УДК 389.01.621

ИНФОРМАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ МНОГОПАРАМЕТРОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ АПРИОРНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ФУНКЦИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

к.т.н. П.Ф. Щапов, М.П. Качанов
(представил д.т.н., проф. Л.В. Дербунович)

Предложен метод оценки минимального числа калиброванных значений входных многопараметровых сигналов, необходимых для градуировки многопараметровых измерительных преобразователей, по заданной достоверности ожидаемой измерительной информации.

Постановка проблемы. Задача выбора минимально допустимого числа калибровочных сигналов для идентификации функции преобразования нестандартных средств измерений достаточно важна как с экономической, так и с технической точек зрения. В законодательной метрологии – это задача минимизации количественного объема групповой меры при заданной точности оценивания метрологических характеристик средств измерительной техники [1]. В общей метрологии – это задача выбора числа точек наблюдений и способа их расположения при оценке коэффициентов полиномиальных моделей для заданного вида калибровочных функций [2].

С другой стороны, при создании новых нестандартных измерительных преобразователей физических величин в электрический сигнал часто возникает трудность принципиального характера – невозможность получения достаточно большого числа калиброванных значений измеряемой физической величины, с целью последующей оценки постоянных коэффициентов функции преобразования заданного вида.

Цель статьи – разработка методики определения минимального числа калибровочных входных сигналов для оценки коэффициентов полиномиальной функции преобразования при заданном уровне достоверности.

Такая номинальная функция является, фактически, регрессией выходного электрического сигнала Y на конечное множество входных измеряемых неэлектрических величин $X_j,\ j=\overline{1,k}$:

$$Y = b_0 + \sum_{j=1}^{k} b_j \cdot X_j . \qquad (1)$$

Ограничимся, для простоты, линейной множественной регрессией (1), частные коэффициенты которой необходимо оценить при градуировке преобразователя по выборке из n калиброванных величин $X_{ij}, j=\overline{1,k}, i=\overline{1,n}$. По окончании градуировки действительная функция преобразования имеет вид

$$\hat{Y} = b_0^* + \sum_{j=1}^{k} b_j^* \cdot X_j + \varepsilon, \qquad (2)$$

где $b_0^*, b_1^*, \dots, b_k^*$ – оценки соответствующих неизвестных частных коэффициентов; ε – остаточная ошибка (остаток).

Числовые характеристики остатка:

$$M[\varepsilon] = 0;\ M[\varepsilon^2] = \sigma^2;\ \mathrm{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_s) = 0,\ i \neq s.$$

Величины X_j в уравнениях (1) и (2) – это непрерывные (аналоговые) величины, именуемые параметрами. Параметры X_j могут являться, например, количественными показателями качества контролируемого объекта, технологического процесса и т.д.

Информационный анализ моделей измерения. Определим количество информации, получаемое в ходе однократного измерения значений параметров X_j с помощью многопараметрового измерительного преобразователя с действительной функцией преобразования (2). При этом будем предполагать, что значения X_j являются реализациями равномерно распределенных случайных величин в диапазонах измерения $\Delta_{xj} = x_{\max j} - x_{\min j}$. Закон распределения остатка ε будем считать нормальным, с параметрами $m_\varepsilon = 0$, $D_\varepsilon = \sigma^2$.

Известно [3], что информация, получаемая в ходе измерений, определяется как ожидаемая степень снижения неопределенности знаний о значении измеряемой величины и количественно равна разности дифференциальных энтропий:

$$I = h_y - h_{y/y_N}, \qquad (3)$$

где h_y – дифференциальная энтропия значений непрерывной величины до измерений; h_{y/y_N} – дифференциальная остаточная энтропия непрерывной величины после измерения.

Найдем сначала количество информации для однопараметрового преобразователя с действительной функцией преобразования

$$\hat{Y} = b_0^* + b_1^* \cdot x + \varepsilon, \qquad (4)$$

найденной методом наименьших квадратов по n контрольным значениям входной величины x.

