УДК 330.45:330.47

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫБОРА НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ И ИДЕНТИФИКАЦИИ КРИВОЙ ЛАФФЕРА

к.т.н. В.Ю. Дубницкий, М.В. Мусиенко
(представил д.ф.-м.н., проф. С.В. Смеляков)

Описана процедура поиска начальных условий для оценивания параметров нелинейной регрессии. Предлагаемая процедура использует релейную модель планирования численного эксперимента. Использование этой процедуры показано на примере идентификации кривой Лаффера.

Введение. Одной из возможных моделей зависимости между совокупной налоговой ставкой x, $0 < x < 1$, и объемом налоговых поступлений в бюджет F (x) может быть кривая Лаффера, вид которой приведен в [1]:

$$F(x) = \lambda \cdot x^{\alpha} \cdot (1-x)^{\beta}. \tag{1}$$

Из (1) следует, что при x = 0 (отсутствие налогов) и при x = 1 (абсолютное изъятие всей прибыли в бюджет) функция F(x) = 0. Отсюда возникает задача определения такого $x = x^*$, что

$$x^* = \arg\max_x F(x). \tag{2}$$

Эконометрические аспекты этой задачи изложены в работах [1, 2]. Алгоритм определения оценок $\hat{\lambda}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}$ параметров λ, α, β кривой (1) описан в работе [3]. Этот алгоритм основан на двухшаговом методе наименьших квадратов. По экономическому содержанию задачи

$$\begin{cases} F(x) = x^{\alpha} \cdot V(x); \\ V(x) = \lambda \cdot (1-x)^{\beta}. \end{cases} \tag{3}$$

В (3) принято, что V(x) – валовой внутренний продукт при ставке налогообложения x. Линеаризуя (3) получим систему

$$\begin{cases} \lg V(x) = \lambda \cdot (1-x)^{\beta}; & (4.1) \\ \lg\left(\dfrac{F(x)}{V(x)}\right) = \alpha \cdot \lg x. & (4.2) \end{cases}$$

В соответствии с принятой методикой двухшагового метода наименьших квадратов используя (4.1), определяют параметры λ и β, а затем, подставив их в (4.1), вычисляют $\hat{V}(x)$, т.е. получают оцененные значения V(x) и используют их в (4.2) для получения оценки $\hat{\alpha}$. Естественно, что подобная процедура позволяет получить смещенные оценки, что отмечено в [4]. Отсюда следует, что для повышения качества результатов идентификации следует отказаться от теории линейной регрессии и решать эту задачу, используя методы нелинейной регрессии [5, 6].

Решение задачи об идентификации кривой Лаффера состоит в общем случае из следующих этапов: 1) выбора алгоритма оценивания; 2) выбора вычислительных параметров алгоритма; 3) оценки полученных результатов; 4) определения величины x^* из (2) с учетом статистических свойств, полученных на предыдущих этапах оценок $\hat{\lambda}$, $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$.

В данном сообщении рассмотрим первый и второй этапы.

Выбор алгоритма оценивания. Пусть $F(x)_u = y_u$, $u = 1, 2, \ldots, p$…. Примем, что

$$\lambda \cdot x_u^{\alpha} \cdot (1 - x_u)^{\beta} = f_u(a), \quad a = (a_1, a_2, a_3), \quad a_1 = \lambda, a_2 = \alpha, a_3 = \beta. \tag{5}$$

