УДК 621.396

ОЦЕНКА РЕБЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК М-ГРАФОВ

к.т.н. В.Г. Кучмиев, Н.В. Доценко, д.т.н., проф. И.В. Чумаченко

Предложен метод получения точной оценки реберных характеристик (минимального и максимального числа ребер) для графов, которые являются эффективным способом описания и анализа алгоритмических структур, диагностических процедур. Эффективность применения предложенного метода растет с увеличением числа вершин графа.

Введение. Эффективность функционирования автоматизированных систем обработки информации и управления (СОИУ) неразрывно связана с повышением научно-технического уровня их проектирования. Однако до настоящего времени решение ряда задач технического проектирования СОИУ в основном базируется на опыте и интуиции разработчиков, т.к. многие из процессов и явлений очень трудно поддаются моделированию с помощью аналитических моделей и оказываются непригодными даже для получения оценок значений исследуемых параметров [1].

Существующие подходы к проектированию СОИУ недостаточно четко и последовательно регламентируют процесс получения технических решений на системных этапах проектирования. Методы исследования СОИУ не позволяют создать полностью адекватные для проектировщика модели, в которых бы учитывались различные аспекты функционирования при наличии требуемого набора критериев [2]. В практике проектирования и моделирования СОИУ применяют множество моделей и языков, описывающих поведение дискретных динамических систем; классические конечные автоматы, алгоритмические алгебры [3], логические схемы алгоритмов [4], сети Петри и их модификации [5] и другие.

Новым теоретическим подходом для решения задач проектирования СОИУ является применение методов комбинированного анализа. Комбинаторные методы исследований предполагают формализацию функционирования различных элементов системы с помощью комбинаторных объектов. Совокупность таких объектов и образует комбинаторные модели, которые на основе априорной информации о функционировании элемента системы обеспечивают описание всего множества их состояний. Применение методов комбинаторного анализа для исследования процесса функционирования СОИУ позволяет создать с помощью комбинаторных схем более адекватные формальные модели исследуемых элементов, процессов и явлений [6].

Важное место при исследовании графовых моделей занимает конструктивное перечисление, т.е. формирование множества графов с заданными характеристиками. При этом в большинстве случаев используется теория перечисления Пойа, позволяющая получить оценку количества графов заданного вида. Однако для ее применения необходимо иметь точную оценку минимального и максимального числа ребер рассматриваемых графов для заданного множества вершин. Известные способы оценки, полученные в работах Турана, Моцкина и Штрауса [7], являются приблизительными и сильно завышенными.

Целью данной работы является разработка метода получения точной оценки реберных характеристик (минимального и максимального числа ребер) для $M(V^1, V^2, R)$-графов, которые являются эффективным способом описания и анализа алгоритмических структур, диагностических процедур и т.д.

$M(V^1, V^2, R)$-граф – это бихроматический граф, у которого множество вершин разбито на два подмножества

$$V^1 = \{v^1{}_1, \dots, v^1{}_n\} \text{ и } V^2 = \{v^2{}_1, \dots, v^2{}_k\}$$

с окрестностями вершин соответственно $O(v^1{}_1), \dots, O(v^1{}_n)$ для подмножества вершин V^1 и $O(v^2{}_1), \dots, O(v^2{}_k)$ для подмножества вершин V^2, обладающий следующими свойствами:

1) $O(v^1{}_i) \neq O(v^1{}_j)$, $i,j = 1\dots n;\ i \neq j$;
2) $O(v^2{}_i) \neq O(v^2{}_j)$, $i,j = 1\dots k;\ i \neq j$;
3) $k > |O(v^1{}_i)| \geq 1$, $i = 1\dots n$;
4) $|O(v^2{}_j)| \geq 1$, $j = 1\dots k$.

Как и любой граф, $M(V^1,V^2,R)$-граф может быть представлен в виде объединения соответствующих подграфов. Выделим среди множества представлений $M(V^1,V^2,R)$-графа два вида, которые будем называть 1- и 2-декомпозицией $M(V^1,V^2,R)$-графа. При 1-декомпозиции в $M(V^1,V^2,R)$-графе выделяют n подграфов, образованных следующим образом: i-й подграф (обозначается $M^0(v^1{}_i)$) состоит из вершины $v^1{}_i$, соединенной с вершинами, входящими в окрестность $O(v^1{}_i)$. В общем случае, 1-декомпозиция имеет вид

$$M(V^1,V^2,R) = M^0(v^1{}_1) \cup \dots \cup M^0(v^1{}_n).$$

При 2-декомпозиции $M(V^1,V^2,R)$-графа происходит аналогичное преобразование графа, но только относительно вершин из второго множества, т.е. 2-декомпозиция $M(V^1,V^2,R)$-графа имеет вид

$$M\ (V^1,V^2,R) = M^0(v^2{}_1)\ \cup\ \dots\ \cup\ M^0(v^1{}_k).$$

Для описания $M\ (V^1,V^2,R)$-графов, как и для произвольных графов, можно использовать матрицу смежности. В общем случае, матрица смежности – квадратная матрица и для рассматриваемого типа графов она имеет размер $(n + k)^2$. Более эффективно использовать матрицу междольной смежности (матрицу соседства) двудольного графа $G = (X, Y, R)$, которая представляет собой прямоугольную матрицу $B = \{b_{ij}\}$. Элемент $b_{ij} = 1$, если вершина $x_i \in X$ смежна с вершиной $y_i \in Y$ двудольного графа G и $b_{ij} = 0$ в противном случае.

