УДК 623.021:005

АЛГОРИТМ РАБОТЫ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗНОРОДНЫХ СРЕДСТВ ОПЕРИРУЮЩИХ СТОРОН ПРИ ЗАДАННОМ ВРЕМЕНИ И ОТСУТСТВИИ РЕЗЕРВА

к.т.н. В.Б. Кононов
(представил д.т.н., проф. Б.Ф. Самойленко)

Рассматривается алгоритм работы системы управления при решении задачи оптимального распределения разнородных средств в ходе конфликтной ситуации двух группировок при заданном времени проведения операции и отсутствии резерва.

Постановка задачи. Для решения задач планирования распределением разнородных средств при заданном времени проведения операции и отсутствии резерва необходимо разработать алгоритм работы системы управления в зависимости от поставленных целей, складывающейся обстановки и вероятных действий противника.

Планирование и последующее управление распределением разнородных сил и средств при отсутствии резерва в условиях современного боя представляет собой важную военно-научную задачу, актуальность которой определяется необходимостью создания в Вооруженных Силах Украины автоматизированной системы управления войсками и оружием.

Анализ литературы. Задачи управления распределением сил и средств оперирующей стороны рассматривались в работах [1 – 5]. В [1] вводится мера оценки эффективности действий сторон в конфликтной ситуации. В [2] рассмотрен метод решения системы дифференциальных уравнений, описывающих процесс управления распределением сил и средств оперирующих сторон в ходе конфликтной ситуации для случая однородных средств. В [3] излагается метод решения задачи оптимального управления распределением средств резерва конфликтующих сторон, исходя из условия максимального поражения оперирующих средств противоборствующей стороны. В [4] рассматривается решение задачи оптимального управления распределением разнородных сил и средств конфликтующей стороны по критерию минимума среднего суммарного количества основных сил противника. В [5] рассматривается решение задач оптимального управления распределением разнородных сил и средств конфликтующей стороны по критериям максимума среднего суммарного количества основных сил в конце конфликтной ситуации, минимума среднего суммарного количества основных сил противника и максимума среднего суммарного количества основных сил за весь период конфликтной ситуации. Однако в этих работах не рассматривается алгоритм работы системы управления при решении задачи оптимального распределения разнородных средств в ходе встречной конфликтной ситуации двух группировок при заданном времени и отсутствии резерва.

Целью статьи является разработка алгоритма работы системы управления при решении задач планирования и распределения разнородных сил и средств оперирующей стороны с целью нанесения максимального урона противнику при заданном времени проведения операции и отсутствии резерва.

Основной материал. Алгоритм работы системы управления разрабатывается для следующих задач:

– оптимального распределения разнородных сил и средств оперирующих сторон, для случая, когда сторона A стремится выбрать свои управляющие параметры $\alpha = \left\| \alpha_{ji} \right\|_{n,m}$ таким образом, чтобы к концу боя среднее суммарное количество основных сил стороны B было минимально, причем резервы сторон A, B и ограничения на потери сторон отсутствуют [4]:

$$\min_{\{\alpha\}} \sum_{j=1}^{n_1} y_j(T) = \min_{\{\alpha\}} J(\alpha) \ ; \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = -\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{ij} b_{ij} y_j(t) \ , \ i = \overline{1, \ m}; \\ \dfrac{dy_j}{dt} = -\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{ji} a_{ji} x_i(t) \ , \ j = \overline{1, \ n}; \end{cases} \tag{2}$$

$$x_i(0) = x_i^0 \ , \ i = \overline{1, \ m}; \ y_j(0) = y_j^0 \ , \ j = \overline{1, \ n};$$

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} = 1; \ j = \overline{1, \ n}; \ \beta_{ij} \geq 0, \ i = \overline{1, \ m}, \ j = \overline{1, \ n}; \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} = 1; \ i = \overline{1, \ m}; \ \alpha_{ji} \geq 0, \ j = \overline{1, \ n}, \ i = \overline{1, \ m}, \end{gathered} \tag{3}$$

