \cdot \tau_{r\xi} \cdot \cos\beta; \quad (\vec{M}_{CT})_{\beta} = -e \cdot \tau_{r\eta}. \quad (9)$$

Замінімо подвійний векторний добуток векторною різницею

$$[\vec{l} \times (\vec{l} \times \vec{\tau}_r)] = \tau_{r\xi} \cdot \vec{l} - \vec{\tau}_r. \quad (10)$$

Користуючись рівнянням (10), знаходимо:

$$(\vec{M}_{MA})_{\beta} = (\vec{M}_{MA})_{\xi} = -M \cdot \tau_{r\xi}; \quad (\vec{M}_{MA})_{\alpha} = (\vec{M}_{MA})_e = M \cdot (\tau_{r\xi} \cdot I_B - \tau_{rB}). \quad (11)$$

Проекції гасячого моменту:

$$(\vec{M}_D)_{\alpha} = -D \cdot (\dot{\alpha} + \dot{\theta}); \quad (\vec{M}_D)_{\beta} = -D \cdot \dot{\beta}. \quad (12)$$

Склавши рівності (9), (10) та (12), маємо:

$$M_{\alpha} = B \cdot \tau_{r\xi} \cdot \cos\beta - D \cdot (\dot{\alpha} + \dot{\theta}) + M \cdot (\tau_{r\xi} \cdot I_B - \tau_{rB});$$

$$M_{\beta} = -B \cdot \tau_{r\eta} - D \cdot \dot{\beta} - M \cdot \tau_{r\xi}.$$

На підставі перетворення координат, відповідні проекції одиничних векторів надаються рівняннями:

$$\tau_{r\xi} = \tau_{rT} \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta + \tau_{rN} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta - \tau_{rB} \cdot \sin\beta;$$

$$\tau_{r\xi} = -\tau_{rT} \cdot \sin\alpha + \tau_{rN} \cdot \cos\alpha;$$

$$\tau_{r\eta} = \tau_{rT} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta + \tau_{rN} \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta + \tau_{rB} \cdot \cos\beta;$$

$$I_B = -\sin\beta.$$



Рівняння руху снаряда на пасивній ділянці отримуються з попередніх рівнянь при умові, що  $P = 0$ .

**Висновки.** Розроблена математична модель некерованого опереного реактивного снаряда. На підставі наведених рівнянь були розроблені алгоритм та обчислювальна програма розрахунку параметрів руху снаряда. При інтегруванні використовувався метод Рунге-Кутта. Проведені в подальшому розрахунки траєкторій польоту снарядів ОФ-21 показали високу збіжність отриманих результатів з існуючими табличними даними, що дає змогу використовувати наведені рівняння при розробці установок на стрільбу реактивних систем залпового вогню. Крім цього, надається змога досить наочно вивчати особливості просторового руху снаряда під дією як окремих складових вітру, так і при їх сумісній дії, а також відпрацьовувати питання, пов'язані зі стійкістю руху снаряда за траєкторією.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Чернозубов А.Д. и др. *Внешняя баллистика*, ч. 2. – М.: ВАИА им. Дзержинского, 1954. – 496 с.
2. Дмитриевский А. А. *Внешняя баллистика*. – М.: Машиностроение, 1972. – 582 с.
3. Шапиро Я.М. *Пороховые реактивные снаряды*, ч. 1. – М.: ВАИА им. Дзержинского, 1961.
4. Светлицкий В.А. *Динамика старта летательных аппаратов*. – М.: Наука. Глав. ред. физ.- мат. лит., 1986. – 280 с.
5. *Таблицы стрельбы осколочно-фугасными реактивными снарядами М-21ОФ*. – М.: Военное издательство Минобороны СССР, 1975. – 96 с.

Надійшла 1.08.2003

**ШИЙКО Олександр Миколайович**, канд. техн. наук, доцент, старший науковий співробітник наукового центру артилерії при Сумському військовому інституті РВ і А. Закінчив ХАІ у 1975 р. Область наукових інтересів – зовнішня балістика артилерійських систем.

**ТЕЛУХІН Валерій Олександрович**, ад'юнкт очної ад'юнктури Сумського військового інституту РВ і А. Закінчив НАОУ в 2000 році. Область наукових інтересів – зовнішня балістика артилерійських систем.

**МИХАЙЛИК Роман Юрійович**, ад'юнкт очної ад'юнктури Сумського військового інституту РВ і А. Закінчив Харківський військовий університет у 1996 р. Область наукових інтересів – зовнішня балістика артилерійських систем.