Дифференциальная энтропия до измерения равна

$$h_y = -\int\limits_{y_{min}}^{y_{max}} f(y)\log f(y)\,dy = \log(y_{max} - y_{min}) = \log(b_1 \cdot A_x)\,, \tag{5}$$

где $b_1 A_x = A_y$ – диапазон выходного сигнала преобразователя.

Дифференциальная энтропия после измерения имеет вид

$$h_{y/y_N} = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{y_{min}}^{y_{max}} f(y, y_N)\log\frac{f(y, y_N)}{f(y_N)}\,dy\,dy_N\,, \tag{6}$$

где y_N – результат измерения величины у с погрешностью Δy, т.е.

$$y_N = y + \Delta y\,;$$

$f(y,y_N)$ – двумерная плотность случайных величин у и y_N; $f(y_N)$ – плотность распределения результата измерения y_N.

Выражение (6) является математическим ожиданием величины

$$\log_2\frac{f(y, y_N)}{f(y_N)}\,.$$

Учитывая, что:

а) $f(y, y_N) = f(y)\cdot f(y_N / y)$;

б) $f(y) = \dfrac{1}{b_1 \cdot A_x}$ если $y_{min} < y < y_{max}$;

в) $f(y_N / y) = f(\Delta y) \sim N(0, \sigma^2_{\Delta y})$;

г) $f(y_N) \sim N(0, \sigma^2_{y_N})$, где $\sigma^2_{y_N} = \dfrac{b_1^2 \cdot A_x^2}{12} + \sigma^2_{\Delta y}$,

найдем энтропию h_{y/y_N}. Решая уравнение (6), получим :

$$h_{y/y_N} = \log\frac{b_1 \cdot A_x \cdot \sigma_{\Delta y}}{\sqrt{\dfrac{A_x^2}{12} + \sigma^2_{\Delta y}}}\,. \tag{7}$$

Окончательно, количество информации, получаемое в ходе измерения преобразователем с действительной функцией преобразования, равно:

$$I = \log(b_1 A_x) - \log\frac{A_x \cdot \sigma_{\Delta y}}{\sqrt{\dfrac{A_x^2}{12} + \sigma^2_{\Delta y}}} = \log\sqrt{1 + \frac{A_x^2}{12\sigma^2_{\Delta y}}}\,. \tag{8}$$

Дисперсия $\sigma^2_{\Delta y}$ – это неустраняемая остаточная дисперсия, оценкой которой является величина [2]:

$$S_{ocm}^2\left[1+\frac{1+\overset{0}{x}{}_i^2}{(n-2)}\right], \qquad (9)$$

где $\overset{0}{x}{}_i^2 = \left(\frac{x_i - m_x}{\sigma_x}\right)^2$ – квадрат центрированного значения независимого результата измерения x_i; $S_{oст}^2$ – выборочная остаточная дисперсия

.
$$S_{ocm} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{Y}_i)^2 . \qquad (10)$$

Поскольку плотность распределения результата x_i равномерна, т.е. $f(x) = \frac{1}{A_x}$, то $m_x = \frac{x_{min}+x_{max}}{2}$; $\sigma_x^2 = \frac{A_x}{12}$.

Оценка $\sigma_{\Delta y}^2$ лежит в интервале $\left(\sigma_{min}^2, \sigma_{max}^2\right)$, где:

а)
$$\sigma_{min}^2 = S_{ocm}^2\left[1+\left(\frac{1}{n-2}\right)\right], \qquad (11)$$

если $x_i = m_x$ (измерения проводят в середине диапазона);

б)
$$\sigma_{max}^2 = S_{ocm}^2\left[1+\left(\frac{4}{n-2}\right)\right], \qquad (12)$$

если $x_i = x_{max}$ или $x_i = x_{min}$ (измерения проводят на краю диапазона).

