

## ФРАКТАЛЬНЫЙ ГАУССОВСКИЙ ШУМ В ТРАФИКОВЫХ ТРАССАХ

к.т.н. Г.А. Кучук

(представил д.т.н., проф. А.В. Королёв)

*Предложены методы моделирования фрактального гауссовского шума в трафиковых трассах телекоммуникационных сетей. Проведен сравнительный анализ предложенных методов.*

**Введение.** При проектировании и модернизации распределенных телекоммуникационных сетей возникает необходимость в предварительном моделировании, которое бы как можно более точно отражало сетевые процессы и учитывало характер реального трафика не только на коротких временных промежутках, но и при анализе долговременной зависимости (ДВЗ). Существующие в настоящее время теоретические разработки и программные средства моделирования трафика [1 – 4] учитывают большинство его характерных свойств, однако «хвосты» предлагаемых распределений обычно имеют экспоненциальный, быстро сходящийся, характер, не позволяющий проводить моделирование ДВЗ-процессов. В [5] предложен подход к построению модели обобщенного фрактального броуновского движения (ОФБД) на основе анализа его статистических свойств, учитывающий «тяжелые хвосты» распределений, которые имеют степенной характер убывания. При этом были выделены две компоненты исследуемого процесса: низкочастотная фрактальная и высокочастотная марковская. Методы моделирования второй из компонент подробно описаны во многих источниках (например, [6]).

**Целью данной статьи** является описание методов моделирования низкочастотной фрактальной компоненты ОФБД-процесса, проведение их сравнительного анализа и выдача практических рекомендаций по применению данных методов при моделировании реальной трафиковой трассы телекоммуникационной сети.

**1. Особенности фрактального гауссовского шума.** Низкочастотная фрактальная компонента ОФБД  $B_f(t)$  представляет собой стационарный процесс приращений  $X(t)$  данного процесса и называется фрактальным гауссовским шумом (ФГШ)

$$G_f = \{X_f(t) = B_f(t+1) - B_f(t) \mid t \geq 0\}$$

с корреляционной функцией [5]

$$K(\tau) = \frac{|\tau+1|^{2\alpha} - 2|\tau|^{2\alpha} + |\tau-1|^{2\alpha}}{2},$$

где  $\alpha$  – показатель Херста ( $0,5 \leq \alpha < 1$ ).

Как видно из рис. 1, корреляционная функция  $K(\tau)$  предполагает спад в корреляции гораздо более медленный, чем у экспоненциальных ( $e^{-\tau/2}$ ) и гауссовских ( $e^{-\tau^2/2}$ ) корреляционных кривых.

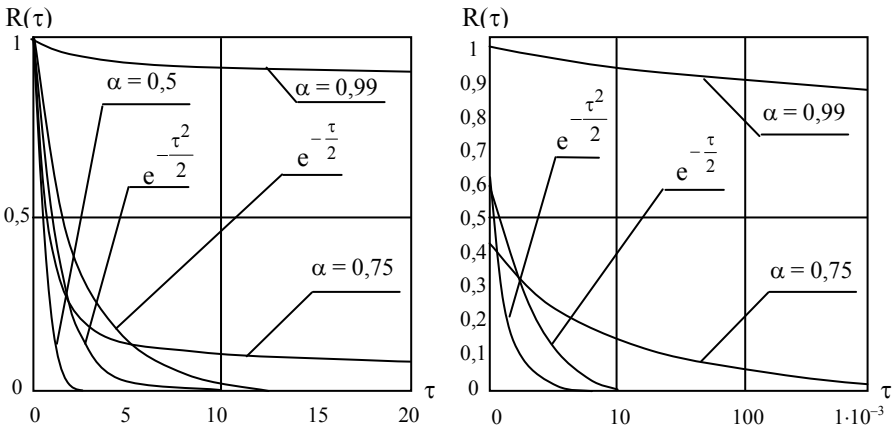


Рис. 1. Характер поведения корреляционных кривых:

- а) линейный масштаб;
- б) логарифмический масштаб

При  $\alpha = 0,5$  (вырожденный случай):

$$K(\tau) = \begin{cases} 1 - \tau, & \text{при } 0 < \tau < 1; \\ 0, & \text{при } \tau \geq 1. \end{cases}$$

