

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ УМОВИ НЕПЕРЕТИНУ В ЗАДАЧАХ РОЗМІЩЕННЯ В АНІЗОТРОПНІЙ ОБЛАСТІ

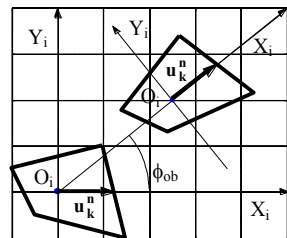
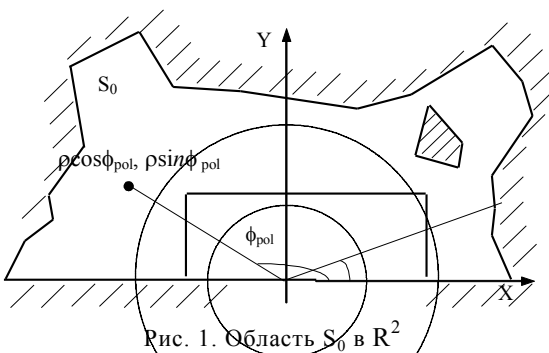
д.ф.-м.н., проф. М.В. Новожилова, Є.А. Астахов

Пропонується методика побудови аналітичного опису θ -поверхні Φ функції, що задає умову взаємного неперетину об'єктів в анізотропній області.

Постановка задачі. Розглянемо наступну задачу оптимізаційного геометричного проектування. Нехай в евклідовому арифметичному просторі R^2 задано замкнену обмежену, в загальному випадку багатозв'язну область S_0 з кусково-лінійною межею (рис. 1). Область S_0 є анізотропною внаслідок наявності в кожній точці $(x, y) \in S_0$ свого напрямку найменшої тягучості s_D , що розподілено за законом

$$x = \rho \cos \varphi_{pol}, y = \rho \sin \varphi_{pol}. \quad (1)$$

Нехай є також скінчений набір типів опуклих багатокутних об'єктів розміщення $S = \{S^n\}$, $n = \overline{1, N}$, $S^n = \{S_k^n\}$, $k = \overline{1, K_n}$. Положення центру O_i власної системи координат $X_i O_i Y_i$ об'єкта S_k^n (рис. 2) у загальній системі координат XOY , зв'язаної з S_0 , задається параметрами розміщення (x_k^n, y_k^n) , де $i = f(n, k)$. Напрямок найменшої тягучості об'єкта S_k^n – вектор u_k^n .



Необхідно розмістити об'єкти S_k^n в області S_0 за умови взаємного неперетину із врахуванням властивості анізотропії області розміщення,

щоб певний критерій якості Ψ (наприклад, коефіцієнт заповнення) досягав оптимального значення:

$$\Psi \rightarrow \text{extr}; \quad (2)$$

$$\text{int } S_i \cap cS_0 = \emptyset; \quad (3)$$

$$\text{int } S_i \cap \text{int } S_j = \emptyset, \quad (4)$$

де $\text{int}(S_i)$ – внутрішність множини S_i , cS_0 – доповнення множини S_0 до

всього простору R^2 , $i, j = 1, \overline{\sum_{n=1}^N n \times K_n}$, $i \neq j$.

Відмітимо, що у постановці (2 – 4) виділено основні обмеження. В залежності від конкретної задачі до основних обмежень можуть даватися додаткові, що моделюють технологічні обмеження, наприклад, комплекти набору об'єктів, які розміщено.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Численні роботи присвячені оптимізаційним задачам розміщення в ізотропній області розміщення [1 – 3]. Задача (2 – 4) моделює великий клас оптимізаційних задач розміщення в анізотропній області, які є цікавими з практичної та теоретичної точки зору, але раніше майже не розглядались.

Моделювання основних обмежень. В кожній точці $(x, y) \in S_0$ напрям u_k^n об'єкта S_k^n повинен збігатися з напрямом s_D області S_0 . Позначимо кутівий параметр власної системи координат об'єкта як ϕ_{i_ob} . Нехай $O_i \in \text{int } S_i$.

