УДК 519.854.2

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЕНГЕРСКОГО АЛГОРИТМА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ НАЗНАЧЕНИЙ НА НЕПОЛНЫХ ГРАФАХ

к.т.н. В.В. Бабенко
(представил д.в.н., проф. И.О. Кириченко)

Представлены результаты исследования применимости венгерского алгоритма для решения задачи назначений на неполных графах. Предложен вариант модифицированного алгоритма, основанного на формировании множества независимых нулей путем целенаправленного поиска по глубине.

Постановка проблемы. Бурное развитие логистики, начавшееся в период второй мировой войны, когда она была применена для решения стратегических задач и четкого взаимодействия оборонной промышленности, тыловых баз и транспорта с целью своевременного обеспечения армии вооружением, ГСМ и продовольствием, в настоящее время продолжается не только в военной сфере [1]. Подразделения логистики созданы как в аппарате НАТО, так и на предприятиях промышленности, аграрно-промышленного комплекса, транспорта и т.д. Объективно этот процесс обусловлен способностью логистических систем к адаптации в условиях неопределенности окружающей среды. Неопределенность спроса на ресурсы, характерная и для вооруженной борьбы, и для конкурентной борьбы в экономике, предопределяет резкие колебания качественных и количественных характеристик материальных потоков, проходящих через логистические системы. В этих условиях способность логистических систем к адаптации к изменениям внешней среды является существенным фактором их устойчивого положения.

Анализ литературы. Решения большого числа практических задач транспортной логистики [2] могут быть найдены путем использования теории графов. В рамках данной теории разработаны методы решения задачи о развозке (о доставке) [3, 4], одной из такого рода задач. Задача о развозке может быть сведена к задаче назначений. Однако в случаях неполных графов указанные методы не всегда дают решение.

Цель статьи. Целью настоящей статьи является представление результатов исследования причин неудовлетворительного решения задачи о развозке (о доставке), сведенной к задаче назначений. Предложен модифицированный венгерский алгоритм решения задачи назначений, дающий результат на неполных графах.

Анализ причин неудовлетворительного решения задачи назначений. В задаче о развозке (о доставке) граф представляет сеть дорог, одна его вершина представляет склад (базу хранения), а все остальные вершины – потребителей. Транспорт со склада доставляет материалы некоторых потребителей, после чего возвращается на склад. Каждый j-й маршрут движения транспортной единицы имеет свой вес (расход некоторого ресурса транспортной единицы при движении по данному маршруту) c_j. Необходимо определить количество транспортных единиц и маршруты их движения, чтобы одновременно доставить материалы со склада (базы хранения) всем потребителям.

В рамках теории графов данная задача имеет следующую постановку [1]. Даны множество потребителей $R = \{r_1, \ldots, r_M\}$ и семейство $\Psi = \{S_1, \ldots, S_N\}$ множеств маршрутов $S_j \subset R$. Каждому маршруту $S_j \subset \Psi$ поставлен в соответствие положительный вес c_j. Любое подмножество $\Psi' = \{S_{j_1}, S_{j_2}, \ldots, S_{j_k}\}$ семейства Ψ, такое, что:

$$\bigcup_{i=1}^{k} S_{j_i} = R; \tag{1}$$

$$S_{j_h} \cap S_{j_l} = \varnothing, \quad \forall h, l \notin \{1, \ldots, k\}, \quad h \neq l, \tag{2}$$

называется разбиением множества R.

В матричной форме, когда строки матрицы $[t_{ij}]$ размерности $M \times N$ (в общем случае $M \neq N$), состоящей из 0 и 1, разбиваются столбцами, оптимизация состоит в минимизации целевой функции вида

$$z = \sum_{j=1}^{N} c_j \xi_j \tag{3}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{N} t_{ij} \xi_j = 1, \quad i = 1, \ldots, M, \tag{4}$$

где $c_j \geq 0$;

$$\xi_j = \begin{cases} 1, & \text{если } S_j \in \Psi'; \\ 0, & \text{если } S_j \notin \Psi' \end{cases}$$

и

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } r_i \in S_j; \\ 0, & \text{если } r_i \notin S_j. \end{cases}$$

При решении практических задач логистики часто необходимо, чтобы множества семейства $\Psi = \{S_1, \ldots, S_N\}$ представляли собой гамильтоновы циклы с наименьшим весом.