Тогда условие наименьших квадратов примет вид

$$L(x;a) = \sum_{u=1}^{p} (y_u - f_u(a))^2 \to \min. \tag{6}$$

Система нормальных уравнений для условия (6) примет вид:

$$\begin{cases} \sum_{u=1}^{p} \left[F(x)_u - \lambda \cdot x_u^{\alpha} \cdot (1 - x_i)^{\beta}\right] \cdot x_u^{\alpha} \cdot (1 - x_u)^{\beta} = 0; \\ \sum_{u=1}^{p} \left[F(x_u) - \lambda \cdot x_u^{\alpha} (1 - x_u)^{\beta}\right] \cdot \lambda \cdot x_u^{\alpha} \ln x_u (1 - x_u)^{\beta} = 0; \\ \sum_{u=1}^{p} \left[F(x_u) - \lambda \cdot x_u^{\alpha} (1 - x_u)^{\beta}\right] \cdot \lambda \cdot x_u^{\alpha} \cdot (1 - x_u)^{\beta} \ln (1 - x_u) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Решение системы (7) относительно λ, α, β и будет вектором $\bar{a}$ искомых оценок параметров кривой Лаффера. Системы, подобные системе (7), в работе [6] рекомендуют решать методом Марквардта (ММ), который в данном случае имеет скорость сходимости более высокую, чем другие методы. Используя принятые в [6] обозначения, общий (к+1)-й шаг, алгоритма ММ представим в виде

$$a^{(k+1)} = a^{(k)} + \left(P_k' \cdot P_k + \mu_k \cdot D_k\right)^{-1} \cdot P_k \left(y - f(a)^k\right). \tag{8}$$

В (8) принято, что P – матрица размерности $p \times l$, p_{ur}-й элемент которой равен

$$p_{ur} = \frac{\partial f_u}{\partial a_r}, \quad u = \overline{1,p}, \quad r = 1,2,3. \tag{9}$$

Матрица D_k – это диагональная матрица, соответствующая матрице $\left(P_k' \cdot P_k\right)$, μ_k – вычислительный параметр алгоритма.

Выбор начальных параметров алгоритма. Будем относить к начальным параметрам алгоритма ММ, записанного в виде (8), величины $\alpha_0, \beta_0, \lambda_0, \mu_0$. В работе [6] рекомендовано принять, что $\mu_0 = 0{,}01$; $\mu_k = \mu_k / 10$; k = 1, 2… – шаг алгоритма. Для выбора начального вектора a_0 использована специально разработанная процедура. Так как расчеты по оптимизации уровня налогообложения периодически повторяют, то рассмотрим задачу выбора начальных параметров не для второго и последующих расчетов, а для первого, когда неизвестны не только интервалы, в которых могут находиться оценки $\widehat{a}_0$, вектора ∂, но даже неизвестен порядок этих величин.

Таким образом, определение вектора a_0 проводим в следующем порядке. Примем в качестве рабочей гипотезы, что величина L (x; a), вычисленная на основе алгоритма (8), есть функция вектора начальных параметров θ. Тогда задача сводится к выбору такого вектора $\theta \in A_0$, где A_0 – множество возможных значений θ, чтобы

$$a_{0\text{опт}} = \arg\min_{A} L(x;a). \tag{10}$$

Иными словами, требуется восстановить функцию $\psi = \psi(L,a)$ и найти ее минимум по a. Для этого воспользуемся следующей процедурой:

1. Используя уравнение (4.1) и (4.2) определим оценки $\widetilde{\lambda}_0, \widetilde{\beta}_0$ (из условия (4.1)) и оценку $\widetilde{\alpha}_0$ (из условия (4.2)).

2. Используя стандартные процедуры регрессионного анализа, определим верхнюю и нижнюю доверительные границы этих параметров.

3. Границы поиска допустимой области начальных значений a_{0r} (i = 1, 2, 3) определим по условию

$$\widetilde{a}_{0r} - t_2 s_{\widetilde{a}_{0r}} < a_0 < \widetilde{a}_{0r} + t_1 s_{a_{0r}}, \quad r = 1, 2, 3, \tag{11}$$