При  $\alpha \in (0,5;1)$  и  $\tau \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} K(\tau) &= \left( (\tau+1)^{2\alpha} - 2\tau^{2\alpha} + (\tau-1)^{2\alpha} \right) / 2 = \\ &= \left( \left( \tau^{2\alpha} + 2\alpha\tau^{2\alpha-1} + \alpha(2\alpha-1) \cdot \tau^{2\alpha-2} + o(\tau^{2\alpha-2}) \right) - 2\tau^{2\alpha} + \right. \\ &\left. + \left( \tau^{2\alpha} - 2\alpha\tau^{2\alpha-1} + \alpha(2\alpha-1) \cdot \tau^{2\alpha-2} + o(\tau^{2\alpha-2}) \right) \right) / 2 \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \alpha(2\alpha-1) \cdot \tau^{2\alpha-2}, \end{aligned}$$

т.е. ФГШ является точно самоподобным процессом, описывающим приращения ОББД с показателем Херста  $\alpha$ , изменяющимся от 0,5 до 1:

$$G_f(t) = \frac{1}{\delta} (B_f(t + \delta) - B_f(\delta)),$$

где  $\delta$  – приращение ОФБД.

Следовательно,  $G_f(t) \in N(0; \sigma|\delta|^2)$  и позволяет формировать самоподобный гауссовский процесс. В случае если ФГШ подается на вход очереди бесконечной длины с постоянной интенсивностью обслуживания, то распределение «тяжелого хвоста» (ТВ) очереди затухает асимптотически по закону Вейбула  $(1 - F(x) \sim e^{-\delta x^{2-2\alpha}})$  [7]. Классические модели, соответствующие случаю  $\alpha = 1/2$ , не позволяют моделировать долговременные зависимости с «тяжелыми хвостами», поэтому для моделирования трафиковых процессов необходимы методы, позволяющие с определенной точностью получить ФГШ.

**2. Метод перемещения средней точки (ПСТ-метод).** Данный метод использует идею RMD-алгоритма [8], при котором сгенерированная выборка объемом  $n$  на каждом следующем шаге рекурсивно расширяется на  $(n-1)$  значение за счет добавления значений в средних точках каждого интервала, учитывающих граничные значения на интервале и случайную граничную компоненту смещения, гарантирующую нормальное маргинальное распределение новой последовательности. Схема алгоритма ПСТ-метода генерации ОФБД представлена на рис. 2, а последовательность шагов алгоритма описана ниже.

*Шаг 1.* Устанавливаются начальные значения для моделирования случайной величины  $X(t)$  на границах интервала  $t \in [0; 1]$ :

$$\begin{aligned} X(0) &= 0; \\ X(1) &\in N(0; \sigma_1), \end{aligned}$$

где  $\sigma_1 = \sigma(X(1))$ , т.е. выполняется условие

$$\sigma^2(X(1) - X(0)) = \sigma_1^2.$$

*Шаг 2.* В соответствии с вышесказанным определим

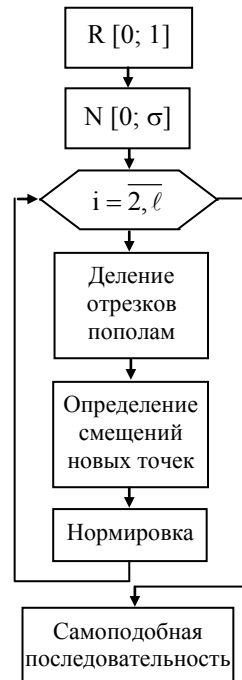


Рис. 2. Схема получения  $(2^{\ell}+1)$ -ФБД-последовательности ПСТ-методом

$$X(0,5) = 0,5 \cdot (X(0) + X(1)) + S_2,$$

где смещение  $S_1$  является произведением масштабного коэффициента  $k_2$  (на  $i$ -м шаге  $k_i = (\sqrt{2})^{-i}$ , т.е.  $k_2 = 1/2$ ) на нормально распределенную случайную переменную  $\gamma_2 \in N(0, \sigma_2)$ :

$$S_2 = k_2 \cdot \gamma_2.$$

В [5] доказано, что для соблюдения свойств ОФБД требуется выполнение равенства

$$\sigma^2(X(t_2) - X(t_1)) = |t_2 - t_1|^{2\alpha} \sigma_1^2 \text{ для } 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1, \quad (1)$$

где  $\alpha$  – показатель Херста обобщенного ФБД.