где $J(\alpha)$ – некоторая функция от управляющих параметров α; $\beta_{ij}\left(i = \overline{1, \ m}, \ j = \overline{1, \ n}\right)$ – заданные параметры распределения сил и средств стороны B; T – заданное время боя;

– задачи оптимального распределения разнородных сил и средств стороны A, в которой данная сторона выбирает свои управляющие параметры $\alpha = \left\| \alpha_{ji} \right\|_{n,m}$ так, чтобы максимизировать среднее суммарное количество своих основных сил к концу боя при отсутствии резерва у обеих сторон

$$\max_{\{\alpha\}} \sum_{i=1}^{m_1} x_i(T) = \max_{\{\alpha\}} J(\alpha); \tag{4}$$

– задачи минимума среднего суммарного количество основных сил противника за весь период боя при отсутствии ограничений на потери сил и средств, а также резерва сторон [5]:

$$\min_{\{\alpha\}} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{j=1}^{n_1} y_j(t) dt = \min_{\{\alpha\}} J(\alpha); \tag{5}$$

– задачи оптимального распределения неоднородных сил и средств стороны A, в которой данная сторона выбирает свои управляющие параметры $\alpha = \left\| \alpha_{ji} \right\|_{n,m}$ так, чтобы максимизировать среднее суммарное количество основных сил за весь период боя при отсутствии ограничений на потери сил и средств, а также резерва сторон [5]:

$$\max_{\{\alpha\}} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^{m_1} x_i(t) dt = \max_{\{\alpha\}} J(\alpha). \tag{6}$$

Для решения задач, решаемых с использованием критериев (4, 5, 6), дифференциальные уравнения описываются соотношениями (2), а ограничения представлены уравнениями (3). Решение представленных задач найдем, используя метод условного градиента [6].

Отметим следующую общность этих задач при применении метода условного градиента. Во-первых, неизменимый вид градиентов функционалов:

$$J'(\alpha) = \left\| a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) \right\|_{n,\ m}.$$

Во-вторых, это одна и та же система дифференциальных уравнений (2). Для (1, 4) соответствующую сопряженную систему уравнений запишем в виде:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\varphi_i(t)}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ji} a_{ji} \eta_j(t), \quad i = \overline{1,\ m}; \\
\dfrac{d\eta_j(t)}{dt} = -\sum\limits_{i=1}^{m} \beta_{ij} b_{ij} \varphi_i(t), \quad j = \overline{1,\ n}.
\end{cases} \tag{7}
$$

Для задач (5, 6) сопряженная система меняется незначительно и описывается соответственно уравнениями (8) и (9):

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\varphi_i(t)}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ji} a_{ji} \eta_j(t), \quad i = \overline{1,\ m}; \\
\dfrac{d\eta_j(t)}{dt} = \dfrac{1}{T} + \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_{ij} b_{ij} \varphi_i(t), \quad j = \overline{1,\ n},
\end{cases} \tag{8}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\varphi_i(t)}{dt} = -\dfrac{1}{T} + \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ji} a_{ji} \eta_j(t), \quad i = \overline{1,\ m}; \\
\dfrac{d\eta_j(t)}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_{ij} b_{ij} \varphi_i(t), \quad j = \overline{1,\ n}.
\end{cases} \tag{9}
$$

Для сопряженных систем конечные условия трансверсальности для задач (1, 4) описываются соотношениями (10), а для задач (5, 6) – соотношениями (11) и (12):

$$
\varphi_i(T) = 0, \quad i = \overline{1,\ m}; \ \eta_j(T) = -1, \quad j = \overline{1,\ n_1}; \ \eta_j(T) = 0, \quad j = \overline{n_1 + 1,\ n}; \tag{10}
$$

$$
\varphi_i(T) = 1, \quad i = \overline{1,\ m_1}; \ \varphi_j(T) = 0, \quad j = \overline{m_1 + 1,\ m}; \ \eta_j(T) = 0, \quad j = \overline{1,\ n}; \tag{11}
$$

$$
\varphi_i(T) = 0, \quad i = \overline{1,\ m}; \ \eta_j(T) = 0, \quad j = \overline{1,\ n}. \tag{12}
$$

