

ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПСЕВДОРЕГУЛЯРНЫХ СТРУКТУР ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

к.т.н. О.В. Барабаш
(представил д.т.н., проф. Д.В. Голкин)

Рассматриваются структуры распределенных информационных систем (ИС). В качестве показателя функциональной устойчивости используется вероятность связности графа, описывающего структуру ИС. Проанализированы точные методы определения связности и выведены зависимости для приближенных оценок псевдoreгулярных структур.

Введение. Под распределенной информационной системой понимается система передачи данных специального назначения, построенная по принципам корпоративных вычислительных сетей и предназначенная для передачи компьютерного, голосового и видеотрафика. При проектировании распределенных информационных систем или оптимизации их структур основное внимание уделяется уровню избыточности линий связи.

Элементы ИС – линии связи (ЛС) и узлы коммутации (УК) подвержены потоку отказов повреждений, обусловленных внешними и внутренними факторами. В условиях возрастания стоимости потерянной информации актуальной является задача построения функционально устойчивых ИС [1, 2], использующих альтернативные маршруты для передачи информации.

Вопросам синтеза структур вычислительных сетей в последнее время был посвящен ряд работ [3 – 6]. Однако в этих работах не в полной мере отражены вопросы оптимизации структуры ИС и определения рационального уровня структурной избыточности.

Целью данной статьи является исследование псевдoreгулярных структур и разработка методики определения вероятности связности в зависимости от уровня избыточности линий связи в информационных структурах.

Математическая модель и принятые допущения. В качестве математической модели принят неориентированный случайный граф $G(V, E)$ без петель и кратных ребер. V – множество вершин ($|V| = n$), которому соответствует множество УК, E – множество ребер ($|E| = m$),

которому соответствует множество ЛС. Будем считать, что вершины безотказны, а ребра ненадежны. Если это не так, то можно, пользуясь известными методами, преобразовать структуру с ненадежными вершинами к структуре с надежными вершинами и дополнительными ненадежными ребрами [5]. Примем вероятность безотказной работы ЛС (ребер) $p_i(t) = p = \text{const}$, ($i = 1, 2, \dots, m$) одинаковой для всех ЛС и постоянной на некотором интервале времени. Будем полагать, что события отказов ребер независимы и появляются с вероятностью $q = 1 - p$.

Под вероятностью связности графа P_M понимается вероятность того, что все вершины связны – между любой парой вершин (v_i, v_j) найдется путь, состоящий из одного или нескольких исправных ребер.

Постановка задачи. Точные методы вычисления вероятности связности являются, в общем случае, NP-трудными и решаются в основном переборными алгоритмами [9]. Приближенные методы Эзари-Прошана, Литвака-Ушакова, Полесского [4, 5] не исключают поиска в графе полных множеств простых цепей и простых разрезов. Кроме того, почти все методы направлены на определение вероятности связности в двухполюсном графе (вероятности существования хотя бы одного исправного пути между v_i и v_j), что не всегда приемлемо для исследований структур в целом.

Поэтому в данной работе поставлена задача разработки простых зависимостей вероятности связности для стандартных структур: мостиковой схемы, кольцевых, полностью связных, регулярных и псевдoreгулярных графов.

Методика определения вероятности связности на примере мостиковой схемы. В качестве демонстрации метода расчета рассмотрим пример мостиковой схемы (рис. 1).

Исходными предпосылками для вывода зависимостей являются следующие. На основании биномиального закона вероятность пребывания графа в состоянии, когда i любых ребер графа отказали, $C_m^i \cdot p^{m-i} \cdot q^i$, где $C_m^i = m! / i! \cdot (m-i)!$ – биномиальный коэффициент; m – число ребер графа.

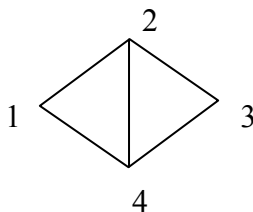


Рис. 1. Мостиковая структура ИС

Вероятность связности $P_{1,3}$ между вершинами v_1 и v_3 зависит от совокупности независимых событий:

- исправного состояния всех ребер – вероятность этого события равна p^5 ;
- повреждения любого одного ребра – вероятность этого события

равна $C^1_5 \cdot p^4 \cdot q = 5p^4q$;

– одновременного повреждения любых двух ребер графа, за исключением двух случаев, когда оба ребра инцидентны вершине 1 или вершине 3 – вероятность этого события равна $(C^2_5 - 2) p^3q^2 = 8 p^3q^2$;

– одновременного повреждения трех ребер сети, инцидентных вершине 2 или 4 – вероятность этого события равна $2p^2q^3$.