Тогда:

$$\sigma^2(X(0,5) - X(0)) = 0,25 \text{ var}(X(1) - X(0)) + \sigma_2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha} \sigma_1^2;$$

$$\sigma_2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha} (1 - 2^{2\alpha-2}) \sigma_1^2.$$

Результат выполнения шага 2 схематично представлен на рис. 3 ломаной линией 2 ( $OA_2A_1$ ).

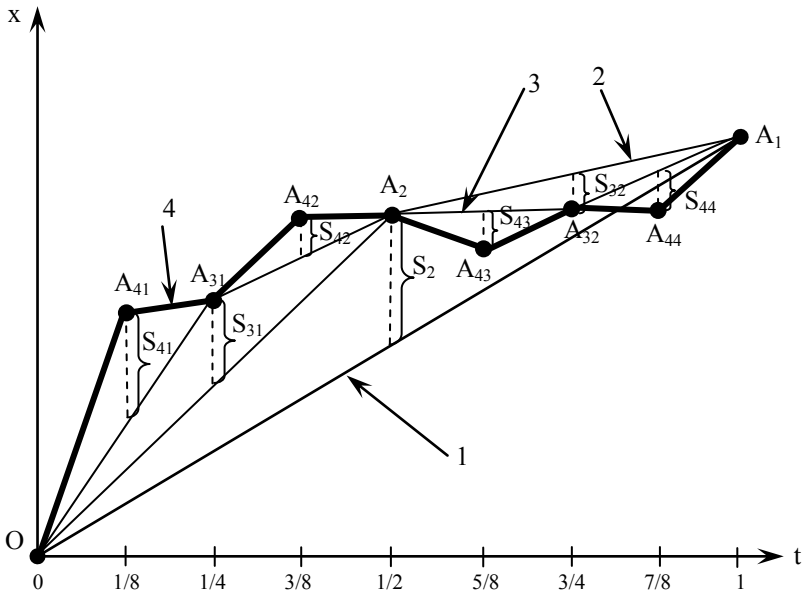


Рис. 3. Формирование  $(2^3+1)$ -ФБД-последовательности:  
1 – начальные условия; 2 – результат 1-го разбиения;

- 3 – промежуточная  $(2^{2+1})$ -ФБД-последовательность;
- 4 – итоговая последовательность

*Шаг 3.* На данном шаге получаем промежуточную  $(2^{2+1})$ -ФБД-последовательность, составленную из трех точек ломаной линии 2 (рис. 3) и полученных аналогичным образом двух точек в серединах отрезков  $[0; 1/2]$  и  $[1/2; 1/4]$  (в итоге – линия 3 на рис. 3).

*Шаг i.* Формирование промежуточной  $(2^{i+1})$ -ФБД-последовательности из точек предыдущей  $(2^{i-1+1})$ -ФБД-последовательности и  $2^i$  точек, полученных в серединах интервалов. Процесс получения новых точек схематично показан на рис. 4, где:

$$t_{\beta} = \frac{t_j + t_{j+1}}{2};$$

$$X(t_{\beta}) = \frac{X(t_j) + X(t_{j+1})}{2} + S_{\beta};$$

$$S_{\beta} = k_{\beta} \gamma_{\beta}; \quad k_i = (\sqrt{2})^{-\beta};$$

$$\sigma_n^2 = \left( \frac{1}{2^{n-1}} \right)^{2\alpha} (1 - 2^{2\alpha-2}) \cdot \sigma_1^2;$$

$$\gamma_{\beta} \in N(0, \sigma_n).$$

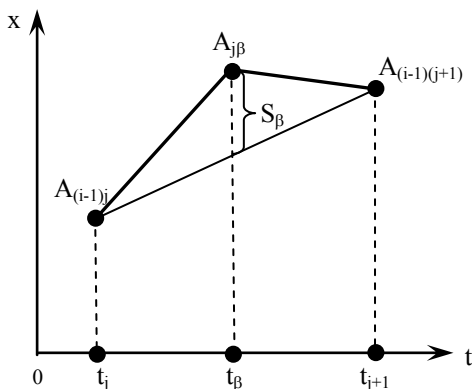


Рис. 4. Разбиение интервала

В результате выполнения данного алгоритма на  $k$ -м шаге получаем требуемую ФБД-последовательность, обладающую свойством самоподобия с определенной степенью точности, определяющими параметрами которой будут дисперсия  $\sigma_1^2$  и показатель Херста  $\alpha$ .

