УДК 681.324

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ РАЦИОНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ОБРАБОТКОЙ ЗАДАЧ В ИНФОРМАЦИОННО-ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ

к.т.н. А.А. Пашнев, к.т.н. Л.А. Клименко
(представил д.т.н., проф. А.В. Королёв)

Предлагается математическая модель, позволяющая описать задачу поиска рационального разбиения множества задач, обрабатываемых в информационно-телекоммуникационной сети (ИТС) на подмножества и их распределения по узлам ИТС, минимизирующего среднюю задержку пакета данных в сети. В качестве метода решения указанной задачи предлагается метод потенциалов.

Постановка проблемы. В процессе решения задач на узлах информационно-телекоммуникационной сети (ИТС) зачастую возникает необходимость в их распределенной обработке. Эффективность обработки задач в информационно-телекоммуникационной сети определяется средним временем реакции ИТС на запросы абонентов к решаемым задачам [1]. Поскольку основной составляющей, влияющей на время реакции ИТС на запрос абонента к решаемой задаче, является задержка входного и выходного сообщений по запросу абонента к задаче, зависящая от средней задержки пакета данных в сети [1 – 3], задача рационального управления распределенной обработкой задач в информационно-телекоммуникационной сети может быть сформулирована следующим образом. Необходимо найти такое разбиение множества задач, решаемых в информационно-телекоммуникационной сети, на подмножества и их распределение по узлам ИТС, чтобы средняя задержка пакета данных в сети принимала минимальное значение.

Анализ литературы, посвященной вопросу эффективного управления распределенной обработкой задач в ИТС, показал, что для нахождения рационального разбиения множества задач на подмножества и их распределения по узлам ИТС, как правило, используется метод ветвей и границ [4], обеспечивающий полный перебор различных вариантов разбиения, недостатком которого является сложность реализации при сравнительно невысокой эффективности (решение на современных ПЭВМ возможно для $h_z + h_y \leq 80$), где h_y – число узлов ИТС; h_z – число обрабатываемых в ИТС задач. Поскольку в реальных ИТС значение $h_z + h_y > 200$, для решения данной задачи целесообразно использовать эвристические алгоритмы оптимизации. Известные эвристические алгоритмы оптимизации можно отнести либо к алгоритмам последовательного заполнения узлов ИТС, либо к итерационным алгоритмам последовательного улучшения приближений с помощью парных перераспределений задач между узлами сети. Данные алгоритмы позволяют найти решения, отличающиеся от оптимальных на 5 – 10%, и применимы к задачам с $h_z + h_y \leq 1000$. В [5] предлагался алгоритм быстрого поиска рационального распределения задач по узлам ИТС, минимизирующий среднюю задержку пакета данных в ней, обеспечивающий учет требования надежности обработки задач в сети и их приоритетности и позволяющий достичь высокой вычислительной эффективности. Однако данный алгоритм не предполагает возможность распределенной обработки задач в ИТС, что существенно сужает область его применения. В связи с этим возникает необходимость в разработке математической модели, позволяющей описать задачу поиска рационального разбиения множества задач, обрабатываемых в ИТС, на подмножества и их распределения по узлам сети, с целью минимизации средней задержки пакета данных в сети, и найти метод ее решения.

Целью статьи является разработка математической модели, позволяющей описать задачу поиска рационального разбиения множества задач, обрабатываемых в информационно-телекоммуникационной сети на подмножества и их распределения по узлам ИТС, минимизирующего среднюю задержку пакета данных в сети и нахождение метода ее решения.

Пусть ИТС характеризуется множеством узлов Y, свободные вычислительные ресурсы которых распределяются между множеством задач Z, обрабатываемых в сети. При этом число узлов ИТС $h_y = |Y|$, число обрабатываемых в ИТС задач $h_z = |Z|$.

Каждый узел $y_i \in Y$ характеризуется доступным вычислительным ресурсом (производительностью его ПЭВМ) φ_{y_i}. В соответствии с множеством Y имеем вектор $\varphi_y = \left(\varphi_{y_1}, \ldots, \varphi_{y_{h_y}}\right)$ доступных вычислительных ресурсов узлов ИТС. Каждая задача $z_b \in Z$, $1 \leq b \leq h_z$, характеризуется требуемым вычислительным ресурсом φ_{z_b} для ее решения (возможно неоднократного). По всем задачам множества Z имеем вектор $\varphi_z = \left(\varphi_{z_1}, \ldots, \varphi_{z_{h_z}}\right)$ требуемых вычислительных ресурсов.