Суммируя все вероятности независимых событий, получаем

$$P_{1,3} = 2p^5 - 5p^4 + 2p^3 + 2p^2, \quad (1)$$

что полностью совпадает с результатами, полученными в [8].

Аналогично для остальных пар вершин получим:

$$P_{1,2} = P_{1,4} = P_{2,3} = P_{3,4} = p^5 + 5p^4q + 9p^3q^2 + 5p^2q^3 + pq^4; \quad (2)$$

$$P_{2,4} = p^5 + 5p^4q + 10p^3q^2 + 8p^2q^3 + pq^4. \quad (3)$$

Из анализа выражений (1) – (3) видно, что

$$P_{1,3} < P_{1,2} = P_{1,4} = P_{2,3} = P_{3,4} < P_{2,4}. \quad (4)$$

Вероятность связности всего графа на основании вышеприведенных рассуждений можно определить (см. рис. 1)

$$P_M = p^5 + 5p^4q + 8p^3q^2, \quad (5)$$

так как эта структура допускает все одиночные повреждения ребер и восемь двойных повреждений ребер. Анализ выражений (1) – (2) показывает, что вероятность связности P_M не больше вероятности связности между любой парой вершин графа, в данном случае $P_M < P_{1,3}$.

Анализ полностью связных структур. Аналогично можно найти выражения для вероятности связности полностью связных графов K_n . Полностью связным называется граф, в котором любые две вершины смежны [7].

Для графа с тремя вершинами ($n = 3$) K_3 :

$$P_M = p^3 + 3p^2q; \quad (6)$$

для графа с четырьмя вершинами ($n = 4$) K_4 :

$$P_M = p^6 + 6p^5q + 15p^4q^2 + (C^3_6 - 4)p^3q^3; \quad (7)$$

для графа с пятью вершинами ($n = 5$) K_5 :

$$P_M = p^{10} + C^1_{10}p^9q + C^2_{10}p^8q^2 + C^3_{10}p^7q^3 + (C^4_{10} - 5)p^6q^4 + (C^5_{10} - (n-1)nC^1_6)p^5q^5 + (C^6_{10} - nC^2_6 - 2n)p^4q^6; \quad (8)$$

для графа с шестью вершинами ($n = 6$) K_6 :

$$P_M = p^{15} + C_{15}^1 p^{14} q + C_{15}^2 p^{13} q^2 + C_{15}^3 p^{12} q^3 + C_{15}^4 p^{11} q^4 + (C_{15}^5 - n) p^{10} q^5 + \\ + (C_{15}^6 - n C_{10}^1) p^9 q^6 + (C_{15}^7 - n C_{10}^2) p^8 q^7 + (C_{15}^8 - n C_{10}^3 - n C_5^1) p^7 q^8 + \\ + (C_{15}^9 - n C_{10}^4 - n C_6^2 - C_7^3) p^6 q^9 + (C_{15}^{10} - n C_{10}^5 - n C_7^2 - 0,5 n C_6^1) p^5 q^{10}. \quad (9)$$

Выражения для вероятности связности P_M при $n = 7 \dots 10$ не приводятся из-за их громоздкости. На рис. 2 представлены графики зависимостей для вероятности связности полностью связных графов K_4, K_5, K_6 .

Анализ выражений и графиков для полностью связных структур информационных систем позволяет сделать следующие выводы:

1. Полностью связные структуры обладают наибольшей избыточностью, а, следовательно, и функциональной устойчивостью.

2. Нельзя составить универсальное выражение для $P_M(K_n)$ для любого числа n , что существенно упростило бы определение наибольшего достижимого значения показателя функциональной устойчивости.

3. Полностью связные структуры позволяют синтезировать систему с практически любым заданным показателем P_M при вероятности исправного состояния ребер $p_i > 0,5$.