**3. Метод последовательного случайного сложения (ПСС-метод).** Данный метод использует идею SRA-алгоритма [9]. При его применении увеличивается устойчивость генерируемой последовательности за счет добавления перемещения соответствующей дисперсии ко всем точкам. Как и в ПСТ-методе, в ПСС-методе производится интерполяция средних точек с целью построения нормально распределенных приращений для случайной величины  $X$ , которые являются коррелированными. Результат выполнения первых шагов метода показан на рис. 5.

**4. Синтез ФГШ с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ-метод).** Данный метод позволяет генерировать самоподобные последовательности, используя математический аппарат быстрого

го преобразования Фурье (БПФ). При БПФ-методе вычисляется спектральная плотность мощности (спектр мощности на заданной частоте представляется независимыми экспоненциальными случайными переменными). Затем генерируется последовательность комплексных чисел, регулируемая нормальным распределением и выполняется обратное БПФ (рис. 6).

*Шаг 1.* Для формирования  $n$ -последовательности генерируется набор значений  $S_\ell = \hat{S}(\pi\ell/n, \alpha)$ , где  $\ell = \overline{1, n}$ ;  $\alpha \in (0, 5; 1)$ , а спектральная мощность определяется как

$$S(\omega, \alpha) = A(\omega, \alpha) \cdot \left( |\omega|^{-2\alpha-1} + B(\omega, \alpha) \right), \quad \alpha \in (0, 1); \quad \omega \in (-\pi, \pi),$$

где  $A(\omega, \alpha) = 2 \sin(\pi\alpha) \Gamma(2\alpha + 1) (1 - \cos \omega)$ ,  $\Gamma(\bullet)$  – гамма-функция;

$$B(\omega, \alpha) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left( (2\pi\alpha + \omega)^{-2\alpha-1} + (2\pi\alpha - \omega)^{-2\alpha-1} \right).$$

