

ОЦЕНКА РЕБЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК М-ГРАФОВ

к.т.н. В.Г. Кучмиев, Н.В. Доценко, д.т.н., проф. И.В. Чумаченко

Предложен метод получения точной оценки реберных характеристик (минимального и максимального числа ребер) для графов, которые являются эффективным способом описания и анализа алгоритмических структур, диагностических процедур. Эффективность применения предложенного метода растет с увеличением числа вершин графа.

Введение. Эффективность функционирования автоматизированных систем обработки информации и управления (СОИУ) неразрывно связана с повышением научно-технического уровня их проектирования. Однако до настоящего времени решение ряда задач технического проектирования СОИУ в основном базируется на опыте и интуиции разработчиков, т.к. многие из процессов и явлений очень трудно поддаются моделированию с помощью аналитических моделей и оказываются непригодными даже для получения оценок значений исследуемых параметров [1].

Существующие подходы к проектированию СОИУ недостаточно четко и последовательно регламентируют процесс получения технических решений на системных этапах проектирования. Методы исследования СОИУ не позволяют создать полностью адекватные для проектировщика модели, в которых бы учитывались различные аспекты функционирования при наличии требуемого набора критериев [2]. В практике проектирования и моделирования СОИУ применяют множество моделей и языков, описывающих поведение дискретных динамических систем; классические конечные автоматы, алгоритмические алгебры [3], логические схемы алгоритмов [4], сети Петри и их модификации [5] и другие.

Новым теоретическим подходом для решения задач проектирования СОИУ является применение методов комбинированного анализа. Комбинаторные методы исследований предполагают формализацию функционирования различных элементов системы с помощью комбинаторных объектов. Совокупность таких объектов и образует комбинаторные модели, которые на основе априорной информации о функционировании элемента системы обеспечивают описание всего множества их состояний. Применение методов комбинаторного анализа для исследования процесса функционирования СОИУ позволяет создать с помощью ком-

бинаторных схем более адекватные формальные модели исследуемых элементов, процессов и явлений [6].

Важное место при исследовании графовых моделей занимает конструктивное перечисление, т.е. формирование множества графов с заданными характеристиками. При этом в большинстве случаев используется теория перечисления Пойа, позволяющая получить оценку количества графов заданного вида. Однако для ее применения необходимо иметь точную оценку минимального и максимального числа ребер рассматриваемых графов для заданного множества вершин. Известные способы оценки, полученные в работах Турана, Моцкина и Штрауса [7], являются приближительными и сильно завышенными.

Целью данной работы является разработка метода получения точной оценки реберных характеристик (минимального и максимального числа ребер) для $M(V^1, V^2, R)$ -графов, которые являются эффективным способом описания и анализа алгоритмических структур, диагностических процедур и т.д.

$M(V^1, V^2, R)$ -граф – это бихроматический граф, у которого множество вершин разбито на два подмножества

$$V^1 = \{v^1_1, \dots, v^1_n\} \text{ и } V^2 = \{v^2_1, \dots, v^2_k\}$$

с окрестностями вершин соответственно $O(v^1_1), \dots, O(v^1_n)$ для подмножества вершин V^1 и $O(v^2_1), \dots, O(v^2_k)$ для подмножества вершин V^2 , обладающий следующими свойствами:

- 1) $O(v^1_i) \neq O(v^1_j), i, j = 1 \dots n; i \neq j;$
- 2) $O(v^2_i) \neq O(v^2_j), i, j = 1 \dots k; i \neq j;$
- 3) $k > |O(v^1_i)| \geq 1, i = 1 \dots n;$
- 4) $|O(v^2_j)| \geq 1, j = 1 \dots k.$

Как и любой граф, $M(V^1, V^2, R)$ -граф может быть представлен в виде объединения соответствующих подграфов. Выделим среди множества представлений $M(V^1, V^2, R)$ -графа два вида, которые будем называть 1- и 2-декомпозицией $M(V^1, V^2, R)$ -графа. При 1-декомпозиции в $M(V^1, V^2, R)$ -графе выделяют n подграфов, образованных следующим образом: i -й подграф (обозначается $M^0(v^1_i)$) состоит из вершины v^1_i , соединенной с вершинами, входящими в окрестность $O(v^1_i)$. В общем случае, 1-декомпозиция имеет вид

$$M(V^1, V^2, R) = M^0(v^1_1) \cup \dots \cup M^0(v^1_n).$$

При 2-декомпозиции $M(V^1, V^2, R)$ -графа происходит аналогичное преобразование графа, но только относительно вершин из второго множества, т.е. 2-декомпозиция $M(V^1, V^2, R)$ -графа имеет вид

$$M(V^1, V^2, R) = M^0(v^2_1) \cup \dots \cup M^0(v^1_k).$$

Для описания $M(V^1, V^2, R)$ -графов, как и для произвольных графов, можно использовать матрицу смежности. В общем случае, матрица смежности – квадратная матрица и для рассматриваемого типа графов она имеет размер $(n + k)^2$. Более эффективно использовать матрицу меж-дольной смежности (матрицу соседства) двудольного графа $G = (X, Y, R)$, которая представляет собой прямоугольную матрицу $B = \{b_{ij}\}$. Элемент $b_{ij} = 1$, если вершина $x_i \in X$ смежна с вершиной $y_j \in Y$ двудольного графа G и $b_{ij} = 0$ в противном случае.