По каждой задаче z_b даны два вектора $\boldsymbol{u}_{z_b}$ и $\boldsymbol{u}'_{z_b}$, где вектор $\boldsymbol{u}_{z_b} = \left(\boldsymbol{u}_{z_{b_1}}, \ldots, \boldsymbol{u}_{z_{b_{h_y}}}\right)$ определяет интенсивность обмена задачи z_b с каждым узлом множества Y, вектор $\boldsymbol{u}'_{z_b} = \left(\boldsymbol{u}'_{z_{b_1}}, \ldots, \boldsymbol{u}'_{z_{b_{h_z}}}\right)$ определяет интенсивность обмена задачи z_b с другими задачами множества Z. Здесь $\boldsymbol{u}'_{z_{b_b}} = 0$. По всей совокупности задач, обрабатываемых в сети, имеем прямоугольную матрицу U_z размера $h_z \times h_y$ и квадратную матрицу U'_z размера $h_z \times h_z$, составленные из векторов $\boldsymbol{u}_{z_b}$ и $\boldsymbol{u}'_{z_b}$, $1 \le b \le h_z$, соответственно.

Множества Y и Z представим соответственно кортежами $\langle Y, \varphi_y, H_w \rangle$ и $\langle Z, \varphi_z, U_z, U'_z \rangle$, где $H_w = \left\| h_{w_{a,i}} \right\|$ – матрица длин кратчайших маршрутов между каждой парой узлов ИТС y_a и y_i, $1 \le a \le h_y$, $1 \le i \le h_y$. При этом длина маршрута $h_{w_{a,i}}$ между узлами y_a и y_i определяется числом каналов передачи данных, входящих в этот маршрут.

На основе выражения, приведенного в [1, 5], определяющего целевую функцию распределения γ множества задач Z по множеству узлов Y, минимизирующего среднюю задержку пакета данных в информационно-телекоммуникационной сети, представляющую собой суммарное произведение интенсивностей обмена задач, обрабатываемых в сети с их абонентами и длин кратчайших маршрутов между каждой парой узлов ИТС, с учетом интенсивностей обмена задач множества Z друг с другом, получим целевую функцию, определяемую выражением

$$F^{(\gamma)} = \left(\sum_{a=1}^{h_y} \sum_{i=1}^{h_y} u_{r_{a,i}} \cdot h_{w_{a,i}} \right) \Bigg/ \left(\sum_{a=1}^{h_y} \sum_{i=1}^{h_y} u_{r_{a,i}} \right), \qquad (1)$$

где
$$u_{r_{a,i}} = \begin{cases} \sum_{b=1}^{h_z} k_{b,a} \cdot u_{z_{b,i}} + \sum_{b=1}^{h_z} \sum_{j=1}^{h_z} k_{b,a} \cdot k_{j,i} \cdot u'_{z_{b,j}}, & \text{если } a \ne i; \\ 0, & \text{если } a = i; \end{cases}$$

$$k_{b,a} = \begin{cases} 1, & \text{если } z_b^{(\gamma)} \to y_a; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Сформулируем задачу поиска рационального разбиения множества задач Z, обрабатываемых в ИТС, на подмножества и их распределения по узлам $y_a \in Y$. Необходимо найти такое распределение $\gamma: Z \to Y$, чтобы выражение (1) принимало минимальное значение при выполнении условия $\forall y_a \in Y \ \sum_{b=1}^{h_z} k_{b,a} \cdot \varphi_{z_b} \le \varphi_{y_a}$. Распределение γ задач $z_b \in Z$ по узлам $y_a \in Y$ можно представить характеристической матрицей $K^{(\gamma)} = \| k_{b,a} \|$,

$1 \le b \le h_z$, $1 \le a \le h_y$. Двоичный h_z-мерный вектор-столбец $\boldsymbol{k}_a$ характеристической матрицы $K^{(\gamma)}$, соответствующий узлу y_a, содержит единицу в местах с номерами обрабатываемых им задач.