Опишем и обоснуем алгоритмы решения представленных задач. При решении задачи (1) на первом этапе определим вспомогательное приближение. Поскольку

$$
\left\langle J'\left(\alpha^k\right), \alpha \right\rangle = \int\limits_0^T \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\ x_i(t)\ \eta_j(t)\ \alpha_{ji} \right) dt = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\int\limits_0^T a_{ji}\ x_i(t)\ \eta_j(t)\ dt \right) \alpha_{ji},
$$

то $\min\limits_{\alpha \in D} \left\langle J'\left(\alpha^k\right), \alpha \right\rangle = \min\limits_{\alpha \in D} \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\int\limits_0^T a_{ji}\ x_i(t)\ \eta_j(t)\ dt \right) \alpha_{ji}$ достигается при

$$\overline{\alpha_{ji}^{k}}=\begin{cases}1, & j=j_k,\ i=i_k;\\ 0, & j\neq j^k,\ i\neq i^k,\end{cases} \tag{13}$$

где $$\left(j_k,\ i_k\right)=\arg\min_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le i\le m}}\left[\int_0^T a_{ji}\ x_i(t)\ \eta_j(t)\ dt\right]. \tag{14}$$

Интегралы в (13) вычисляются приближенно по формуле прямоугольников [6]:

$$I_{ij}=\int_0^T a_{ji}\ x_i(t)\ \eta_j(t)\ dt\approx\frac{a_{ij}T}{N}\sum_{s=0}^{N-1}x_i\left(t_s\right)\eta_j\left(t_s\right),\ i=\overline{1,\ m};\ j=\overline{1,\ n}, \tag{15}$$

где N – число промежутков разбиения отрезка [0, T], $t_s=\frac{sT}{N}$, $s=\overline{0,\ N-1}$.

Значения функций $x_i\left(t_s\right)$, $\eta_j\left(t_s\right)$, $i=\overline{1,\ m}$, $j=\overline{1,\ n}$, $s=\overline{0,\ N-1}$ находятся в результате численного решения системы дифференциальных уравнений (1) и сопряженной системы (8) по методу Рунге-Кутта 4 порядка:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_i}{dt}=-\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_{ij}b_{ij}y_j(t), & i=\overline{1,\ m};\\ \dfrac{dy_j}{dt}=-\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_{ji}a_{ji}x_i(t), & j=\overline{1,\ n};\end{cases} \tag{16}$$

$$x_i(0)=x_i^0,\ i=\overline{1,\ m};\ y_j(0)=y_j^0,\ j=\overline{1,\ n};$$

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi_i(t)}{dt}=\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{ji}a_{ji}\eta_j(t), & i=\overline{1,\ m},\\ \dfrac{d\eta_j(t)}{dt}=\sum\limits_{i=1}^{m}\beta_{ij}b_{ij}\varphi_i(t), & j=\overline{1,\ n}.\end{cases} \tag{17}$$

$$\varphi_i(T)=0,\ i=\overline{1,\ m};\ \eta_j(T)=-1,\ j=\overline{1,\ n}.$$

Так как для сопряженной системы известны конечные условия, интегрирование проводится в обратном порядке от $t=T$ к $t=0$.