С учетом выражений (11) и (12) получим два уравнения для вычисления максимального и минимального количества информации для преобразователя с априорно неопределенной (в рамках остатка ε) функции преобразования (4):

$$I_{max} = \log\sqrt{1+\frac{A_x^2}{12\cdot S_{ocm}^2\left[1+\frac{1}{(n-2)}\right]}}\ ; \qquad (13)$$

$$I_{min} = \log\sqrt{1+\frac{A_x^2}{12\cdot S_{ocm}^2\left[1+\left(\frac{4}{n-2}\right)\right]}}\ . \qquad (14)$$

Если число калиброванных значений измеряемого параметра достаточно велико, $(n \to \infty)$, предельно максимальное количество информации, получаемое в ходе однократного измерения, равно:

$$I_\infty = \log\sqrt{1+\frac{A_x^2}{12S_{ocm}^2}}\ . \qquad (15)$$

Переходя к многопараметровым измерениям, найдем выражения для количества информации, когда градуировка преобразователя с функцией преобразования (2) проводится с использованием одинакового числа n контрольных значений по каждому параметру. Измеряемые параметры считаются независимыми. Учитываем, что неопределенность в оценке частных коэффициентов уравнения (2) зависит от ширины доверительного интервала для одиночных независимых наблюдений x_j, $j=\overline{1,k}$, с дисперсией [4]:

$$S_{ocm}\left[1+\frac{1}{n-k-1}+\frac{1}{n-k-1}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{x_j-m_{xj}}{\sigma_{xj}}\right)^2\right]. \qquad (16)$$

Тогда общее выражение для количества ожидаемой измерительной информации, получаемой в ходе (n + 1)-го измерения составляющих $x_1, \ldots, x_k$, равно:

$$I=\log\sqrt{1+\frac{\sum_{j=1}^{k}b_j^2A_{xj}^2}{12S_{ocm}^2\left[1+\frac{1}{n-k-1}+\frac{1}{n-k-1}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{x_j-m_{xj}}{\sigma_{xj}}\right)^2\right]}}. \qquad (17)$$

Выборочная остаточная дисперсия, в этом случае, определяется как

$$S_{ocm}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-b_0-\sum_{j=1}^{k}b_j(x_{ij}-m_{xj})\right]^2. \qquad (18)$$

Проанализируем выражение (17) для случаев:

а) $x_j - m_{xj} = 0$; б) $|x_j - m_{xj}| = A_{xj}/2$.

Примем во внимание, что для равномерно распределенной величины

$$\sigma_{xj}^2=\frac{A_{xj}^2}{12},\ j=\overline{1,k}.$$

Найдем теперь максимальное и минимальное количество информации при многопараметровых измерениях:

а) в середине диапазонов A_{xj}

$$I_{max}=\log\sqrt{1+\frac{\sum_{j=1}^{k}b_j^2A_{xj}^2}{12S_{ocm}^2\left(1+\frac{1}{n-k-1}\right)}}; \qquad (19)$$

б) на концах диапазонов A_{xj}

$$I_{min} = \log\sqrt{1+\frac{\sum\limits_{j=1}^{k} b_j^2 A_{xj}^2}{12S_{ocm}^2\left[1+\frac{(1+3k)}{(n-k-1)}\right]}}\,. \qquad (20)$$

Предельно максимальное количество информации получим из (17) при ($n \to \infty$):

$$I_{\infty} = \log\sqrt{1+\frac{\sum\limits_{j=1}^{k} b_j^2 A_{xj}^2}{12S_{ocm}^2}}\,. \qquad (21)$$

Методика оценивания числа калибровочных сигналов. 1. Достоверность [3] ожидаемой измерительной информации, получаемой в ходе однократных измерений с помощью преобразователя с действительной функцией преобразования (2), определим как отношение:

$$\eta = I_{max}/I_{\infty}\,. \qquad (22)$$

2. Задаваясь минимально допустимым значением $\eta_н$ достоверности (например $\eta_н = 0.95$), можно оценить минимальное n_{min} число калиброванных значений входного сигнала, необходимых для градуировки многопараметрового преобразователя, исходя из неравенства

$$\eta \geq \eta_н, \qquad (23)$$

или

$$\log\sqrt{1+\frac{\sum\limits_{j=1}^{k} b_j^2 A_{xj}^2}{12S_{ocm}^2\left[1+\frac{1}{(n_{min}-k-1)}\right]}} \geq \eta_н \cdot \log\sqrt{1+\frac{\sum\limits_{j=1}^{k} b_j^2 A_{xj}^2}{12S_{ocm}^2}}\,. \qquad (24)$$