Произведение вектор-столбца $\boldsymbol{k}_a$ и матрицы U'_z представляет собой вектор-столбец $\boldsymbol{u}'_{r_a} = \left(\boldsymbol{u}'_{r_{a_i}}\right)$, $i = \overline{1, h_z}$, j-й компонент которого равен суммарной интенсивности обмена задачи z_j, $1 \le j \le h_z$, с задачами, распределенными на узел y_a. Значения общих суммарных интенсивностей обмена задач множества Z с узлом $y_a \in Y$ с учетом значений суммарных интенсивностей обмена этих задач с задачами, распределенными на узел y_a, определяются с помощью выражения $\boldsymbol{u}''_{r_a} = \boldsymbol{u}'_{r_a} + \boldsymbol{u}_{z_a}$, где $\boldsymbol{u}_{z_a}$ – вектор-столбец матрицы U_z.

Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{u}''_{r_a}$ и $\boldsymbol{k}_i$, $1 \le a \le h_y$, $1 \le i \le h_y$, $\boldsymbol{u}''_{r_a} \cdot \boldsymbol{k}_i = \sum_{b=1}^{h_z} \boldsymbol{u}''_{r_{a_b}} \cdot \boldsymbol{k}_{i_b} = u_{r_{a,i}}$, где $a \ne i$, равно суммарной интенсивности обмена узлов y_a и y_i. Совокупность значений $u_{r_{a,i}}$ составляет квадратную матрицу U_r размера $h_y \times h_y$, у которой $u_{r_{a,i}} = 0$, при $a = i$.

Суммарная интенсивность обмена между узлами ИТС при распределении γ задач $z_b \in Z$ по узлам $y_a \in Y$ определяется выражением

$$c_u^{(\gamma)} = \sum_{a=1}^{h_y} \sum_{i=1}^{h_y} u_{r_{a,i}} = \sum_{a=1}^{h_y} \sum_{i=1}^{h_y} \boldsymbol{u}''_{r_a} \cdot \boldsymbol{k}_i. \qquad (2)$$

Используя выражение (2), выражение (1) примет вид:

$$F^{(\gamma)} = \left(\sum_{a=1}^{h_y} \boldsymbol{u}_{r_a} \cdot \boldsymbol{h}_{w_a} \right) \Bigg/ \left(\sum_{a=1}^{h_y} \sum_{i=1}^{h_y} \boldsymbol{u}''_{r_a} \cdot \boldsymbol{k}_i \right) = \left(\sum_{a=1}^{h_y} \boldsymbol{u}_{r_a} \cdot \boldsymbol{h}_{w_a} \right) \Bigg/ c_u^{(\gamma)}, \qquad (3)$$

где $\boldsymbol{u}_{r_a} \cdot \boldsymbol{h}_{w_a}$ – скалярное произведение вектор-строк матриц U_r и H_w.

Таким образом, задача поиска рационального разбиения множества задач Z, обрабатываемых в ИТС, на подмножества и их распределения по узлам $y_a \in Y$, сведена к минимизации билинейной целевой функции $F^{(\gamma)}$, определяемой выражением (3) на целочисленных векторах при линейных ограничениях $\varphi_z \cdot \boldsymbol{k}_a \le \varphi_{y_a}$ для $1 \le a \le h_y$.

На практике часто имеют место ситуации, когда каждая задача $z_b \in Z$ представлена набором подзадач, которые могут выполняться на различных узлах множества Y и подзадачи задачи z_b, не обмениваются информацией ни между собой, ни с подзадачами других задач множества Z. В этом случае приведенная задача упрощается и может быть сведена к следующему виду.

Пусть заданы множества Y и Z, имеющие ранее указанный смысл. Множество узлов Y представляется кортежем $\langle Y, \varphi_y, H_w \rangle$. Множество Z составлено из h_z задач $\{z_1, \ldots, z_{h_z}\}$. Каждая задача $z_b \in Z$, $1 \le b \le h_z$, представлена набором подзадач и характеризуется требуемым вычислительным ресурсом φ_{z_b} для их выполнения. По всем задачам множества Z имеем вектор требуемых вычислительных ресурсов $\varphi_z = \left(\varphi_{z_1}, \ldots, \varphi_{z_{h_z}}\right)$. Требуемый вычислительный ресурс φ_{z_b} задачи z_b может быть удовлетворен одним или несколькими узлами множества Y при любом разбиении задачи z_b между ними.

