

АЛГОРИТМ РАБОТЫ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗНОРОДНЫХ СРЕДСТВ ОПЕРИРУЮЩИХ СТОРОН ПРИ ЗАДАННОМ ВРЕМЕНИ И ОТСУТСТВИИ РЕЗЕРВА

к.т.н. В.Б. Кононов
(представил д.т.н., проф. Б.Ф. Самойленко)

Рассматривается алгоритм работы системы управления при решении задачи оптимального распределения разнородных средств в ходе конфликтной ситуации двух группировок при заданном времени проведения операции и отсутствии резерва.

Постановка задачи. Для решения задач планирования распределением разнородных средств при заданном времени проведения операции и отсутствии резерва необходимо разработать алгоритм работы системы управления в зависимости от поставленных целей, складывающейся обстановки и вероятных действий противника.

Планирование и последующее управление распределением разнородных сил и средств при отсутствии резерва в условиях современного боя представляет собой важную военно-научную задачу, актуальность которой определяется необходимостью создания в Вооруженных Силах Украины автоматизированной системы управления войсками и оружием.

Анализ литературы. Задачи управления распределением сил и средств оперирующей стороны рассматривались в работах [1 – 5]. В [1] вводится мера оценки эффективности действий сторон в конфликтной ситуации. В [2] рассмотрен метод решения системы дифференциальных уравнений, описывающих процесс управления распределением сил и средств оперирующих сторон в ходе конфликтной ситуации для случая однородных средств. В [3] излагается метод решения задачи оптимального управления распределением средств резерва конфликтующих сторон, исходя из условия максимального поражения оперирующих средств противоборствующей стороны. В [4] рассматривается решение задачи оптимального управления распределением разнородных сил и средств конфликтующей стороны по критерию минимума среднего суммарного количества основных сил противника. В [5] рассматривается решение задач оптимального управления распределением разнородных сил и средств конфликтующей стороны по критериям максимума среднего суммар-

ного количества основных сил в конце конфликтной ситуации, минимума среднего суммарного количества основных сил противника и максимума среднего суммарного количества основных сил за весь период конфликтной ситуации. Однако в этих работах не рассматривается алгоритм работы системы управления при решении задачи оптимального распределения разнородных средств в ходе встречной конфликтной ситуации двух группировок при заданном времени и отсутствии резерва.

Целью статьи является разработка алгоритма работы системы управления при решении задач планирования и распределения разнородных сил и средств оперирующей стороны с целью нанесения максимального урона противнику при заданном времени проведения операции и отсутствии резерва.

Основной материал. Алгоритм работы системы управления разрабатывается для следующих задач:

– оптимального распределения разнородных сил и средств оперирующей стороны, для случая, когда сторона А стремится выбрать свои управляющие параметры $\alpha = \left\| \alpha_{ji} \right\|_{n,m}$ таким образом, чтобы к концу боя среднее сум-

марное количество основных сил стороны В было минимально, причем резервы сторон А, В и ограничения на потери сторон отсутствуют [4]:

$$\min_{\{\alpha\}} \sum_{j=1}^{n_1} y_j(T) = \min_{\{\alpha\}} J(\alpha); \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} b_{ij} y_j(t), \quad i = \overline{1, m}; \\ \frac{dy_j}{dt} = - \sum_{i=1}^m \alpha_{ji} a_{ji} x_i(t), \quad j = \overline{1, n}; \end{cases} \quad (2)$$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, m}; \quad y_j(0) = y_j^0, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\sum_{i=1}^m \beta_{ij} = 1; \quad j = \overline{1, n}; \quad \beta_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}; \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ji} = 1; \quad i = \overline{1, m}; \quad \alpha_{ji} \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m},$$

где $J(\alpha)$ – некоторая функция от управляющих параметров α ; $\beta_{ij} (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ – заданные параметры распределения сил и средств стороны В; T – заданное время боя;

– задачи оптимального распределения разнородных сил и средств стороны A , в которой данная сторона выбирает свои управляющие параметры $\alpha = \left\| \alpha_{ji} \right\|_{n,m}$ так, чтобы максимизировать среднее суммарное количество

своих основных сил к концу боя при отсутствии резерва у обеих сторон

$$\max_{\{\alpha\}} \sum_{i=1}^{m_1} x_i(T) = \max_{\{\alpha\}} J(\alpha); \quad (4)$$