где $\widetilde{a}_{0i}$ – оценка i-го параметра по условию (4.1) или (4.2), $S_{\widetilde{a}_{0r}}$ – среднеквадратическое отклонение соответствующей оценки. t_1, t_2 – вычислительные параметры алгоритма, определяемые опытным путем. Примем, что $A_{\text{нг}}$, $A_{\text{вг}}$ – соответственно нижняя и верхняя границы интервала допустимого изменения i-го параметра. После этого, используя уравнение (4.1) и (4.2), определяют оценки $\tilde{\lambda}_0, \tilde{\beta}_0$ (из условия (4.1)) и оценку $\tilde{\alpha}_0$ (из условия (4.2)). Затем, применяя типовые приемы [5], определяют верхнюю ($A_в$) и нижнюю ($A_н$) доверительные границы этих параметров. Границы поиска начальных значений a_{0r} (i = 1, 2, 3) определяют по условию:

$$A_в = \tilde{a}_{0r} + t_1 S_{\tilde{a}_0 r}; \tag{12}$$

$$A_н = \tilde{a}_0 r - t_2 S_{\tilde{a}_0 r}. \tag{13}$$

Для восстановления функции ψ (L, a) по результатам вычислительного эксперимента использован релейный метод обработки данных пассивного эксперимента [7]. Для этого в интервале $[A_{нг}, A_{вк}]$ генерируют 3 M случайных чисел m_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$, таких что $M = N\left(\tilde{a}_{0r}, \frac{1}{6}(A_{вк} - A_{нг})\right)$, где $N(b, s)$ – нормально распределенные случайные числа с математическим ожиданием b и среднеквадратическим отклонением S.

Каждой тройке чисел, соответствующей $\lambda_{0j}, \alpha_{0j}, \beta_{0j}$, ставят в соответствие вычисленную в соответствии с (6) или (8) величину L_j(x, a). Результаты вычислений представим в виде блочной матрицы

$$A = [A_1 \vdots L], \tag{14}$$

где $A_{1(mxl)} = \{a_{ji}y\}$, j = $\overline{1, M}$, $i = \overline{1,3}$ – матрица условий эксперимента, состоящая из значений, полученных на предыдущем этапе результатов численного моделирования величины L(a) таких, что $L_{(mxl)} = \{l_{m,1}\}$.

Матрицу A преобразуем в матрицу Z по правилу

$$Z_{ji} = \begin{cases} +1, \text{ если } a_{ji} > \bar{a}_j; \\ -1, \text{ если } a_{ji} < \bar{a}_i, \end{cases} \quad j = \overline{1, M}, \quad i = \overline{1,3}, \tag{15}$$

где $\bar{a}_i$ – среднее значение величины a_i.

Интерполяционное уравнение в этом случае имеет вид

$$\psi = a_0 + \sum_{i=1}^{3} в_i a_i + \sum_{\substack{i,t=1 \\ i<t}}^{3} в_{it} a_i a_t. \tag{16}$$

Коэффициенты этого уравнения вычисляют по таким выражениям:

$$\hat{в}_i = \left[(\pi/2)^{1/2} / MS\{a_i\}\right] \cdot \sum_{j=1}^{M} L_j Z_{ij}; \tag{17}$$

$$\text{в}_{it} = \left[\pi / \left(2 \cdot MS\{a\}_i S\{a_t\}\right)\right] \sum_{j=1}^{M} L_j Z_{ij} Z_{tj}; \tag{18}$$

$$\text{в}_0 = N^{-1} \sum_{j=1}^{M} L_j - \sum_{j=1}^{M} \text{в}_i \bar{a}_i - \sum_{\substack{i,t=1 \\ i<t}}^{3} L_j Z_{ij} Z_{tj}. \tag{19}$$

В выражениях (17) … (19) величина $S\{a_i\}$ – смещенное среднеквадратическое отклонение величины a_i, оцененное по соответствующему столбцу матрицы A_1 (14). Очевидно, что минимум выражения (16) обеспечивает выполнение условия (10). Поиск минимума уравнения (16) выполняют методом наискорейшего спуска. Полученные при этом значения переменных принимают в качестве оптимальных начальных условий для алгоритма (8).

