УДК 621.317

МЕТОДИКА ИДЕНТИФИКАЦИИ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

к.т.н. С.В. Рудаков, О.Ю. Дубийчук
(представил д.т.н., проф. А.М. Крюков)

Предлагается методика компьютерного определения закона распределения случайной величины для выборки небольшого объема графоаналитическим методом, в котором построение аппроксимирующей функции выполняется по методу наименьших квадратов. Приведен пример определения закона распределения по результатам ресурсных испытаний секций высоковольтных конденсаторов.

Постановка проблемы. Известно [1], что одним из эффективных методов идентификации законов распределения (ЗР) является графоаналитический метод, который позволяет оценить вид ЗР для выборки небольшого объема. С другой стороны, с помощью этого метода возможно оценить эффективность предложенной методики идентификации ЗР.

Суть метода состоит в следующем. На координатной сетке, оси которой закодированы в соответствующем масштабе для конкретного ЗР (вероятностная бумага), наносятся экспериментальные точки. Если эти точки «ложатся» на одну прямую, то их распределение согласуется с этим конкретным ЗР.

Анализ литературы. Если априорно известно, что выборка может подчиняться одному из нескольких ЗР [1, 2], то такие построения выполняются на разных вероятностных бумагах, каждая из которых соответствует своему закону распределения [3]. Наилучшая степень близости прямой, проведенной через экспериментальные точки к теоретическим значениям, и является признаком наилучшего согласия теоретического ЗР с экспериментальными данными.

Недостатком метода является допущение о визуальном проведении прямой через экспериментальные точки, что может привести к ошибкам в интерпретации экспериментальных результатов прямой.

Цель работы – повышение достоверности методики идентификации вида ЗР случайной величины графоаналитическим методом.

Методика идентификации ЗР графоаналитическим методом. Реализация методики идентификации графоаналитическим методом осуществляется в четыре этапа:

– кодируются оси координат для каждого из возможных законов распределения;

– экспериментальные точки наносятся на преобразованные оси в соответствующем масштабе;

– через экспериментальные точки методом наименьших квадратов проводится прямая и уравнение этой прямой принимается теоретической функцией распределения;

– сравнивается теоретическое и экспериментальное распределение по критерию Смирнова-Колмогорова.

Рассмотрим построение преобразованных координатных осей для нескольких законов распределения, отличающихся существенно формой кривой плотности вероятности.

Экспоненциальный закон распределения.

Для определения выражений для Y и X (осей преобразованных координат) возьмем логарифм от левой и правой частей выражения $\ln(1 - F) = -\lambda x$. Если $Y = \ln(1 - F)$, то получим линейную функцию вида $Y = -\lambda x$. Принимая $X = x$, замечаем, что в координатах (Y, X) экспоненциальный ЗР изображается прямой. Таким образом, если экспериментальные точки легли на одну прямую вида $Y= -\lambda x$, то можно однозначно утверждать, что их распределение подчинено экспоненциальному закону.

Нормальный закон распределения.

Так как связь между квантилю u нормального ЗР и значением случайной величины x линейна $u = \frac{x - \overline{x}}{\sigma}$, то, полагая $Y = u$, а $X = x$, получим координатную плоскость для построения прямой, соответствующей нормальному ЗР. Следует отметить, что для *нормально-логарифмического закона распределения* вид “u” меняется $u = \frac{\ln x - \ln \overline{x}}{\sigma[\ln x]}$. Тогда $Y = u$, а $X = \ln x$.

Равномерный закон распределения.

Для равномерного ЗР справедливо следующее соотношение $Y = y$, $X = x$.

Распределение Симпсона.