На втором этапе найдем шаг поиска, используя для этого (18):

$$\alpha^{k+1}=\alpha^k+\rho_k\left(\overline{\alpha^k}-\alpha^k\right),\ 0\le\rho_k\le 1. \tag{18}$$

При решении обычных экстремальных задач длина шага существенно влияет на сходимость итерационного процесса. Слишком малая длина шага может привести к возрастанию функционала. Определим длину шага ρ_k как оптимальную, если при каждом итерационном шаге достигнутое приближение к искомому минимуму максимально велико. Чтобы осуществить это, рассмотрим для k-й итерации изменение функционала как функции длины шага ρ:

$$\varphi(\rho) = J\left[\alpha^k + \rho\left(\overline{\alpha^k} - \alpha^k\right)\right].$$

Эту зависимость можно аппроксимировать квадратичной параболой по трем опорным точкам: $(0;\ \varphi(0))$, $(0.5;\ \varphi(0.5))$, $(1;\ \varphi(1))$. Точка минимума $\varphi(\rho)$ на $[0;\ 1]$ аппроксимируется значением [5]:

$$\rho_k = 0.25 + \frac{0.25[\varphi(0) - \varphi(0.5)]}{0.5\varphi(0) - \varphi(0.5) + 0.5\varphi(1)}. \tag{19}$$

Часто используются аппроксимации с большим числом опорных точек. Как показывает практический опыт, это в большинстве случаев не является оправданным [7].

На третьем этапе используем критерий оптимальности.

По теореме 4.6 из [7] критерием оптимальности является выполнение неравенства

$$\left|J\left(\alpha^k\right) - J\left(\alpha^{k+1}\right)\right| \rangle \varepsilon, \text{ при } \varepsilon \rangle 0, \text{ или } \Delta_k = \left|\sum_{j=1}^{n_1}\left[y_j^{k+1}(T) - y_j^k(T)\right]\right| \rangle \varepsilon. \tag{20}$$

Отмеченные общность сформулированных задач и замечания, связанные с определением вспомогательного приближения и критерия оптимальности, обосновывают необходимость следующих шагов алгоритма решения задачи управления оптимальным распределением боевых средств в ходе боя.

Шаг 1. Определение начального приближения управляющих параметров $\alpha^0 = \left\|\alpha_{ji}^0\right\|_{n,m}$. Необходимо присвоить $k := 0$, $l := 1$,. $s := 0$, $r := 0$.

Шаг 2. Интегрирование системы дифференциальных уравнений (1).

Шаг 3. Если $l = 1$, то вычисление интегралов выполняется по формулам (15); иначе переход на шаг 6.

Шаг 4. Вычисление матрицы $\overline{\alpha} = \left\|\overline{\alpha_{ji}}\right\|_{n,m}$ по формулам (13) – (14). Присвоить: $l := 2$.

Шаг 5. Если $k = 0$, то переход на шаг 5, иначе переход на шаг 8.

Шаг 6. Вычисление функционала $J := \sum_{j=1}^{n_1} y_j(T)$. Затем присвоить $\varphi_s := J$.

Шаг 7. Если $r = 0$, то переход на шаг 8, иначе переход на шаг 12.

Шаг 8. Если количество выполненных итераций не превосходит заданного числа $IMAX$, т.е. $k \le IMAX$, то переход на шаг 9, иначе точность вычислений не достигнута. Следует либо изменить число $IMAX$ и продолжить вычисления, либо выяснить причину столь большого количества итераций.

Шаг 9. Если $s = 0$, то присвоить $\rho := 0.5$; в противном случае присвоить $\rho := 1$. Затем присвоить $s := s + 1$.

Шаг 10. Если $s \le 2$, то следует вычисление матрицы $\alpha = \left\| \alpha_{ji} \right\|_{n,m}$ по формуле (19); затем следует переход на шаг 2, в противном случае – переход на шаг 11.

Шаг 11. Вычисление шага поиска ρ по формуле (19) и матрицы α по формуле (20). Необходимо присвоить $\overline{\varphi_0} := \varphi_0$, $s := 0, k := k + 1$, $r := 1$. Затем следует переход на шаг 2.