Выводы. 1. Установлена зависимость качества нелинейной регрессионной модели от начальных приближений при использовании для ее идентификации алгоритма Марквардта.

2. Предложена процедура поиска вектора начальных условий, обеспечивающего выбор наилучшей нелинейной регрессии в данном классе алгоритмов.

3. Описана процедура оптимального выбора начальных параметров кривой Лаффера – одной из важнейших количественных характеристик фискальной политики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сморгонский А.В. Оптимизация налогов на прибыль предприятий // Экономика и математические методы. – 1992. – Т. 28. – Вып. 2. – С. 316 – 318.*
2. *Чугунов И. Взаимосвязь ставки налогов и налоговых поступлений // Бизнес-информ. – 1997. – № 11. – С. 28 – 33.*
3. *Лондар С. Определение параметров кривой Лаффера для украинской экономики // Бизнес-информ. – 1998. – № 13 – 14. – С. 19 – 24.*
4. *Бард Й. Нелинейное оценивание параметров функции. – М.: Статистика, 1979. – 349 с.*
5. *Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. – М.: Статистика, 1973. – 390 с.*
6. *Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессии. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 302 с.*
7. *Мойсюк Б.Н. Некоторые методы идентификации и оптимизации сложных объектов. – М.: МЭИ, 1982. – 84 с.*

Поступила 10.01.2004

***ДУБНИЦКИЙ Валерий Юрьевич**, кандидат технических наук, доцент Харьковского филиала Украинской академии банковского дела. В 1975 году окончил Харьковский институт радиоэлектроники. Область научных интересов – исследование операций.*

***МУСИЕНКО Михаил Васильевич**, студент Харьковского филиала Украинской академии банковского дела. Область научных интересов – исследование операций и принятие решений в системах налогообложения.*

Замечание. В статье В.Ю. Дубницкого "Определение числа страховых случаев при выполнении военнослужащими своих обязанностей в условиях повышенной опасности", опубликованной в выпуске 1 этого года, пропущено примечание к табл. 1, 2, которое вместе с таблицами приведено ниже.

Таблица 1*

Сведения о боевых потерях в вооруженных конфликтах

№ п/п	Продолжительность конфликта, t, мес.	Численность войск одной из сторон, n, чел.	Количество страховых случаев, m, чел.
1	1	7505	5
2	2	18477	11
3	1	18521	199
4	1	22950	759
5	1	2421000	1475
6	6	16000	45
7	1	5948	2
8	2	12460	27
9	20	70000	5552
10	110	620000	9661

Таблица 2*

Первичная статистическая обработка данных табл. 1

№ п/п	Вероятность P наступления СС, $P = (m/n) \cdot 10^{-4}$	Математическое ожидание числа СС, $m = np$	Дисперсия числа СС, $S^2 = npq$
1	6	4,503	4,5
2	6	11,0862	11,08
3	107	198,17	196,05
4	331	759,64	734,5
5	6,1	1452,6	1451,72
6	28	44,8	44,67
7	3	1,78	1,78
8	22	27,41	27,35
9	793	5551	5110,8
10	156	9672	9521,11

* ***Примечание***: 1) Противоповстанческая операция в Чечне, 1925 г. 2) Противобасмаческая операция, Туркестан, 1926 г. 3) Советско-Китайский конфликт, 1929 г. 4) Советско-Японский конфликт, Хасан, 1938 г. 5) Присоединение Западной Украины и Западной Белоруссии, 1939 г. 6) Бои с частями ОУН-УПА, Львовский военный округ, октябрь 1944 – март 1945 г. 7) Грузинско-абхазский конфликт, 1992 г. 8) Осетино-ингушский конфликт, 1992 г. 9) Антитеррористическая операция в Чечне, 1994 – 1996 г. 10) Боевые действия в Афганистане, 1979 – 1989 гг.