УДК 517.968

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПОНЕНТОВ ВЕКТОРА ПОДОБИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ КРИТЕРИАЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В.П. Марченко
(представил д.т.н., проф. А.В. Королёв)

Предложен подход к упрощению процесса поиска решения нелинейной задачи критериального программирования.

Введение. Особый интерес для анализа структур сложных организационных систем в условиях недостатка информации представляет использование критериального моделирования. Такие возможности объясняются тем, что последнее позволяет найти критерии подобия, связывающие одноименные параметры оптимальных вариантов [1]. На основе теории подобия можно построить критериальные модели, которые устанавливают аналитические связи между критериями оптимальности и оптимизирующими параметрами, а также между факторами, влияющими на их величину, что позволяет обосновать пути устранения неоптимальности. В [2] была рассмотрена возможность такого анализа целевой функции на уровне критериев подобия. Задача поиска минимума функции (критериальный вариант):

$$y=\sum_{i=1}^{m_1} a_i \cdot \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} \tag{1}$$

при условиях

$$g_к=\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} a_i \cdot \prod_{j=1}^{n} x_i^{\alpha_{ji}} \le G_k, \quad k=\overline{1,p}, \tag{2}$$

$$x_j>0, \quad j=\overline{1,n}$$

привела к системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_s}=\dfrac{1}{x_s}\cdot\left(\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_{si}a_i\prod_{j=1}^{n}x_j^{\alpha_{ji}}+\sum_{k=1}^{p}\mu_k\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}}\alpha_{si}a_i\prod_{j=1}^{n}x_j^{\alpha_{ji}}\right)=0, s=1\div n; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu_k}=\sum_{k=m_k+1}^{m_{k+1}}a_i\prod_{j=1}^{n}x_j^{\alpha_{ji}}-G_k=0, \qquad k=1\div p, \end{cases} \tag{3}$$

которая, в свою очередь, была заменена исследованием условий

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{si} \cdot \pi_{i0} = 0, \quad s = \overline{1, n}; \\ \sum_{i=1}^{m_1} \pi_{i0} = 1 \end{cases} \tag{4}$$

и решением системы уравнений

$$\alpha \cdot \vec{\pi} = b, \tag{5}$$

где

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \cdots & \alpha_{nm} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{\pi} = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \cdots \\ \pi_m \end{bmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Неоднородная система уравнений (5) имеет решение тогда, когда матрица α является квадратной и ее определитель отличен от нуля. В этом случае $\vec{\pi} = \alpha^{-1} \cdot \vec{b}$.

Матрица α квадратная только тогда, когда сумма членов целевой функции и ограничений на единицу больше числа переменных. Во всех остальных случаях система уравнений (5) имеет множество решений, среди которых находится и вектор Π_0, соответствующий решению задачи (1), (2).

Цель статьи. Предлагается способ определения компонентов вектора подобия Π_0.

Сформулируем поставленную задачу поиска π_0 как двойственную по отношению к (1), которую будем называть прямой. Решения прямой и двойственной задачи находятся в определенном соотношении и, при некоторых условиях, удается заменить решение одной задачи решением другой.

Согласно теореме двойственности [3], если x_0 и π_0 – оптимальное решение рассматриваемой задачи оптимизации, то

$$y(x_0) = \alpha(\pi_0), \tag{6}$$

где $\alpha(\pi_0)$ – максимальное значение двойственной функции $\alpha(\pi)$. Функции $y(x)$ и $\alpha(\pi)$ находятся в следующем соотношении [3]:

$$y(x) \geq \alpha(\pi).$$

Это значит, что если переменным x и π придать любые значения, то получим такие y(x) и $\alpha(\pi)$, что оптимальное значение будет лежать между ними. Если функция y(x) вогнутая, а $\alpha(\pi)$ – выпуклая, то совпадение их значений возможно только в одной точке (рис. 1).

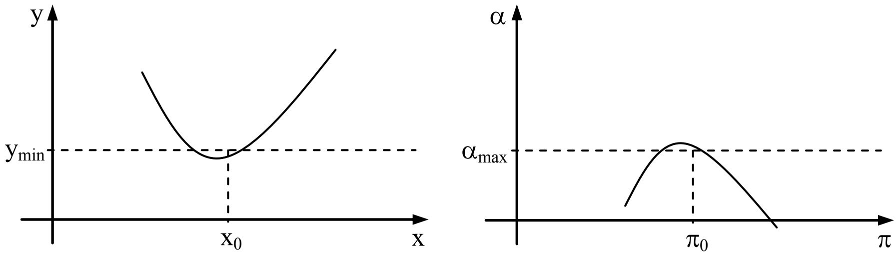

Рис. 1. Графическое представление двойственной задачи

Следовательно, для того, чтобы допустимые решения x и π прямой и двойственной задач были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы значения прямой y(x) и двойственной $\alpha(\pi)$ функций в этой точке совпали. В дальнейшем используем свойство двойственных задач для построения итерационного процесса определения оптимального решения.