– задачи минимума среднего суммарного количество основных сил противника за весь период боя при отсутствии ограничений на потери сил и средств, а также резерва сторон [5]:

$$\min_{\{\alpha\}} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{j=1}^{n_1} y_j(t) dt = \min_{\{\alpha\}} J(\alpha); \quad (5)$$

– задачи оптимального распределения неоднородных сил и средств стороны A , в которой данная сторона выбирает свои управляющие параметры $\alpha = \left\| \alpha_{ji} \right\|_{n,m}$ так, чтобы максимизировать среднее суммарное

количество основных сил за весь период боя при отсутствии ограничений на потери сил и средств, а также резерва сторон [5]:

$$\max_{\{\alpha\}} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^{m_1} x_i(t) dt = \max_{\{\alpha\}} J(\alpha). \quad (6)$$

Для решения задач, решаемых с использованием критериев (4, 5, 6), дифференциальные уравнения описываются соотношениями (2), а ограничения представлены уравнениями (3). Решение представленных задач найдем, используя метод условного градиента [6].

Отметим следующую общность этих задач при применении метода условного градиента. Во-первых, неизменяемый вид градиентов функционалов:

$$J'(\alpha) = \left\| a_{ji} x_i(t) \eta_j \right\|_{n,m}.$$

Во-вторых, это одна и та же система дифференциальных уравнений (2). Для (1, 4) соответствующую сопряженную систему уравнений запишем в виде:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} a_{ji} \eta_j(t), & i = \overline{1, m}; \\ \frac{d\eta_j(t)}{dt} = -\sum_{i=1}^m \beta_{ij} b_{ij} \varphi_i(t), & j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (7)$$

Для задач (5, 6) сопряженная система меняется незначительно и описывается соответственно уравнениями (8) и (9):

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} a_{ji} \eta_j(t), & i = \overline{1, m}; \\ \frac{d\eta_j(t)}{dt} = \frac{1}{T} + \sum_{i=1}^m \beta_{ij} b_{ij} \varphi_i(t), & j = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_i(t)}{dt} = -\frac{1}{T} + \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} a_{ji} \eta_j(t), & i = \overline{1, m}; \\ \frac{d\eta_j(t)}{dt} = \sum_{i=1}^m \beta_{ij} b_{ij} \varphi_i(t), & j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (9)$$

Для сопряженных систем конечные условия трансверсальности для задач (1, 4) описываются соотношениями (10), а для задач (5, 6) – соотношениями (11) и (12):

$$\varphi_i(T) = 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad \eta_j(T) = -1, \quad j = \overline{1, n_1}; \quad \eta_j(T) = 0, \quad j = \overline{n_1 + 1, n}; \quad (10)$$

$$\varphi_i(T) = 1, \quad i = \overline{1, m_1}; \quad \varphi_j(T) = 0, \quad j = \overline{m_1 + 1, m}; \quad \eta_j(T) = 0, \quad j = \overline{1, n}; \quad (11)$$

$$\varphi_i(T) = 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad \eta_j(T) = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (12)$$

Опишем и обоснуем алгоритмы решения представленных задач. При решении задачи (1) на первом этапе определим вспомогательное приближение. Поскольку

$$\left\langle J'(\alpha^k), \alpha \right\rangle = \int_0^T \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) \alpha_{ji} \right) dt = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\int_0^T a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) dt \right) \alpha_{ji},$$

$$\text{то } \min_{\alpha \in D} \left\langle J'(\alpha^k), \alpha \right\rangle = \min_{\alpha \in D} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\int_0^T a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) dt \right) \alpha_{ji} \text{ достигается при}$$

$$\overline{\alpha}_{ji}^k = \begin{cases} 1, & j = j_k, i = i_k; \\ 0, & j \neq j_k, i \neq i_k, \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{где } (j_k, i_k) = \arg \min_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}} \left[\int_0^T a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) dt \right]. \quad (14)$$

Интегралы в (13) вычисляются приближенно по формуле прямоугольников [6]:

$$I_{ij} = \int_0^T a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) dt \approx \frac{a_{ij}}{N} \sum_{s=0}^{N-1} x_i(t_s) \eta_j(t_s), \quad i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}, \quad (15)$$

где N – число промежутков разбиения отрезка $[0, T]$, $t_s = \frac{sT}{N}$, $s = \overline{0, N-1}$.