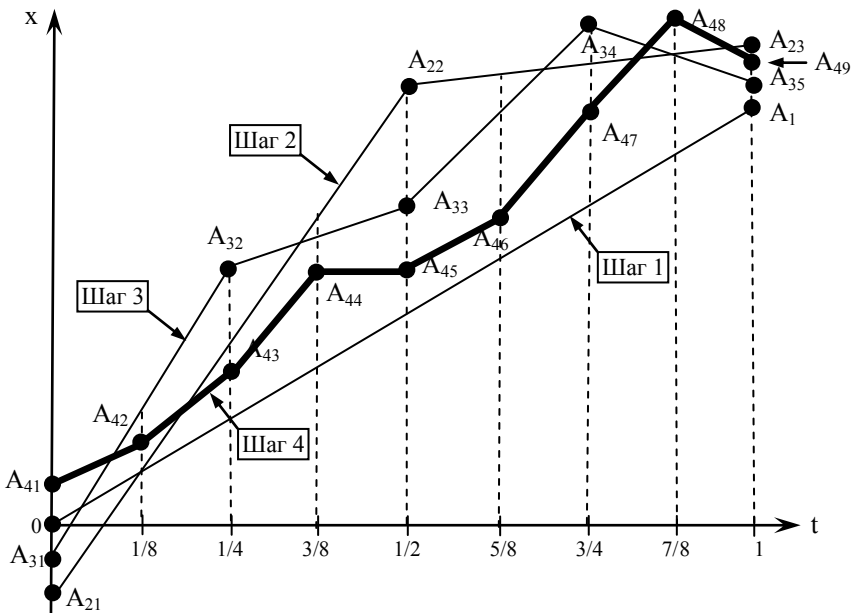


Рис. 5. Первые 4 шага ПСС-метода

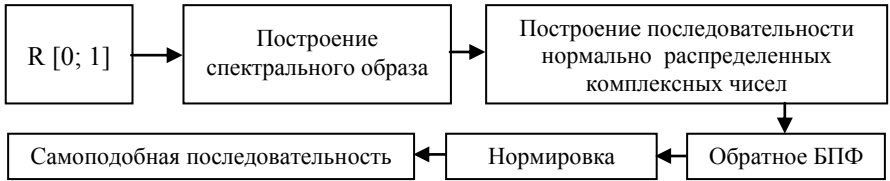


Рис. 6. Схема БПФ-метода

Для уменьшения вычислительной сложности расчета коэффициента  $B$  предлагается использовать предложенную в [10] аппроксимацию

$$B(\omega, \alpha) = \sum_{j=1}^3 \left( (2\pi j + \omega)^\beta + (2\pi j - \omega)^\beta \right) + \frac{1}{8\pi\alpha} \cdot \sum_{j=3}^4 \left( (2\pi j + \omega)^{\beta+1} + (2\pi j - \omega)^{\beta+1} \right) + o(\omega, \alpha),$$

где  $\beta = -2\alpha - 1$ .

Поведение кривых спектральной плотности для различных значений показателя Херста (от  $\frac{1}{2}$  до 1) на интересующем нас интервале значений  $\omega \in (0, \pi)$  показано на рис. 7.

*Шаг 2.* Из скорректированной при помощи периодограммы последовательности  $\{S_\ell\}$  генерируется комплексная последовательность  $\{Z_\ell\}$ , такая, что  $|Z_\ell| = \sqrt{S_\ell}$ , а фаза  $Z_\ell$  равномерно распределена на интервале  $(0, \pi)$ .

*Шаг 3.* На базе  $\{Z_\ell\}$  строится новая последовательность  $\{Y_\ell\}$ , имеющая ту же спектральную плотность мощности, но соответствующую вследствие симметрии БПФ вещественному сигналу:

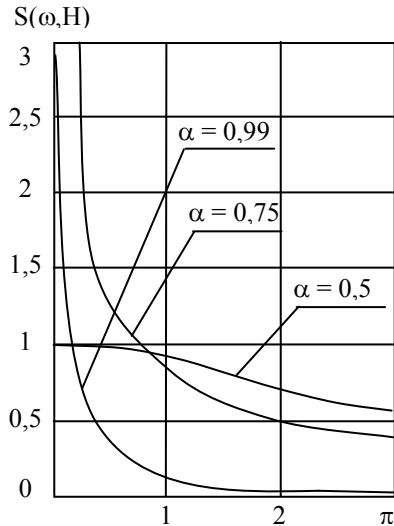


Рис. 7. Графики спектральной плотности для различных значений  $\alpha$

$$Y_0 = 0; \quad Y_{\ell-1} = \begin{cases} Z_{\ell}, & \text{при } \ell \in (0, n/2); \\ \bar{Z}_{\ell}, & \text{при } \ell \in (n/2, n), \end{cases}$$

где  $\bar{\cdot}$  – операция комплексного сопряжения.

*Шаг 4.* Для получения ФГШ-последовательности  $\{X_{\ell}\}$  для  $\{Y_{\ell}\}$  вычисляется обратное быстрое преобразование Фурье.

**5. Сравнительный анализ методов формирования ФГШ-последовательностей.**

Для проведения сравнительного анализа вышеописанных методов соответствующими алгоритмами были получены 50 выборочных последовательностей из  $2^{13} = 8192$  точек с различными случайными начальными числами. Для проверки самоподобности и маргинальности распределений был использован следующий математический аппарат:

- проверка критерия согласия моделируемой случайной последовательности с нормальным (гауссовским) процессом;
- визуальная проверка наличия долговременной зависимости «тяжелого хвоста» распределения по профилю выборки;
- анализ наличия свойств долговременной зависимости по графику периодограммы;
- оценка показателя Херста при помощи графиков R/S-статистики и изменения дисперсии;
- получение доверительных интервалов оценки показателя Херста методом Виттла.

В результате анализа установлено следующее.