Это дополнительное условие приводит к необходимости поиска решения минимизационной задачи назначений (ЗН), представляющего собой единственный минимальный гамильтонов цикл. В [3] предложен эффективный алгоритм поиска, использующий дерево решений. Этот алгоритм предполагает неизвестное заранее количество повторений процедуры решения собственно ЗН для графа с матрицей весов $C = [c_{ij}]$ в следующей постановке.

Пусть $[\xi_{ij}]$ – $(N \times N)$-матрица, в которой $\xi_{ij} = 1$, если вершина x_i «назначена» к вершине x_j, и, если вершина x_i не назначена к вершине x_j. Для исключения бессмысленных решений с $\xi_{ij} = 1$ можно положить $c_{ij} = \infty$ $(i = 1, \ldots, N)$.

Найти величины ξ_{ij}, минимизирующие

$$z = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{R} c_{ij}\xi_{ij}, \tag{5}$$

при условии, что

$$\sum_{j=1}^{N} \xi_{ij} = \sum_{i=1}^{R} \xi_{ij} = 1, \quad \forall i, j = 1, 2, \ldots, N.$$

Для решения ЗН в данной постановке используется известный [3] венгерский алгоритм, эффективный в случаях полных графов.

Как установлено в результате выполненного исследования, использование венгерского алгоритма при поиске решения минимизационной ЗН, представляющего собой единственный минимальный гамильтонов цикл, не гарантирует получение искомого результата. Причина обнаруженного явления состоит в произвольном выборе корня альтернирующего дерева из множества возможных. В общем случае при однократном выполнении венгерского алгоритма на полном графе это позволяет сформировать множество независимых нулей размерности N. Однако после каждого ветвления дерева поиска венгерский алгоритм применяется к графу, в котором по правилу ветвления исключен цикл. В результате количество нулей в матрице весов $C = [c_{ij}]$ становится больше N.

Модифицированный венгерский алгоритм. Возникает задача выбора нулей, которые могут составить множество независимых нулей. Для решения данной задачи выбора предложено формировать множество независимых нулей путем целенаправленного поиска по глубине. Изменению подлежит шаг венгерского алгоритма, состоящий в построении альтернирующего дерева. Так же, как и в известном алгоритме, корень альтернирующего дерева выбирается совершенно произвольно из множества возможных. Далее необходимо вести поиск по глубине так, чтобы никакие два отмеченных нуля не находились в одном и том же столбце или строке матрицы весов $C = [c_{ij}]$. Поиск ведется, пока число отмеченных нулей не станет равно N.

Проверка работоспособности предложенного варианта модифицированного алгоритма проводилась путем решения ЗН на матрицах весов $C = [c_{ij}]$, в которых веса c_j выбирались с помощью датчика случайных чисел, распределенных по равномерному закону. Размерность матрицы весов варьировалась в пределах $N = 6, \ldots, 13$. В общей сложности алгоритм был применен к 8000 различных вариаций матрицы весов. Решения ЗН были получены во всех случаях.

Выводы. Причиной неудовлетворительного решения минимизационной ЗН, представляющего собой единственный минимальный гамильтонов цикл с использованием венгерского алгоритма, состоит в произвольном выборе корня альтернирующего дерева из множества возможных. Введение поиска по глубине на шаге построения множества независимых нулей позволило преодолеть существовавший недостаток венгерского алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Семененко А.И. Предпринимательская логистика. – СПб.: Политехника, 1997. – 160 с.*
2. *Смехов А.А. Введение в логистику. – М.: Транспорт, 1993. – 112 с.*
3. *Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 432 с.*
4. *Garfinkel R.S., Nemhauser G.L. The set partition problem: Set covering with equality constrains//Ops. Res. – 1969. – V.17. – P. 848 – 855.*

Поступила 16.02.2004

***БАБЕНКО Владимир Владимирович**, канд. техн. наук, доцент кафедры ХВУ. В 1994 году*

окончил ХВУ (по программе ВИРТА ПВО). Область научных интересов – прогнозирование состояний хаотических динамических систем, применение методов теории графов для решения практических задач логистики.