УДК 621.317.761

ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДУ СХІДЧАСТОЇ АПРОКСИМАЦІЇ СИНУСОЇДНИХ СИГНАЛІВ З РІВНОМІРНИМ РОЗТАШУВАННЯМ ВУЗЛІВ АПРОКСИМАЦІЇ У ЧАСІ

д.т.н., проф. В.М. Чинков, С.В. Мірошниченко

У статті наведено аналіз гармонічного складу кусково-східчастих сигналів з рівномірним розташуванням вузлів апроксимації у часі при цифроаналоговому синтезі синусоїдних сигналів.

Постановка проблеми. Роль генераторів синусоїдних сигналів при метрологічному обслуговуванні засобів вимірювальної техніки безперервно зростає, одночасно підвищуються вимоги до характеристик їх вихідних сигналів. Класичні аналогові методи формування синусоїдних сигналів практично вичерпали можливість подальшого зростання точності їх частоти та фази, зменшення нелінійних викривлень та часу перехідних процесів, підвищення рівня автоматизації тощо. В значній мірі задовольняють таким вимогам методи цифроаналогового синтезу синусоїдних сигналів, які ґрунтуються на формуванні кусково-східчастих сигналів, що апроксимують синусоїдний сигнал [1, 2].

Аналіз літератури. Залежно від того, рівномірно чи нерівномірно розташовані вузли апроксимації кусково-східчастого сигналу в часі та за рівнем, можливі три методи формування такого сигналу $u_c(t_i)$ (на рис. 1 показано півперіоду сигналу): з рівномірним розташуванням вузлів апроксимації у часі ($\Delta t_i = const$, $\Delta U_i = var$), з рівномірним розташуванням вузлів апроксимації за рівнем ($\Delta U_i = const$, $\Delta t_i = var$), з оптимальним (нерівномірним) розташуванням вузлів апроксимації і в часі, і за рівнем ($\Delta t_i = var$, $\Delta U_i = var$) [1, 3]. У цих джерелах проведено порівняльний аналіз цих трьох методів кусково-східчастої апроксимації синусоїдних сигналів за коефіцієнтом гармонік. Показано, що останній метод забезпечує мінімальне значення коефіцієнта гармонік і найкраще наближення сформованого сигналу $u_c(t_i)$ до синусоїди $u(t)$ при заданому числі рівнів апроксимації p на період сигналу T, які формуються в моменти часу $t_i = i\Delta t$, $i = \overline{1,p}$. Другим важливим показником кусково-східчастих сигналів є їх гармонічний склад, від якого залежить область використання методу апроксимації.

Мета статті полягає в дослідженні гармонічного складу кусково-східчастого сигналу з рівномірним розташуванням вузлів апроксимації у часі, як найбільш простого для реалізації у цифрових генераторах синусоїдальних сигналів.

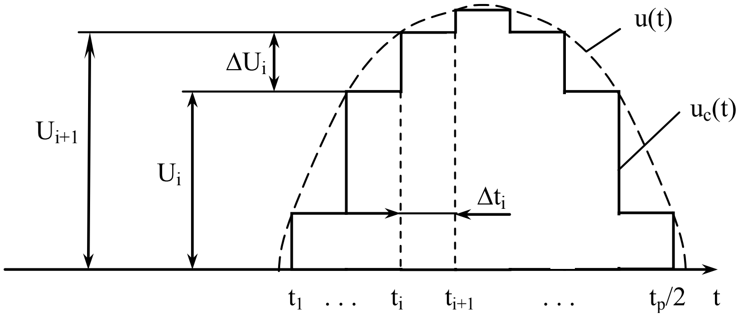

Рис. 1. Формування півперіоду кусково-східчастого сигналу

Основна частина. Розкладемо кусково-східчасту функцію $u_c(\alpha_i)$ у ряд Фур'є, враховуючи, що

$$u_c(\alpha_i) = U_i = U_m \sin(\Delta\alpha \cdot i),\ \ i = \overline{0, p-1}, \qquad (1)$$

де $\alpha = \omega t$, ω – кругова частота синусоїдного сигналу.