Умова збігу напрямів u_k^n об'єкта S_k^n і s_D точки області при переміщенні в неї полюса O_i об'єкта S_i описується рівністю

$$\phi_{i_ob} = \phi_{ipol}. \quad (5)$$

Зауваження. Для побудови аналітичного опису умов (3), (4) надалі використовується таке подання координат вершин об'єктів S_i :

$$x_i^k = \rho_i^k \cos \phi_{i_ob}, \quad y_i^k = \rho_i^k \sin \phi_{i_ob}, \quad \rho_i^k = \sqrt{(x_i^k)^2 + (y_i^k)^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Побудова аналітичного подання 0-рівню Ф-функції. Умови взаємного неперетину об'єктів S_i та S_j у даному випадку описуються Ф-функцією [1]:

$$\Phi_{ij}(x_i, y_i, x_j, y_j) \geq 0, \quad i, j = 1, \overline{\sum_{n=1}^N n \times K_n}, \quad i \neq j,$$

де x, y визначаються за законом (1).

Виберемо будь-яку пару (S_i, S_j) і покладемо $x_i = \text{const}$, $y_i = \text{const}$. За цих умов 0-поверхня $\Phi_{ij}(x_j, y_j)$ -функції являє собою кусково-неперервну криву T^2

(рис. 3, а) у просторі $R^2 \subset R^4$ параметрів трансляції (x_j, y_j) об'єкта S_j . Розглянемо множину T^2 . Геометрично це кусково-неперервна замкнена крива, кожна сторона T_p^2 , $p = 1, 2, \dots, P$, $P \leq (v_i + v_j)$ де v_i і v_j – кількість вершин об'єктів S_i і S_j відповідно, породжується одним із трьох можливих випадків “сторона – вершина” дотику об'єктів (S_i, S_j) [1]:

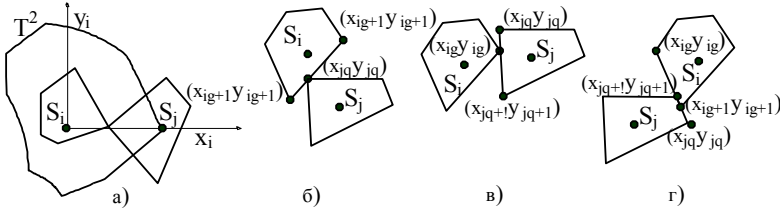


Рис. 3. Аналіз 0-поверхні $\Phi_{ij}(x_j, y_j)$ -функції

I: g-а сторона $[(x_{i,g}, y_{i,g}), (x_{i,g+1}, y_{i,g+1})]$ об'єкта S_i і q-а вершина $(x_{j,q}, y_{j,q})$ об'єкта S_j (рис. 3, б);

II: $[(x_{j,q}, y_{j,q}), (x_{j,q+1}, y_{j,q+1})] - (x_{i,g}, y_{i,g})$ (рис 3, в);

III: $[(x_{i,g}, y_{i,g}), (x_{i,g+1}, y_{i,g+1})] - [(x_{j,q}, y_{j,q}), (x_{j,q+1}, y_{j,q+1})]$ (рис. 3, г).

Очевидно, третій варіант зводиться до аналізу комбінації перших двох варіантів і далі буде розглянутий окремо.

Дотик першого типу задається рівнянням $f_1 = 0$, де функція f_1 має вигляд

$$f_1 = A_\eta(x_j - x_i) + B_\eta(y_j - y_i) + (A_\eta x_{j,q} + B_\eta y_{j,q}) \cos \Delta\phi_j - (-B_\eta x_{j,q} + A_\eta y_{j,q}) \sin \Delta\phi_j - (A_\eta x_{i,g} + B_\eta y_{i,g}),$$

де $A_\eta = y_{i,g+1} - y_{i,g}$; $B_\eta = -x_{i,g+1} + x_{i,g}$.