Для построения осей Y, X воспользуемся тем обстоятельством, что плотность вероятности имеет следующий вид (рис. 1) и описывается такими выражениями:

$$f = kx + b_1; \qquad x_1 \le \overline{x} \le x;$$
$$f = -kx + b_1, \qquad \overline{x} \le x \le x_n; \tag{1}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_n}{2}. \qquad (2)$$

Из рис. 1 следует, что tg α = k. Тогда высота треугольника

$$h = (\bar{x} - x_1)\operatorname{tg}\alpha = k(\bar{x} - x_1), \qquad (3)$$

а площадь заштрихованной области S_1 равна

$$S_1 = 1/2(\bar{x} - x_1)h = \frac{k(\bar{x} - x_1)^2}{2}. \qquad (4)$$

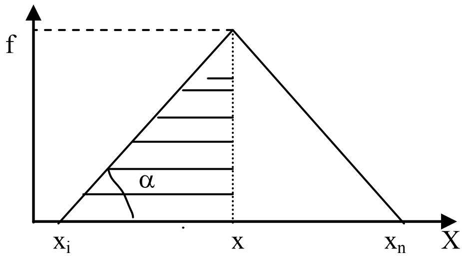


Рис. 1. Вид функции плотности вероятности по закону Симпсона

С другой стороны, учитывая, что f – плотность вероятности, и она симметрична относительно высоты h, то S_1 = 0,5 (численно равна функции распределения в средней точке выборки).

Тогда
$$\frac{k(\bar{x} - x_1)^2}{2} = 0{,}5, \qquad (5)$$

откуда
$$k = \frac{1}{(\bar{x} - x_1)^2}, \qquad (6)$$

или с учетом (2):

$$k = \frac{4}{(x_n - x_1)^2}.$$

Коэффициент b_1 определим из условия $x = x_1$, $f = 0$:

$$0 = kx_1 + b_1; \quad b_1 = -kx_1 = -\frac{4x_1}{(x_n - x_1)^2}.$$

Функция распределения на участке (x_1; $\bar{x}$) имеет вид

$$F=\int_{x_1}^{x}(kx+b_1)dx=\frac{kx^2}{2}+b_1x-\frac{kx_1^2}{2}-b_1x_1=\frac{2x^2}{(x_n-x_1)^2}-\frac{4x_1\cdot x}{(x_n-x_1)_2}-$$
$$-\frac{2x_1^2}{(x_n-x_1)^2}+\frac{4x_1^2}{(x_n-x_1)^2}=2\left[\frac{x-x_1}{x_n-x_1}\right]^2. \tag{7}$$

Если обозначить $Y=\sqrt{0{,}5F}$, $X = x$, (8)

то Y будет линейной функцией X на интервале $x_1 \le \bar{x} \le x$.

Найдем вид Y для интервала $\bar{x} \le x \le x_n$. Коэффициент k не изменится. Найдем коэффициент b_2 из условия $x = x_n$, $f = 0$:

$$0=-kx_n+b_2;\quad b_2=\frac{4x_n}{(x_n-x_1)^2}. \tag{9}$$

Функция распределения на участке $\bar{x} \le x \le x_n$ имеет вид

$$F=\int_{\bar{x}}^{x}(-kx+b_2)dx+0{,}5=-\frac{kx^2}{2}+b_2x+\frac{k\bar{x}^2}{2}-b_2\bar{x}+0{,}5=$$
$$=\frac{2x^2}{(x_n-x_1)^2}+\frac{4x\cdot x_n}{(x_n-x_1)^2}+\frac{2\bar{x}^2}{(x_n-x_1)^2}-\frac{4x_n\bar{x}}{(x_n-x_1)^2}+0{,}5=-2\left[\frac{x-x_n}{x_n-x_1}\right]^2+1. \tag{10}$$

Преобразуем (10) к виду $\sqrt{0{,}5(1-F)}=\frac{x-x_n}{x_n-x_1}$.

Обозначим $Y=\sqrt{0{,}5(1-F)}$. (11)

Тогда Y будет линейной функцией X на интервале $\bar{x} \le x \le x_n$.