По каждой задаче $z_b \in Z$ дан вектор $\boldsymbol{u}_{z_b} = \left(\boldsymbol{u}_{z_{b_1}}, \ldots, \boldsymbol{u}_{z_{b_{h_y}}}\right)$, определяющий интенсивность обмена подзадач задачи $z_b \in Z$ с узлами множества Y. Предполагается, что все подзадачи задачи $z_b \in Z$ обладают одинаковой удельной, относительно единицы требуемого вычислительного ресурса, интенсивностью $u''_{z_{b,i}}$ обмена с узлом $y_i \in Y$, т.е. $\forall z_b \in Z, y_i \in Y \,\middle|\, u''_{z_{b,i}} = \boldsymbol{u}_{z_{b_i}} / \varphi_{z_b}$.

Итак, в качестве исходной информации имеем множества Y и Z, представленные соответственно кортежами $\langle Y, \varphi_y, H_w \rangle$ и $\langle Z, \varphi_z, U_z \rangle$, где U_z – матрица интенсивностей обмена подзадач задач множества Z с узлами множества Y. Требуется найти рациональное распределение подзадач задач множества Z по узлам множества Y. В результате распределения подзадач задач множества Z формируется матрица M_z, в которой каждой задаче $z_b \in Z$ должна быть сопоставлена вектор-строка $\boldsymbol{m}_{z_b} = \left(\boldsymbol{m}_{z_{b_1}}, \ldots, \boldsymbol{m}_{z_{b_{h_y}}}\right)$, представляющая собой распределение подзадач задачи z_b по узлам множества Y, т.е. компонент $\boldsymbol{m}_{z_{b_i}}$ вектора $\boldsymbol{m}_{z_b}$ представляет собой требуемый вычислительный ресурс узла y_i, необходимый для выполнения подзадачи задачи z_b. Качество распределения γ подзадач задач $z_b \in Z$ по узлам $y_i \in Y$ будем оценивать значением целевой функции $F^{(\gamma)}$.

Основой определения $F^{(\gamma)}$ служит штраф для подзадачи задачи $z_b \in Z$, распределенной на узел $y_a \in Y$. Если подзадача задачи $z_b \in Z$ распределена на узел $y_a \in Y$, то ей соответствует штраф

$$s_{z_{b,a}} = \sum_{i=1}^{h_y} u''_{z_{b,i}} \cdot h_{w_{a,i}} = \sum_{i=1}^{h_y} \left(u_{z_{b,i}} \cdot h_{w_{a,i}}\right) / \varphi_{z_b}.$$

Таким образом, для каждой задачи $z_b \in Z$ имеем вектор $\boldsymbol{s}_{z_b} = \left(\boldsymbol{s}_{z_{b_1}}, \ldots, \boldsymbol{s}_{z_{b_{h_y}}}\right)$, компонент $\boldsymbol{s}_{z_{b_a}}$ которого определяет штраф при распределении на узел $y_a \in Y$ подзадачи задачи z_b.

Целевая функция, характеризующая полученное распределение γ задач $z_b \in Z$ по узлам $y_a \in Y$, имеет вид:

$$F^{(\gamma)} = \frac{1}{u_{z_{max}}} \cdot \sum_{b=1}^{h_z} \sum_{a=1}^{h_y} m_{z_{b,a}} \cdot s_{z_{b,a}}, \tag{4}$$

где $u_{z_{max}}$ – независимая от распределения γ величина, определяющая максимальную суммарную интенсивность обмена задач с узлами сети в соответствии с выражением $u_{z_{max}} = \sum_{b=1}^{h_z} \sum_{i=1}^{h_y} u_{z_{b,i}}$.

Полученное распределение γ должно удовлетворять условиям:

1) $\forall y_a \in Y \left| \sum_{b=1}^{h_z} m_{z_{b,a}} \le \varphi_{y_a} \right.$; 2) $\forall z_b \in Z \left| \sum_{a=1}^{h_y} m_{z_{b,a}} \le \varphi_{z_b} \right.$;

3) $\sum_{a=1}^{h_y} \varphi_{y_a} \ge \sum_{b=1}^{h_z} \varphi_{z_b}$; 4) $s_{z_{b,a}} \ge 0, m_{z_{b,a}} \ge 0$ для $1 \le a \le h_y$, $1 \le b \le h_z$.

С учетом приведенных условий, задача поиска рационального разбиения множества задач Z, обрабатываемых в ИТС, на подмножества и их распределения по узлам $y_a \in Y$ может быть сформулирована следующим образом. Пусть заданы множества задач Z и узлов Y, определяемые кортежами $\langle Z, \varphi_Z, U_Z \rangle$ и $\langle Y, \varphi_Y, H_W \rangle$. Требуется найти распределение γ, удовлетворяющее условиям 1 – 4, чтобы выражение (4) принимало минимальное значение.