Підставимо рівність (1) у формулу для комплексного коефіцієнта Фур'є

$$\mathbf{D_k} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_c(\alpha) e^{jk\alpha} d\alpha.$$

Дістаємо

$$\mathbf{D_k} = \frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{p-1}\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} u_c(\alpha_i)\, e^{jk\alpha} d\alpha = \frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{p-1}\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} U_i e^{jk\alpha} d\alpha,$$

або після перетворень

$$\mathbf{D_k} = -\frac{U_m}{2\pi k}\left[\left(e^{jk\Delta\alpha} - 1\right)\sum_{i=0}^{p-1} e^{j(k+1)\alpha_i} + \left(1 - e^{jk\Delta\alpha}\right)\sum_{i=0}^{p-1} e^{j(k-1)\alpha_i}\right]. \qquad (2)$$

У цьому співвідношенні визначимо суми як суми геометричної прогресії:

$$\sum_{i=1}^{p} aq^{i-1} = \sum_{i=0}^{p-1} aq^{i} = \frac{a(1-q^p)}{1-q}.$$

У нашому випадку $a = 1, q = e^{j(k+1)\frac{2\pi}{\rho}}$. Тоді маємо:

$$\sum_{i=0}^{p-1} e^{j(k+1)\frac{2\pi}{p}i} = \frac{1 - e^{j(k+1)2\pi}}{1 - e^{j(k+1)\frac{2\pi}{p}}} = \begin{cases} \mathbf{p\ при\ k + 1 - mp = 0;} \\ \mathbf{0\ при\ k + 1 - mp \neq 0,} \end{cases} \qquad (3)$$

$$\sum_{i=0}^{p-1} e^{j(k-1)\frac{2\pi}{p}i} = \frac{1-e^{j(k-1)2\pi}}{1-e^{j(k-1)\frac{2\pi}{p}}} = \begin{cases} p \text{ при } k-1-mp=0; \\ 0 \text{ при } k-1-mp \neq 0, \end{cases} \qquad (4)$$

де $m = \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \dots$.

З урахуванням співвідношень (3) і (4) обчислимо комплексні коефіцієнти $\mathbf{D_k}$ за формулою (2) для двох умов: k + 1 – mp = 0 та k – 1 – mp = 0.

Для умови k + 1 – mp = 0 формула (2) набуває вигляду

$$\mathbf{D_k} = C_k + jB_k = \frac{U_m p}{2\pi k}(1-e^{jk\Delta\alpha}) = \frac{U_m(1-\cos k\Delta\alpha)}{k\Delta\alpha} - j\frac{U_m \sin k\Delta\alpha}{k\Delta\alpha}, \qquad (5)$$

звідки дійсний та уявний коефіцієнти Фур'є амплітуди к-ї гармоніки сигналу $u_c(t)$:

$$C_k = \frac{U_m(1-\cos k\Delta\alpha)}{k\Delta\alpha}; \quad B_k = -\frac{U_m \sin k\Delta\alpha}{k\Delta\alpha}.$$

Знаходимо початкові амплітуду та фазу к-ї гармоніки сигналу $u_c(t)$ для умови $k = m\rho - 1,\ m = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \dots$:

$$U_{km} = \sqrt{C_k^2 + B_k^2} = \frac{U_m}{k} \frac{\sin\frac{\Delta\alpha}{2}}{\frac{\Delta\alpha}{2}}; \qquad (6)$$

$$\Psi_k = \frac{C_k}{B_k} = \operatorname{arctg} \frac{\sin\left(m\pi - \frac{\Delta\alpha}{2}\right)}{-\cos\left(m\pi - \frac{\Delta\alpha}{2}\right)}. \qquad (7)$$

Для умови $k = m\rho + 1,\ m = 0, \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \dots,$ формула (2) набуває вигляду

$$\mathbf{D_k} = C_k + jB_k = -\frac{U_m \rho}{2\pi k}(1-e^{jk\Delta\alpha}) = -\frac{U_m(1-\cos k\Delta\alpha)}{k\Delta\alpha} + j\frac{U_m \sin k\Delta\alpha}{k\Delta\alpha}, \qquad (8)$$