1. БПФ-метод – самый медленный, что обусловлено его относительно большей вычислительной сложностью ( $O(n \log n)$ ) для генерации  $n$ -последовательности, в то время как в двух других методах порядок вычислительной сложности равен  $O(n)$ .

2. В большинстве случаев показатель Херста для БПФ-метода был ближе к требуемым значениям, чем в случае ПСТ- и ПСС-методов, при этом относительная неточность увеличивается с ростом  $\alpha$  и не превышает 5 – 6%. БПФ-метод всегда дает самоподобные последовательности с положительно смещенным  $\alpha$ , а ПСТ- и ПСС-методы – с отрицательным смещением. Для  $\alpha < 0,9$  разница между эмпирическим теоретическим отклонениями показателя Херста  $\alpha$  среди анализируемых методов не превысила 1%.

3. Относительная неточность при анализе на самоподобность практически для всех выборочных последовательностей не превысила 10% и была примерно одинаковой для всех трех методов.

**Выводы и направление дальнейших исследований.** 1. Для практического моделирования трафика телекоммуникационных сетей на не-



больших временных интервалах предпочтителен метод быстрого преобразования Фурье (БПФ-метод), на больших – ПСТ- или ПСС-методы, в зависимости от цели моделирования.

2. ФГШ-модели, построенные на основе предложенных методов, позволяют проводить аналитическое исследование характера построения очередей при сетевом проектировании.

3. При применении рассмотренных методов необходимо учитывать следующие жесткие ограничения на сетевой трафик:

– *строгая самоподобность* (реальный трафик в лучшем случае обладает асимптотически самоподобием, т.е. один параметр  $\alpha$  не в состоянии описать сложную корреляционную структуру моделируемых сетевых процессов);

– *гауссовость* (это может не соответствовать реальному процессу, например, в случае превышения среднеквадратического отклонения над средним значением).

Для более точного приближения моделей трафиковых трасс к реальным значениям трафика возможно применение регрессионных моделей, позволяющих улучшить подбор как кратковременной, так и долговременной корреляционной структуры, присутствующей в реальной трассе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Grunerifelder R., Cosrnas J., Manthorpe S., Odinma-Okafor A. Characterization of video codecs as autoregressive moving average processes and related queuing system performance // *IEEE Journal on Selected areas in Communications*. – 1991, April. – Vol. 9. – P. 284 – 293.
2. Willinger W., Taqqu M.S., Erramilli A. A Bibliographical Guide to Self-Similar Traffic and Performance for Modern High-Speed Networks // *Stochastic Networks: Theory and Applications*. – Oxford University Press. – 1996. – P. 282 – 296.
3. Beran J. Maximum likelihood estimation of the differencing parameter for invertible short- and long-memory ARIMA models // *Journal of the Royal Statistical Society*. – 1995. – Series B, 57. – P. 659. – 672.
4. Beran J. *Statistics for Long-Memory Processes*. – N.-Y. : Chapman & Hall, 1994. – 386 p.
5. Кучук Г.А. Моделирование обобщенного фрактального броуновского движения // *Зб. наук. праць ІПМЕ ім. Г.С. Пухова*. – К.: НАНУ, ІПМЕ. – 2003. – Вип. 22. – С. 79 – 82.
6. Королёв А.В., Кучук Г.А., Пашнев А.А. Адаптивная маршрутизация в корпоративных сетях. – X.: ХВУ, 2003. – 224 с.
7. Norros I. On the use of fractional Brownian motion in the theory of connectionless networks // *IEEE Journal of Selected Areas in Communications*. – 1995. – 13. – P. 953 – 962.

8. Jeong H., Nickle D., Pawlikowski K. *A Comparative Study of Generators of Synthetic Self-similar Teletraffic*. – Christchurch, New Zealand: University of Canterbury, 1988. – 144 p.
9. Кроновер Р.М. *Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории*. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.
10. Paxson V. *Fast Approximation on Self-similar Network Traffic*. Tech. Rep. LBL-36750. – Berkeley: University of California, 1995. – 67 p.

Поступила 27.01.2004

**КУЧУК Георгий Анатольевич**, канд. техн. наук, ст. научн. сотр., начальник НИО ИВЦ ХВУ. Окончил мехмат Московского государственного университета в 1977 году. Область научных интересов – обработка информации.

---