Таким образом, для закона распределения Симпсона ось ординат Y строится по формулам (8) и (11).

Арксинусоидальный закон распределения.

Учитывая, что функция распределения случайной величины изменяется по закону $\arcsin x$,а именно $F = \arcsin x$,то взяв sin от обеих частей равенства, получаем $\sin F = x$. Если принять $Y= \sin F$, а $X = x$, то Y будет линейной функцией x.

Функция распределения Вейбулла достаточно часто применяется на практике для описания распределения отказов систем со слабыми звеньями и имеет вид

$$1-F=e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b}, \tag{12}$$

где a – параметр масштаба, b – параметр формы.

Если принять $Y = \ln[-\ln(1 - F)]$, а $X = \ln x$, то Y будет линейной функцией X.

Построение теоретических функций распределения осуществляется путем наилучшего приближения к экспериментальным точкам. Так как оси Y и X в кодированных значениях являются осями с равномерной шкалой, то построение прямых через экспериментальные точки на каждой из «вероятностных бумаг» можно осуществить методом наименьших квадратов [2].

При этом, если через экспериментальные точки провести прямую $Y = aX + b$,то значения a и b определяются следующими выражениями:

$$a = \frac{-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) + \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Y_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i{}^2 - \frac{1}{n}\cdot a\sum_{i=1}^{n} X_i}; \quad b = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) - \frac{1}{n}\cdot a\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad (13)$$

где n – объем выборки.

После нахождения уравнений прямых для каждой из вероятностных бумаг определяется наибольшее отклонение D экспериментальных данных от найденной прямой $D_j = \max |(F_{Ti} - F_i)_j|$, где F_{Ti}, F_i – соответственно значения теоретической и экспериментальной функции распределения в каждой i-й точке, соответствующей i-му экспериментальному значению случайной величины; j – номер закона распределения.

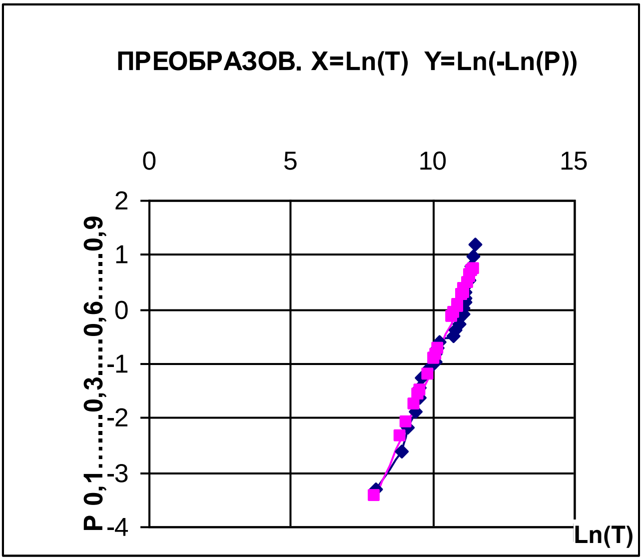
Тот закон, у которого значение D_j окажется минимальным, будет точнее остальных соответствовать экспериментальному распределению. Оценка достоверности согласия выбранного закона осуществляется по критерию Смирнова-Колмогорова [4] для заданного уровня значимости по величине $D_j \sqrt{n} < \lambda$, где λ определяется из справочных таблиц.

Методика реализована в редакторе электронных таблиц *Excel Microsoft* с автоматическим выбором лучшего согласующего ЗР по величине D_j и построением графиков для всех законов распределения.