Выводы и практические результаты. На рис. 1 показаны зависимости $\eta = F(n)$ для $к = 1$, $к = 3$. При этом отношение дисперсии параметра к квадрату погрешности преобразователя было выбрано достаточно большим:

$$\frac{b_1^2 A_{x1}^2}{12\,S_{ocm}^2} = \frac{b_2^2 A_{x2}^2}{12S_{ocm}^2} = \frac{b_3^2 A_{x3}^2}{12S_{ocm}^2} = 100\,,$$

что соответствует приведенному значению остаточного среднеквадратического отклонения $S < 0.85\%$.

Как видно из рис. 1, минимальное число калиброванных значений входного сигнала равно:

а) $n_{min} = 6$ (для однопараметрового преобразователя);

б) $n_{min} = 9$ (для трехпараметрового преобразователя).

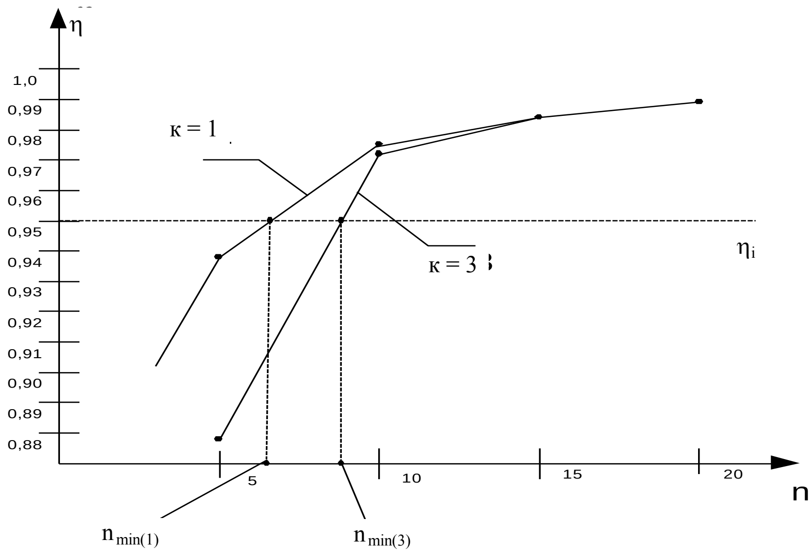

Рис. 1. Кривые достоверности измерительной информации для одно- и трехпараметровых преобразователей

При этом максимальное количество измерительной информации, получаемой с помощью этих преобразователей, гарантируется с достоверностью 95%, если измерения проводят в серединах диапазонов контролируемых сигналов измерительной информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Івицький І.Р., Бек А.О. про критерії визначеності мінімально достатнього кількісного складу групових мір // УМТ. – 2002. – Вип. 2. – С. 19 – 21.*
2. *Светлов С.М. Способ асимптотической оценки погрешности полиномиальной аппроксимации по методу наименьших квадратов // Український метрологічний журнал. – 1999. – Вип. 3. – С. 61 – 64.*
3. *Орнатский П.П. Теоретические основы информационно-измерительной техники. – К.: Вища школа, 1976. – 432 с.*
4. *Крамер Г. Математические методы статистики. Пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 648 с*

Поступила 16.01.2004

ЩАПОВ Павел Федорович, *к.т.н., доцент кафедры "Измерительно-информационная техника" НТУ "ХПИ". В 1969 году окончил Новочеркасский политехнический институт. Область научных интересов – теория информации и техническая кибернетика.*

КАЧАНОВ Максим Петрович, *аспирант кафедры "Измерительно-информационная техника" НТУ ХПИ. В 2001 году окончил НТУ "ХПИ". Область научных интересов – информаци-*

онно-измерительные системы.