Дотик другого типу задається рівнянням $f_2 = 0$, де функція f_2 має вигляд

$$f_2 = (A_\eta \cos \Delta\phi_j - B_\eta \sin \Delta\phi_j)(x_j - x_i) + (B_\eta \cos \Delta\phi_j + A_\eta \sin \Delta\phi_j)(y_j - y_i) - (A_\eta x_{i,g} + B_\eta y_{i,g}) \cos \Delta\phi_j + (B_\eta x_{i,g} - A_\eta y_{i,g}) \sin \Delta\phi_j + (A_\eta x_{j,q} + B_\eta y_{j,q}),$$

де $A_\eta = -y_{j,q+1} + y_{j,q}$; $B_\eta = x_{j,q+1} - x_{j,q}$.

На кут $\Delta\phi_j$ в обох випадках накладається обмеження орієнтації об'єкта в анізотропній області

$$y_j = x_j \operatorname{ctg}(\phi_j^{\text{st}} + \Delta\phi_j),$$

де ϕ_j^{st} – кут $\phi_{j\text{пол}}$ полюсу S_j в початковій точці сторони T_p^2 .

При побудові T^2 можливі випадки, коли виникають моменти дотику третього типу. При цьому можливі як зміна типа дотику, так і продовження руху того ж типу, але, можливо, за участю інших вершин. Варіанти таких переми-

кань із значеннями кутів $\Delta\phi_{j_p}$, на який обертається об'єкт S_j , проходячи вздовж сторони T_p^2 , та значення індексів g і q , які визначатимуть наступну сторону T_{p+1}^2 в залежності від напрямку руху подані в табл. 1. Кут $\Delta\phi^{\max}$ означає, що дотик III-го типу у даному разі відсутній. У разі наявності дотику третього типу об'єкт S_j обертається на кут $\Delta\phi^{\lim}$. Очевидно, що у виродженому випадку, коли $\Delta\phi_{j_p} = 0$, напрям руху об'єкта S_j збігається з напрямом найменшої тягучості u_k^n , виникнення дотику III-го типу не має значення і потребує аналізу тільки на кінцях сторони T_p^2 . Можливі сценарії дотику I-го типу ілюструє граф (рис. 4).

Таблиця 1

Характеристики множин T_p^2

Тип дотику	Напрямок руху S_j	Показники наступної сторони T_{p+1}^2	Тип дотику після перемикання			
			1		2	
			без перемикання	з перемиканням	без перемикання	з перемиканням
1	$\Delta\phi_{j_p} > 0$	індекси g, q	$g+1, q$	$g, q - 1$	$g + 1, q$	$g + 1, q - 1$
		кут $\Delta\phi_{j_p}$	$\Delta\phi^{\max}$	$\angle S_{q-1}^j S_q^j S_{g+1}^i$	$\Delta\phi^{\max}$	$\angle S_{q-1}^j S_q^j S_{g+1}^i$
	$\Delta\phi_{j_p} < 0$	індекси g, q	$g + 1, q$	$g, q + 1$	$g + 1, q$	g, q
		кут $\Delta\phi_{j_p}$	$\Delta\phi^{\max}$	$\angle S_{q+1}^j S_q^j S_{g-1}^i$	$\Delta\phi^{\max}$	$\angle S_{q+1}^j S_q^j S_{g-1}^i$
2	$\Delta\phi_{j_p} > 0$	індекси g, q	$g, q + 1$	g, q	$g, q + 1$	$g + 1, q$
		кут $\Delta\phi_{j_p}$	$\Delta\phi^{\max}$	$\angle S_q^j S_g^j S_{g+1}^i$	$\Delta\phi^{\max}$	$\angle S_q^j S_g^j S_{g+1}^i$
	$\Delta\phi_{j_p} < 0$	індекси g, q	$g, q + 1$	$g - 1, q + 1$	$g, q + 1$	$g - 1, q$
		кут $\Delta\phi_{j_p}$	$\Delta\phi^{\max}$	$\angle S_{q+1}^j S_g^j S_{g-1}^i$	$\Delta\phi^{\max}$	$\angle S_{q+1}^j S_g^j S_{g-1}^i$