Однако, полностью связные структуры на практике редко встречаются, поэтому целесообразно исследовать кольцевые, регулярные и псевдорегулярные структуры ИС.

Вероятность связности для кольцевых графов, то есть графов, у которых локальная степень каждой вершины равна 2 ($\deg(v_i) = 2, i = 1, 2, \dots, n$), можно определить по выражению

$$P_M = p^n + n p^{n-1} q. \quad (10)$$

Из его анализа видно, что вероятность связности кольцевых структур падает с увеличением числа узлов ИС при одних и тех же значениях p_i . Это обусловлено тем, что кольцевые структуры обладают степенью реберной связности $\lambda(G) = 2$ – то есть отказ двух ребер приводит к не связности структуры. В целом кольцевые структуры имеют низкий пока-

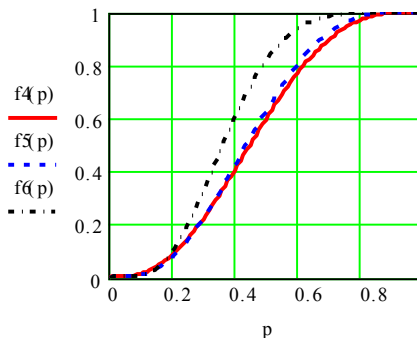


Рис. 2. Зависимости вероятности связности P_M от p_i для полностью связных структур: $f_4(p)$ – для K_4 ; $f_5(p)$ – для K_5 ; $f_6(p)$ – для K_6

затель функциональной устойчивости P_M , так как допускают только отказ не более одного ребра.

Анализ псевдoreгулярных структур ИС. Наиболее распространенным видом структур, которые используются на практике, являются слабосвязанные структуры с малыми значениями локальных степеней вершин α . Имеется большое семейство графов, так называемых равнопрочных, в которых степень вершины α , число вершин n и число ребер m связаны соотношением: $\alpha = 2m/n$ (при $n > 2$).

Например, для графа из $n = 6$ вершин без кратных ребер (рис. 3) можно построить четыре различных графа с $\alpha = 2, 3, 4, 5$. Для таких графов выведены следующие выражения для определения вероятности связности.

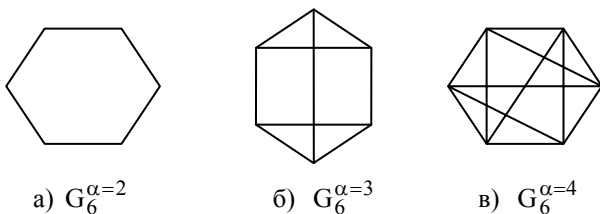


Рис. 3. Псевдoreгулярные структуры ИС с $n = 6$

Для $\alpha = 2, 3, 4$ (рис. 3):

$$P_M^{\alpha=2} = p^6 + 6p^5q; \quad (11)$$

$$P_M^{\alpha=3} = p^9 + C_9^1 p^8 q + C_9^2 p^7 q^2 + [C_9^3 - (n+1)] p^6 q^3 + [C_9^4 - (n-1)C_6^1] p^5 q^4; \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 P_M^{\alpha=4} = & p^{12} + C_{12}^1 p^{11} q + C_{12}^2 p^{10} q^2 + {}_3C_{12}^3 p^9 q^3 + (C_{12}^4 - n) p^8 q^4 + \\
 & + (C_{12}^5 - nC_8^1) p^7 q^5 + [C_{12}^6 - nC_8^2 - (n+2)] p^6 q^6 + \\
 & + [C_{12}^7 - nC_8^3 - (n+2)C_6^1] p^5 q^7. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Для графов, представленных на рис. 4 с $n = 8$ вершинами, можно построить шесть различных графов с $\alpha = 2, \dots, 7$.