Для конструктивного перечисления рассматриваемых графов необходимо знать точные значения минимального и максимального числа ребер графа с заданным числом вершин.

Минимальное количество ребер $M(V^1, V^2, R)$ -графа вытекает из свойств 3 и 4, приведенных выше, и определяется следующим образом:

$$|R|_{\min} = \max(n, k).$$

Для приблизительной оценки верхней границы количества ребер $M(V^1, V^2, R)$ -графов можно воспользоваться оценкой Турана [7], согласно которой наибольшее число ребер у графов с p вершинами и не содержащих треугольников равно $\lfloor p^2/4 \rfloor$. Применительно к $M(V^1, V^2, R)$ -графам эта оценка имеет вид

$$|R|_{\max} = \lfloor (n + k)^2/4 \rfloor.$$

В работах Моцкина и Штрауса [8] получены более точные оценки, но только для случая $p \geq n$:

$$|R|_{\max} = (n - 2)(p^2 - r^2)/(2(n - 1)) + C_r^2,$$

где $p = r \bmod (n - 1)$ $n - 1 > r \geq 0$.

Для получения точной оценки максимального числа ребер $M(V^1, V^2, R)$ -графа был разработан метод, сущность которого состоит в следующем.

Рассмотрим 2-декомпозицию $M(V^1, V^2, R)$ -графа

$$M(V^1, V^2, R) = \bigcup_{j=1}^k M^0(V_j^2).$$

Количество его ребер равно

$$|R| = \sum_{j=1}^k |O(V_j^2)|.$$

Следовательно, задача определения максимального количества ребер $M(V^1, V^2, R)$ -графа сводится к выбору в множестве окрестностей $O(V^2)$ к окрестностей, таких, что

$$\sum_{j=1}^k |O(V_j^2)| \rightarrow \max.$$

Для решения задачи разобьем множество окрестностей $O(V^2)$ на подмножества, имеющие одинаковую мощность. Таких подмножеств будет n , а количество элементов в них C_n^r , где r – мощность окрестностей, входящих в соответствующее подмножество.

Введем в рассмотрение функцию $\varphi(n,k)$, которая соответствует наименьшей степени вершины s , для которой выполняется соотношение:

$$k \geq \sum_{i=1}^s C_n^{n-i} \rightarrow \max.$$

Тогда максимальное количество ребер $M(n,k)$ графа определяется следующим образом:

$$|R|_{\max} = \sum_{i=0}^{\varphi(n,k)} (n-i) \cdot C_n^{n-i} + \left(k - \sum_{i=0}^{\varphi(n,k)} C_n^{n-i} \right) \cdot (n - \varphi(n,k) - 1).$$

Для оценки эффективности предложенного метода были рассчитаны числа ребер $M(V^1, V^2, R)$ -графов предложенным методом и с помощью оценки Турана. В табл. 1 приведены полученные значения для $n = 4$, $k = 1 \dots 15$ и их отношение

$$\sigma(n,k) = \frac{|R|_{\max}^T}{|R|_{\max}}.$$

Таблица 1

Результаты применения предложенного метода

k	$ R _{\max}^T$	$ R _{\max}$	σ	k	$ R _{\max}^T$	$ R _{\max}$	σ
1	6	4	1.5	9	42	24	1.8
2	9	7	1.3	10	49	26	1.9
3	12	10	1.2	11	56	28	2.0
4	16	13	1.2	12	64	29	2.2
5	20	16	1.3	13	72	30	2.4
6	25	18	1.4	14	81	31	2.6
7	30	20	1.5	15	90	32	2.8
8	36	22	1.6				

Анализ полученных результатов показывает, что предложенный метод оценки дает лучший результат, и эффективность его применения растет с увеличением числа вершин графа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калянов Г.Н. CASE. Структурный системный анализ (автоматизация и применение).* – М.: Лори, 1996. – 284 с.
2. *Марка Д.А., Мак Гоуэн К. Методология структурного анализа и проектирования.* – М.: Мета Технологии, 1993. – 248 с.
3. *Жихарев В.Я., Илюшко В.М., Чумаченко И.В. Математические основы проектирования рекурсивных автоматов с программируемой логикой: Монография.* – Х.: Факт, 1999. – 144 с.
4. *Жихарев В.Я., Илюшко В.М., Чумаченко И.В. Проектирование электронных компиляторов: Монография.* – Х.: Факт, 1999. – 88 с.
5. *Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем.* – М., 1984. – 264 с.
6. *Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика.* – М.: Мир, 1980. – 476 с.
7. *Харари Ф. Теория графов: Пер. с англ.* – М.: Мир, 1973. – 300 с.
8. *Motzkin T.S., Straus E.G. Maxima for graphs and a new proof of a theorem of Turan // J.Math. – 1965. – V. 17. – P. 533 – 540.*

Поступила 20.08.2003

КУЧМИЕВ Владимир Гаврилович, канд. техн. наук, доцент кафедры Национального аэрокосмического университета «ХАИ». В 1976 году окончил ХАИ. Область научных интересов – автоматизированные системы обработки информации и управления.

ДОЦЕНКО Наталья Владимировна, аспирантка Национального аэрокосмического университета «ХАИ», который окончила в 2001 году. Область научных интересов – автоматизированные системы обработки информации и управления.

ЧУМАЧЕНКО Игорь Владимирович, доктор техн. наук, зав. кафедрой Национального аэрокосмического университета «ХАИ». В 1977 году окончил ХАИ. Область научных интересов – автоматизированные системы обработки информации и управления.