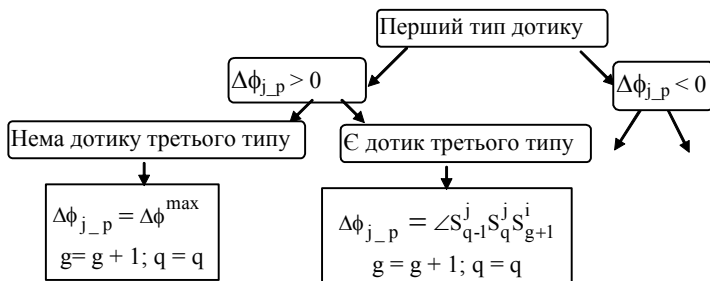


Рис. 4. Граф сценаріїв зміни дотику

Таким чином, гладка частина умов 0 – поверхня $\Phi_{ij}(x_j, y_j)$ -функції має наступний аналітичний вид:

для дотику першого типу

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ \Delta\phi \leq \min(\Delta\phi^{\max}, \Delta\phi^{\lim}); \\ \Delta\phi \geq 0 \end{cases}$$

для дотику другого типу

$$\begin{cases} f_2 = 0 \\ \Delta\phi \leq \min(\Delta\phi^{\max}, \Delta\phi^{\lim}); \\ \Delta\phi \geq 0 \end{cases}$$

де нерівність $\Delta\phi^{\max} < \Delta\phi^{\lim}$ виконується у разі наявності дотику третього типу.

Програмна реалізація. Алгоритм побудови 0-рівня $\Phi_{ij}(0,0, x_j, y_j)$ -

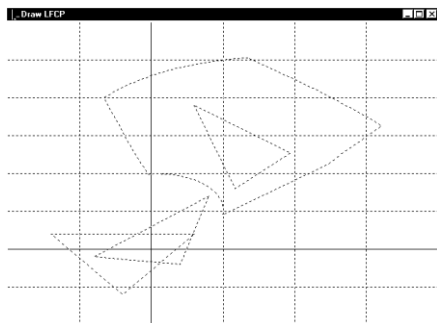


Рис. 5. Результат роботи програми

функції пари опуклих об'єктів програмно реалізовано мовою високого рівня C++ в середовищі Borland C++ Builder v.5. На рис. 5 наведено результат роботи програми.

Висновки та напрямки подальших досліджень. Розглянута задача є базою для побудови опису умов розміщення об'єктів в області.

Подальші пошуки будуть спрямовані на узагальнення отриманих результатів та побудову аналітичного опису 0-рівня Φ функції для неопуклих об'єктів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Стоян Ю.Г., Гиль Н.И. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. – К.: Наук. думка, 1976. – 248 с.
2. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – К.: Наук. думка, 1986. – 267 с.
3. Новожилова М.В. Математичні моделі і методи розв'язання нелінійних задач розміщення геометричних об'єктів: Автореф. дис. д-ра фіз.-мат. наук: 01.05.02. – Х.: Ін-т проблем машинобудування НАН України, 1999. – 35 с.

Надійшла 11.09.2003

НОВОЖИЛОВА Марина Володимирівна, доктор фіз.-мат. наук, професор, професор ХДТУБА. Закінчила ХІРЕ в 1984 році. Область наукових інтересів – математичне моделювання, обчислювальні методи.

АСТАХОВ Євген Анатолійович, старший викладач НТУ «ХПІ», який закінчив у 1997 році. Область наукових інтересів – математичне моделювання, обчислювальні методи, обробка геометричної інформації.