Построим двойственную функцию α(π). Исходя из условий минимизации функции y(x), которое привело к решению ортонормированной системы $\alpha \cdot \pi = b$, и учитывая, что $\alpha(\pi_0) = y(x_0)$, с учетом (4) запишем

$$\alpha(\pi_0) = y(x_0)^{\sum\limits_{i=1}^{m_1} \pi_{i0}} \cdot \left(\prod_{j=1}^{n} x_{j0}^{\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{ji} \cdot \pi_{i0}} \right)^{-1}. \tag{7}$$

При отсутствии ограничений в исходной задаче, т.е. при $m = m_1$, с учетом того, что критерии подобия в данном случае имеют вид:

$$\pi_{1\delta} = \frac{a_1 \cdot \prod\limits_{j=1}^{n} x_{j\delta}^{\alpha_{j1}}}{y_\delta}; \ \pi_{2\delta} = \frac{a_2 \cdot \prod\limits_{j=1}^{n} x_{j\delta}^{\alpha_{j2}}}{y_\delta}; \ \ldots \ \pi_{m\delta} = \frac{a_m \cdot \prod\limits_{j=1}^{n} x_{j\delta}^{\alpha_{jm}}}{y_\delta}$$

получим
$$\alpha(\pi_0) = \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{a_i}{\pi_{i0}} \right)^{\pi_{i0}}.$$

При наличии одного активного ограничения $g_1(x) = G_1$ в исходной задаче равенство (7) после преобразований примет вид

$$\alpha(\pi_0) = \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{a_i}{\pi_{i0}} \right)^{\pi_{i0}} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{G_1} \right)^{\lambda_1},$$

где $\lambda_1 = \sum_{i=m_1+1}^{m} \pi_{i0}$ – нормированный множитель Лагранжа.

Для случая с k ограничениями, находим

$$\alpha(\pi_0) = \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{a_i}{\pi_{i0}} \right) \cdot \prod_{k=1}^{p} \left(\frac{\lambda_k}{G_k} \right)^{\lambda_k},$$

где $\lambda_k = \sum_{k=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_{i0}, \qquad k = \overline{1,p}.$

Таким образом, двойственная задача, соответствующая исходной прямой, может быть окончательно сформулирована следующим образом: максимизировать

$$\alpha(\pi) = \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{a_i}{\pi_i} \right)^{\pi_i} \cdot \prod_{k=1}^{p} \left(\frac{\lambda_k}{G_k} \right)^{\lambda_k} \qquad (8)$$

при условиях ортогональности и нормирования

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{si} \cdot \pi_i = 0, \quad s = \overline{1,n}\,; \\ \sum_{i=1}^{m_1} \pi_i = 1\,. \end{cases} \qquad (9)$$

Выводы. Сформулированная двойственная задача имеет качественные отличия от прямой. Исходная задача решается при нелинейной целевой функции и нелинейных ограничениях, двойственная задача имеет нелинейную целевую функцию, но ограничения у нее линейные, что существенно упрощает определение интересующего нас вектора подобия. Таким образом, представляется целесообразным для решения нелинейных задач критериального программирования использовать двойственные задач, позволяющие оперировать линейными зависимостями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мазур И.И., Шапиро В.Д., Ольдерогге Н.Г. Управление проектами. – М.: Экономика, 2001. – 574 с.*
2. *Марченко В.П. Поиск экстремума целевой функции задач управления. // Сборник научных трудов ИПМЭ. – К.: НАНУ, ИПМЭ. – 2003. – Вып. 22. – С. 112 – 116.*
3. *Кузнецов Ю.Н. и др. Математическое программирование. – М.: Высш. шк., 1976. – 352 с.*

Поступила 18.02.2004

МАРЧЕНКО Василий Петрович*, начальник НИЛ ИВЦ ХВУ. В 1987 году окончил ХВВКИУ РВ. Область научных интересов – системный анализ.*