Значения функций $x_i(t_s)$, $\eta_j(t_s)$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $s = \overline{0, N-1}$ находятся в результате численного решения системы дифференциальных уравнений (1) и сопряженной системы (8) по методу Рунге-Кутты 4 порядка:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = -\sum_{j=1}^n \beta_{ij} b_{ij} y_j(t), & i = \overline{1, m}; \\ \frac{dy_j}{dt} = -\sum_{i=1}^m \alpha_{ji} a_{ji} x_i(t), & j = \overline{1, n}; \end{cases} \quad (16)$$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, m}; \quad y_j(0) = y_j^0, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} a_{ji} \eta_j(t), & i = \overline{1, m}, \\ \frac{d\eta_j(t)}{dt} = \sum_{i=1}^m \beta_{ij} b_{ij} \varphi_i(t), & j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (17)$$

$$\varphi_i(T) = 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad \eta_j(T) = -1, \quad j = \overline{1, n}.$$

Так как для сопряженной системы известны конечные условия, интегрирование проводится в обратном порядке от $t = T$ к $t = 0$.

На втором этапе найдем шаг поиска, используя для этого (18):

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k + \rho_k \left(\overline{\alpha^k} - \alpha^k \right), \quad 0 \leq \rho_k \leq 1. \quad (18)$$

При решении обычных экстремальных задач длина шага существенно влияет на сходимость итерационного процесса. Слишком малая длина шага может привести к возрастанию функционала. Определим длину шага ρ_k как оптимальную, если при каждом итерационном шаге достигнутое приближение к искомому минимуму максимально велико. Чтобы осуществить это, рассмотрим для k -й итерации изменение функционала как функции длины шага ρ :

$$\varphi(\rho) = J \left[\alpha^k + \rho \left(\overline{\alpha^k} - \alpha^k \right) \right].$$

Эту зависимость можно аппроксимировать квадратичной параболой по трем опорным точкам: $(0; \varphi(0))$, $(0.5; \varphi(0.5))$, $(1; \varphi(1))$. Точка минимума $\varphi(\rho)$ на $[0; 1]$ аппроксимируется значением [5]:

$$\rho_k = 0.25 + \frac{0.25[\varphi(0) - \varphi(0.5)]}{0.5\varphi(0) - \varphi(0.5) + 0.5\varphi(1)}. \quad (19)$$

Часто используются аппроксимации с большим числом опорных точек. Как показывает практический опыт, это в большинстве случаев не является оправданным [7].

На третьем этапе используем критерий оптимальности.

По теореме 4.6 из [7] критерием оптимальности является выполнение неравенства

$$\left| J \left(\alpha^k \right) - J \left(\alpha^{k+1} \right) \right| < \varepsilon, \text{ при } \varepsilon > 0, \text{ или } \Delta_k = \left| \sum_{j=1}^{n_1} \left[y_j^{k+1}(T) - y_j^k(T) \right] \right| < \varepsilon. \quad (20)$$

Отмеченные общность сформулированных задач и замечания, связанные с определением вспомогательного приближения и критерия оптимальности, обосновывают необходимость следующих шагов алгоритма решения задачи управления оптимальным распределением боевых средств в ходе боя.

Шаг 1. Определение начального приближения управляющих параметров $\alpha^0 = \left\| \alpha_{ji}^0 \right\|_{n,m}$. Необходимо присвоить $k := 0$, $l := 1$, $s := 0$, $r := 0$.

Шаг 2. Интегрирование системы дифференциальных уравнений (1).

Шаг 3. Если $l = 1$, то вычисление интегралов выполняется по формулам (15); иначе переход на шаг 6.

Шаг 4. Вычисление матрицы $\overline{\alpha} = \left\| \overline{\alpha}_{ji} \right\|_{n,m}$ по формулам (13) – (14).

Присвоить: $l := 2$.

Шаг 5. Если $k = 0$, то переход на шаг 5, иначе переход на шаг 8.

Шаг 6. Вычисление функционала $J := \sum_{j=1}^{n_1} y_j(T)$. Затем присвоить $\varphi_s := J$.

Шаг 7. Если $r = 0$, то переход на шаг 8, иначе переход на шаг 12.

Шаг 8. Если количество выполненных итераций не превосходит заданного числа $IMAX$, т.е. $k \leq IMAX$, то переход на шаг 9, иначе точность вычислений не достигнута. Следует либо изменить число $IMAX$ и продолжить вычисления, либо выяснить причину столь большого количества итераций.

Шаг 9. Если $s = 0$, то присвоить $\rho := 0.5$; в противном случае присвоить $\rho := 1$. Затем присвоить $s := s + 1$.