При построении алгоритма решения сформулированной задачи удобно принять, что общий суммарный доступный вычислительный ресурс узлов множества Y равен общему суммарному требуемому вычислительному ресурсу задач множества Z, т.е. $\sum_{a=1}^{h_y} \varphi_{y_a} = \sum_{b=1}^{h_z} \varphi_{z_b}$. С этой целью необходимо ввести фиктивный ($h_y + 1$)-й узел с доступным вычислительным ресурсом $\varphi_{y_{h_y+1}}$ и фиктивную ($h_z + 1$)-ю задачу с требуемым вычислительным ресурсом $\varphi_{z_{h_z+1}}$ при которых $\sum_{a=1}^{h_y+1} \varphi_{y_a} = \sum_{b=1}^{h_z+1} \varphi_{z_b}$, и принять штраф $s_{z_{h_z+1,a}} = 0$, $1 \le a \le h_y$, и $s_{z_{b,h_z+1}} = \max_{\substack{1 \le b \le h_z \\ 1 \le a \le h_y}} s_{z_{b,a}}$, $1 \le b \le h_z$. Отсюда математическая модель задачи поиска рационального разбиения множества задач Z, обрабатываемых в ИТС, на подмножества и их распределения по узлам $y_a \in Y$ примет вид:

$$F^{(\gamma)} = \frac{1}{u_{z_{max}}} \cdot \sum_{b=1}^{h_z+1} \sum_{a=1}^{h_y+1} m_{z_{b,a}} \cdot s_{z_{b,a}} \to \min, \text{если}$$

1) $\sum_{b=1}^{h_z+1} m_{z_{b,a}} = \varphi_{y_a}$, $1 \le a \le h_y + 1$; **2)** $\sum_{a=1}^{h_y+1} m_{z_{b,a}} = \varphi_{z_b}$, $1 \le b \le h_z + 1$;

3) $\sum_{a=1}^{h_y+1} \varphi_{y_a} = \sum_{b=1}^{h_z+1} \varphi_{z_b}$; **4)** $s_{z_{b,a}} \ge 0, m_{z_{b,a}} \ge 0$ для $1 \le a \le h_y$, $1 \le b \le h_z$;

5) $s_{z_{h_z+1,a}} = 0$ для $1 \le a \le h_y$; **6)** $s_{z_{b,h_z+1}} = \max\limits_{\substack{1 \le b \le h_z \\ 1 \le a \le h_y}} s_{z_{b,a}}$ для $1 \le b \le h_z$.

Данная математическая модель имеет $h_z + h_y + 1$ переменных. Для ее решения может быть использован один из модифицированных симплекс-методов – метод потенциалов.

Выводы. Таким образом, основным, полученным научным и практическим результатом данного исследования является разработанная математическая модель, позволяющая описать задачу поиска рационального разбиения множества задач, обрабатываемых в информационно-телекоммуникационной сети, на подмножества и их распределения по узлам ИТС, минимизирующего среднюю задержку пакета данных в сети.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пашнев А.А. Управление обработкой задач в распределенной вычислительной сети // Збірник наукових праць. – К.: ІПМЕ. – 2003. – Вип. 22. – С. 136 – 141.*
2. *Кучук Г.А., Пашнев А.А., Калашник Д.Н. Аналитическая оценка средней задержки информационного пакета // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ. – 2003. – Вип. 2. – С.104 – 108.*
3. *Гиневский М.И., Кучук Г.А., Пашнев А.А. Оценка параметров, влияющих на изменение величины средней задержки пакета данных в ИТС // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ. – 2003. – Вип. 5. – С. 71 – 79.*
4. *Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – К.: Наук. думка, 1985. – 520 с.*
5. *Явтушенко А.Н., Кучук Г.А., Пашнев А.А. Алгоритм быстрого поиска рационального распределения задач по узлам ИТС // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ. – 2004. – Вип. 2. – С. 8 – 19.*

Поступила 14.01.2004

***ПАШНЕВ Андрей Анатольевич**, канд. техн. наук, научн. сотр. ИВЦ ХВУ. В 1993 году окончил ХВВАУРЭ. Область научных интересов – системы обработки и передачи данных.*

***КЛИМЕНКО Любовь Анатольевна**, канд. техн. наук, преподаватель УкрГАЖТ. Окончила ХИИТ в 1995 году. Область научных интересов – обработка и передача информации.*