Шаг 12. Проверка полученного решения на оптимальность согласно выражению (18). Если решение оптимально, то необходимо закончить вычисления: $J_* := \varphi_0$; $\alpha^* := \alpha$; $x^*(T) = x(T)$; $y^*(T) = y(T)$; в противном случае необходимо присвоить: $l := 1$, $r := 0$ далее следует переход на шаг 3.

Разработанный алгоритм применим для решения и других сформулированных задач распределения разнородных боевых средств и отличается лишь некоторыми уточнениями. Так, ***для задачи (4)*** необходимо внести такие уточнения:

1) на шаге 2 вместо системы (7), (10) интегрируется система (7), (11);

2) на шаге 6 вычисляется функционал по формуле: $J = -\sum_{i=1}^{m_1} x_i(T)$;

3) на шаге 12 оптимальное значение функционала $J_* = -\varphi_0$.

Для задачи (5) при ограничениях (2), (3):

1) на шаге 2 вместо системы (7) – (10) интегрируется система (17);

2) на шаге 6 вычисляется функционал по формуле прямоугольников

$$J = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{s=0}^{N-1} y_j(t_s), \qquad (21)$$

где N – количество промежутков разбиения отрезка $[0,\ T]$, $t_s = \frac{sT}{N}$, $s = \overline{0,\ N-1}$, а значения функции $y_j(t_s)$, $j = \overline{1,\ n_1}$, $s = \overline{0,\ N-1}$ определяются в результате решения системы (2) – (3).

Для задачи (5) необходимо внести такие уточнения:

1) на шаге 2 вместо системы (2) – (3) интегрируется система (9), (12);

2) на шаге 6 вычисляется функционал по формуле прямоугольников

$$J = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{s=0}^{N-1} x_i(t_s), \qquad (22)$$

где N – количество промежутков разбиения отрезка $[0,\ T]$, $t_s = \frac{sT}{N}$, $s = \overline{0,\ N-1}$, а значения функции $x_i(t_s)$, $j = \overline{1,\ m_1}$, $s = \overline{0,\ N-1}$ определяются в результате решения системы (2) – (3);

3) на шаге 12 оптимальное значение функционала равно: $J_* = -\varphi_0$.

Выводы. Алгоритм работы системы управления при решении задачи оптимального распределения разнородных средств резерва в ходе конфликтной ситуации двух группировок при заданном времени операции и отсутствии резерва является основой для разработки программного обеспечения для создаваемой системы автоматизированного управления войсками и оружием.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кононов В.Б., Кушнерук Ю.И., Евстрат Д.И. Площадная интерпретация модели конфликтной ситуации // Системи обробки інформації – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ, 2001. – 2001. – Вип. 5(15). – С. 39 – 41.*
2. *Кононов В.Б., Кушнерук Ю.И., Евстрат Д.И. Распределение однородных средств резерва в ходе встречной конфликтной ситуации двух группировок // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 4(20). – С. 96 – 101.*
3. *Кононов В.Б., Рафальский Ю.И., Гурин А.П. Оптимальное управление распределением средств резерва // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 5(21). – С. 45 – 47.*
4. *Кононов В.Б. Оптимальное управление распределением неоднородных сил и средств по критерию минимума среднего суммарного количества основных сил*

противника в конфликтной ситуации // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 6(22). – С. 277 – 280.
5. *Кононов В.Б. Задачи оптимального управления распределением неоднородных сил и средств // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ, 2003. – Вип. 1. – С. 59 – 62.*
6. *Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 631 с.*
7. *Хоффер Э., Лундерштедт Р. Численные методы оптимизации. – М: Машиностроение, 1981. – 192 с.*

Поступила 27.08.2003

КОНОНОВ Владимир Борисович *– канд. техн. наук, доцент, зам. нач. факультета ХВУ. В 1987 году окончил ХВВКИУ РВ. Область научных интересов – исследование операций.*