звідки $$C_k = -\frac{U_m(1-\cos k\Delta\alpha)}{k\Delta\alpha}; \quad B_k = j\frac{U_m \sin k\Delta\alpha}{k\Delta\alpha};$$

$$\psi_k = \frac{C_k}{B_k} = \operatorname{arctg} \frac{-\sin\left(m\pi + \frac{\Delta\alpha}{2}\right)}{\cos\left(m\pi + \frac{\Delta\alpha}{2}\right)}. \qquad (9)$$

Для амплітуди к-ї гармоніки отримаємо той самий вираз (6).

Для першої гармоніки сигналу $u_c(t)$ з формул (6), (7) або (9) при k = 1 і m = 0 дістаємо:

$$U_{m1} = U_m = \left(\sin\frac{\Delta\alpha}{2} \Big/ \cos\frac{\Delta\alpha}{2}\right); \qquad \psi_1 = -\Delta\alpha / 2.$$

Із співвідношень (5), (8) видно, що в кусково-східчастому сигналі $u_c(t)$ першою з вищих гармонік буде гармоніка порядку k = p – 1; другою – гармоніка порядку k = p + 1; третьою – гармоніка порядку k = 2p – 1; четвертою – гармоніка порядку k = 2p + 1 і т.д. А рівність (6) показує, що амплітуди гармонік U_{km} убувають обернено пропорційно номерам гармонік k.

Оскільки число p парне, то всі k непарні. Отже, квазисинусоїдний сигнал з кусково-східчастою апроксимацією $u_c(t)$ розкладається в ряд Фур'є по непарних гармоніках.

Миттєві значення квазисинусоїдного сигналу з кусково-східчастою апроксимацією описуються функцією

$$u_c(t) = U_m \frac{\sin\frac{\Delta\alpha}{2}}{\frac{\Delta\alpha}{2}} \left\{ \sin\left(\omega t - \frac{\Delta\alpha}{2}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{mp-1} \sin\left[(mp-1)\,\omega t + \frac{\Delta\alpha}{2}\right] + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m}}{mp+1} \sin\left[(mp+1)\,\omega t - \frac{\Delta\alpha}{2}\right] \right\}.$$

Особливо підкреслимо, що цей сигнал не містить гармонік, близьких до основної, а початкова фаза першої гармоніки дорівнює $\Psi_1 = -\Delta\alpha/2$.

Тому, при необхідності вищі гармоніки можуть бути легко відфільтровані, тим самим покращена якість кусково-східчатого сигналу, що апроксимує синусоїдний сигнал при його цифроаналоговому синтезі.

Висновки. В статті отримані вирази для оцінки амплітуд і фаз вищих гармонік кусково-східчастого сигналу з рівномірним розташуванням вузлів апроксимації у часі, які мають важливе практичне значення для проектування прецизійних цифрових генераторів синусоїдних сигналів.

Перспективи подальших досліджень. Наступні дослідження можуть бути направлені на аналіз гармонічного складу кусково-східчастих сигналів із рівномірним розташуванням та нерівномірним у часі та за рівнем розташування вузлів апроксимації.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Горлач А.А., Минц М.Я., Чинков В.Н. Цифровая обработка сигналов в измерительной технике. – К.: Техніка, 1985. – 152 с.*
2. *Мирский Г.Я. Электронные измерения. – М.: Радио и связь, 1986. – 440 с.*
3. *Чинков В.Н. Цифровые измерительные приборы. – Х.: ХВВКИУ РВ, 1992. – 546 с.*

Надійшла 29.12.2003

ЧИНКОВ Віктор Миколайович*, доктор технічних наук. професор, професор кафедри ХВУ. В 1962 році закінчив ХПІ. Область наукових інтересів – метрологічне забезпечення озброєння і військової техніки.*

МІРОШНИЧЕНКО Світлана Валеріївна, *курсантка Харківського військового університету. Область наукових інтересів – метрологічне забезпечення.*