Для конструктивного перечисления рассматриваемых графов необходимо знать точные значения минимального и максимального числа ребер графа с заданным числом вершин.

Минимальное количество ребер $M\ (V^1,V^2,R)$-графа вытекает из свойств 3 и 4, приведенных выше, и определяется следующим образом:

$$|R|_{min} = \max\ (n, k).$$

Для приблизительной оценки верхней границы количества ребер $M(V^1,V^2,R)$-графов можно воспользоваться оценкой Турана [7], согласно которой наибольшее число ребер у графов с p вершинами и не содержащих треугольников равно $[p^2/4]$. Применительно к $M(V^1,V^2,R)$-графам эта оценка имеет вид

$$|R|_{max} = [(n + k)^2/4].$$

В работах Моцкина и Штрауса [8] получены более точные оценки, но только для случая $p \geq n$:

$$|R|_{max} = (n - 2)(p^2 - r^2)/(2\ (n - 1)) + C^2{}_r,$$

где $p = r \bmod (n - 1)$ $\ n - 1 > r \geq 0$.

Для получения точной оценки максимального числа ребер $M(V^1,V^2,R)$-графа был разработан метод, сущность которого состоит в следующем.

Рассмотрим 2-декомпозицию $M\ (V^1,V^2,R)$-графа

$$M(V^1, V^2, R) = \bigcup_{j=1}^{k} M^0\left(V_j^2\right).$$

Количество его ребер равно

$$|R| = \sum_{j=1}^{k}\left|O(V_j^2)\right|.$$

Следовательно, задача определения максимального количества ребер $M(V^1,V^2,R)$-графа сводится к выбору в множестве окрестностей $O(V^2)$ k окрестностей, таких, что

$$\sum_{j=1}^{k}\left|O\left(V_j^2\right)\right| \to \max .$$

Для решения задачи разобьем множество окрестностей $O(V^2)$ на подмножества, имеющие одинаковую мощность. Таких подмножеств будет n, а количество элементов в них C^r_n, где r – мощность окрестностей, входящих в соответствующее подмножество.

Введем в рассмотрение функцию φ(n,k), которая соответствует наименьшей степени вершины s, для которой выполняется соотношение:

$$k \ge \sum_{i=1}^{S} C_n^{n-i} \to \max .$$

Тогда максимальное количество ребер M(n,k) графа определяется следующим образом:

$$\left|R\right|_{\max} = \sum_{i=0}^{\varphi(n,k)} (n-i)\cdot C_n^{n-i} + \left(k - \sum_{i=0}^{\varphi(n,k)} C_n^{n-i}\right)\cdot (n-\varphi(n,k)-1) .$$

Для оценки эффективности предложенного метода были рассчитаны числа ребер $M(V^1,V^2,R)$-графов предложенным методом и с помощью оценки Турана. В табл. 1 приведены полученные значения для n = 4, k = 1…15 и их отношение

$$\sigma(n,k) = \frac{\left|R\right|_{\max}^{T}}{\left|R\right|_{\max}} .$$

Таблица 1

Результаты применения предложенного метода

k	$\lvert R\rvert_{max}^{T}$	$\lvert R\rvert_{max}$	σ	k	$\lvert R\rvert_{max}^{T}$	$\lvert R\rvert_{max}$	σ
1	6	4	1.5	9	42	24	1.8
2	9	7	1.3	10	49	26	1.9
3	12	10	1.2	11	56	28	2.0
4	16	13	1.2	12	64	29	2.2
5	20	16	1.3	13	72	30	2.4
6	25	18	1.4	14	81	31	2.6
7	30	20	1.5	15	90	32	2.8
8	36	22	1.6				

Анализ полученных результатов показывает, что предложенный метод оценки дает лучший результат, и эффективность его применения растет с увеличением числа вершин графа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калянов Г.Н. CASE. Структурный системный анализ (автоматизация и применение). – М.: Лори, 1996. – 284 с.*
2. *Марка Д.А., Мак Гоуэн К. Методология структурного анализа и проектирования. – М.: Мета Технология, 1993. – 248 с.*
3. *Жихарев В.Я., Илюшко В.М., Чумаченко И.В. Математические основы проектирования рекурсивных автоматов с программируемой логикой: Монография. – Х.: Факт, 1999. – 144 с.*
4. *Жихарев В.Я., Илюшко В.М., Чумаченко И.В. Проектирование электронных компиляторов: Монография. – Х.: Факт, 1999. – 88 с.*
5. *Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем. – М., 1984. – 264 с.*
6. *Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. – М.: Мир, 1980. – 476 с.*
7. *Харари Ф. Теория графов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1973. – 300 с.*
8. *Motzkin T.S., Straus E.G. Maxima for graphs and a new proof of a theorem of Turan // J.Math. – 1965. – V. 17. – P. 533 – 540.*

Поступила 20.08.2003

***КУЧМИЕВ Владимир Гавриилович**, канд. техн. наук, доцент кафедры Национального аэрокосмического университета «ХАИ». В 1976 году окончил ХАИ. Область научных интересов – автоматизированные системы обработки информации и управления.*

***ДОЦЕНКО Наталья Владимировна**, аспирантка Национального аэрокосмического университета «ХАИ», который окончила в 2001 году. Область научных интересов – автоматизированные системы обработки информации и управления.*

***ЧУМАЧЕНКО Игорь Владимирович**, доктор техн. наук, зав. кафедрой Национального аэрокосмического университета «ХАИ». В 1977 году окончил ХАИ. Область научных интересов – автоматизированные системы обработки информации и управления.*