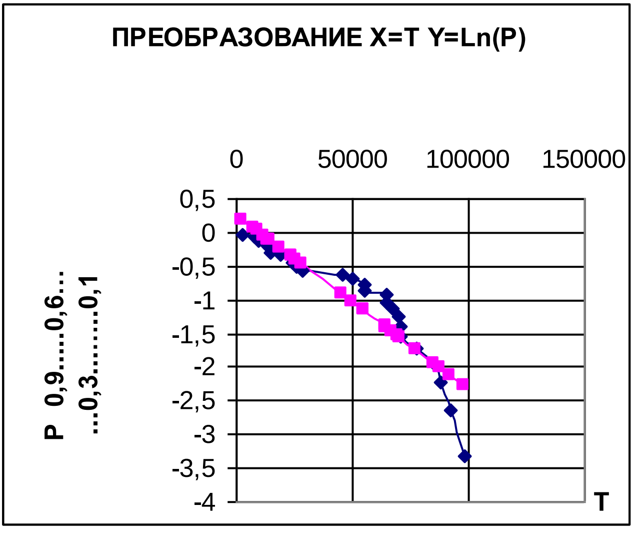
Рассмотрим пример обработки результатов ресурсных испытаний конденсаторной изоляции. При испытаниях влияния давления на секции высоковольтных импульсных конденсаторов при их запрессовке [5] получены следующие данные по ресурсу (табл. 1). В таблице N – номер опыта, T – число импульсов, приводящее к пробою секции.

На рис. 2 представлены результаты обработки данных по двум законам распределения при сравнении пяти законов распределения, наиболее часто встречающихся при вычислениях результатов ресурсных испытаний электрической изоляции, по критерию Смирнова-Колмогорова.

Из них лучшим является ЗР Вейбулла (D_j = 0,112), далее следует нормальный ЗР (D_j = 0,126), равномерный (D_j = 0,13), нормально-логарифмический (D_j = 0,146), экспоненциальный (D_j = 0,256). По оси ординат слева отложена числовая ось, соответствующая значениям функции распределения F = P, справа – числовая ось в кодированных координатах (равномерная шкала). Более темные квадратики на графиках – это экспериментальные точки, светлые квадратики – точки теоретической прямой.



а



б

Рис. 2. Результаты обработки экспериментальных данных:
а – ЗР Вейбулла; б – экспоненциальный ЗР

Таблица 1

Результаты испытаний влияния давления на секции высоковольтных импульсных конденсаторов при их запрессовке

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	10050	10226	10403	10760	10819	10899	11000	11020	11117	11218
N	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
T	11264	11333	11863	11908	12586	13435	13544	13832	13964	14100
N	21	22	23	24	25	26	27	28		
T	14499	14710	15373	15920	16129	16129	17890	25063		

Выводы. **1.** Уточнена методика идентификация ЗР графоаналитическим методом путем построения теоретической зависимости ЗР на вероятностной бумаге с помощью метода наименьших квадратов.

2. Разработан компьютерный вариант обработки экспериментальных данных с одновременным сравнением и выбором лучшего из пяти законов распределения.

3. Приведен пример обработки экспериментальных данных ресурсных испытаний секций высоковольтных импульсных конденсаторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сотсков Б.С. Основы теории и расчета надежности элементов и устройств автоматики и вычислительной техники. – М.: Наука, 1990. – 270 с.*
2. *Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1970. – 722 с.*
3. *Рунион Р. Справочник по непараметрической статистике. Современный подход. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 198 с.*
4. *Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для ВУЗов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 543 с.*
5. *Rudakov V.V., Albova I.M., Gorelov V.S. The term of service life of high voltage pulsed capacitors depending on the embedding degree. // Prog. 9-th Intern. Symp. H.V.E. – GRAZ (Austria). – 1995. – sub.1. – P. 1904 (1 – 4).*

Поступила 28.08.2003

РУДАКОВ Сергей Валерьевич*, канд. техн. наук, преподаватель кафедры ХВУ. В 1996 году окончил ХВУ. Область научных интересов – моделирование случайных процессов.*

ДУБИЙЧУК Олег Юрьевич*, аспирант НТУ «ХПИ». В 2002 году окончил НТУ «ХПИ». Область научных интересов – надежность высоковольтной изоляции.*