Шаг 10. Если $s \leq 2$, то следует вычисление матрицы $\alpha = \|\alpha_{ji}\|_{n,m}$ по формуле (19); затем следует переход на шаг 2, в противном случае – переход на шаг 11.

Шаг 11. Вычисление шага поиска ρ по формуле (19) и матрицы α по формуле (20). Необходимо присвоить $\overline{\varphi_0} := \varphi_0$, $s := 0$, $k := k + 1$, $r := 1$. Затем следует переход на шаг 2.

Шаг 12. Проверка полученного решения на оптимальность согласно выражению (18). Если решение оптимально, то необходимо закончить вычисления: $J_* := \varphi_0$; $\alpha^* := \alpha$; $x^*(T) = x(T)$; $y^*(T) = y(T)$; в противном случае необходимо присвоить: $l := 1$, $r := 0$ далее следует переход на шаг 3.

Разработанный алгоритм применим для решения и других сформулированных задач распределения разнородных боевых средств и отличается лишь некоторыми уточнениями. Так, **для задачи (4)** необходимо внести такие уточнения:

1) на шаге 2 вместо системы (7), (10) интегрируется система (7), (11);

2) на шаге 6 вычисляется функционал по формуле: $J = -\sum_{i=1}^{m_1} x_i(T)$;

3) на шаге 12 оптимальное значение функционала $J_* = -\varphi_0$.

Для задачи (5) при ограничениях (2), (3):

1) на шаге 2 вместо системы (7) – (10) интегрируется система (17);

2) на шаге 6 вычисляется функционал по формуле прямоугольников

$$J = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{s=0}^{N-1} y_j(t_s), \quad (21)$$

где N – количество промежутков разбиения отрезка $[0, T]$, $t_s = \frac{sT}{N}$, $s = \overline{0, N-1}$, а значения функции $y_j(t_s)$, $j = \overline{1, n_1}$, $s = \overline{0, N-1}$ определяются в результате решения системы (2) – (3).

Для задачи (5) необходимо внести такие уточнения:

- 1) на шаге 2 вместо системы (2) – (3) интегрируется система (9), (12);
- 2) на шаге 6 вычисляется функционал по формуле прямоугольников

$$J = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{s=0}^{N-1} x_i(t_s), \quad (22)$$

где N – количество промежутков разбиения отрезка $[0, T]$, $t_s = \frac{sT}{N}$, $s = \overline{0, N-1}$, а значения функции $x_i(t_s)$, $j = \overline{1, m_1}$, $s = \overline{0, N-1}$ определяются в результате решения системы (2) – (3);

- 3) на шаге 12 оптимальное значение функционала равно: $J_* = -\varphi_0$.

Выводы. Алгоритм работы системы управления при решении задачи оптимального распределения разнородных средств резерва в ходе конфликтной ситуации двух группировок при заданном времени операции и отсутствии резерва является основой для разработки программного обеспечения для создаваемой системы автоматизированного управления войсками и оружием.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кононов В.Б., Кушнерук Ю.И., Евстрат Д.И. Площадная интерпретация модели конфликтной ситуации // Системы обработки информации – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ, 2001. – 2001. – Вып. 5(15). – С. 39 – 41.
2. Кононов В.Б., Кушнерук Ю.И., Евстрат Д.И. Распределение однородных средств резерва в ходе встречной конфликтной ситуации двух группировок // Системы обработки информации. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вып. 4(20). – С. 96 – 101.
3. Кононов В.Б., Рафальский Ю.И., Гурин А.П. Оптимальное управление распределением средств резерва // Системы обработки информации. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вып. 5(21). – С. 45 – 47.
4. Кононов В.Б. Оптимальное управление распределением неоднородных сил и средств по критерию минимума среднего суммарного количества основных сил

противника в конфликтной ситуации // Системы обработки информации. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вып. 6(22). – С. 277 – 280.

5. *Кононов В.Б. Задачи оптимального управления распределением неоднородных сил и средств // Системы обработки информации. – Х.: ХВУ, 2003. – Вып. 1. – С. 59 – 62.*
6. *Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 631 с.*
7. *Хоффер Э., Лундерштедт Р. Численные методы оптимизации. – М: Машиностроение, 1981. – 192 с.*

Поступила 27.08.2003

КОНОНОВ Владимир Борисович – канд. техн. наук, доцент, зам. нач. факультета ХВУ. В 1987 году окончил ХВВКИУ РВ. Область научных интересов – исследование операций.