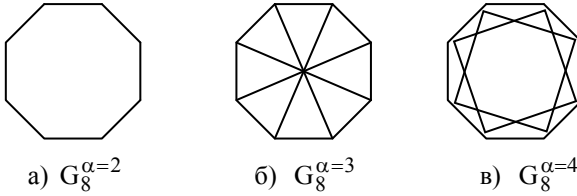


Рис. 4. Псевдoreгулярные структуры ИС с $n = 8$

Вероятность связности P_M этих графов определяется следующими выражениями $\alpha = 2, 3, 4$ (рис. 4):

$$P_M^{\alpha=2} = p^8 + 8p^7q; \quad (14)$$

$$P_M^{\alpha=3} = p^{12} + C_{12}^1 p^{11}q + C_{12}^2 p^{10}q^2 + (C_{12}^3 - n)p^9q^3 + (C_{12}^4 - nC_9^1 - n)p^8q^4 + (C_{12}^5 - nC_9^2 - nC_8^1 - n)p^7q^5; \quad (15)$$

$$P_M^{\alpha=4} = p^{16} + C_{16}^1 p^{15}q + C_{16}^2 p^{14}q^2 + C_{16}^3 p^{13}q^3 + (C_{16}^4 - n)p^{12}q^4 + (C_{16}^5 - nC_{12}^1)p^{11}q^5 + \left[C_{16}^6 - nC_{12}^2 - \left(2n + \frac{n}{2} \right) \right] p^{10}q^6 + \left[C_{16}^7 - nC_{12}^3 - \left(2n + \frac{n}{2} \right) C_{10}^1 \right] p^9q^7 + \left[C_{16}^8 - nC_{12}^4 - \left(2n + \frac{n}{2} \right) C_{10}^2 \right] p^8q^8 + \left[C_{16}^9 - nC_{12}^5 - \left(2n + \frac{n}{2} \right) C_{10}^3 \right] p^7q^8. \quad (16)$$

Расчетные формулы для P_M при $\alpha = 5$ и $\alpha = 6$ из-за громоздкости не приводятся. При $\alpha = 7$ граф превращается в полносвязный K_8 .

На рис. 5 представлены зависимости показателя функциональной устойчивости P_M от p_i для псевдoreгулярных графов (рис. 3 и 4), рассчитанные по выражениям (12) – (16).

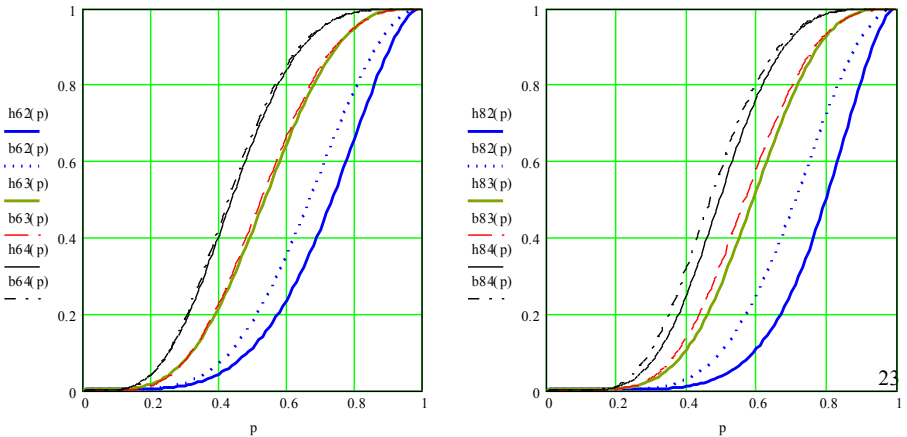


Рис. 5. Зависимости P_M от p_i для псевдорегулярных графов:

$h_{n\alpha}(p)$ – точные значения; $b_{n\alpha}(p)$ – верхние оценки;

n – число вершин в графе, α – локальные степени вершин

Анализ этих выражений и графиков позволяет сделать следующие выводы:

1. Как и предполагалось, псевдорегулярные графы с $\alpha > 2$ имеют вероятность связности выше, чем у кольцевых и, соответственно, выше запас функциональной устойчивости. Это объясняется более высокой степенью избыточности ЛС.

2. Увеличение числа вершин в псевдорегулярных графах практически не сказывается на функциональной устойчивости структуры соответствующей ИС.

3. При возрастании локальной степени вершин значительно возрастает показатель функциональной устойчивости.

4. Формулы (12) – (16) достаточно сложно выводятся и получить универсальную аналитическую зависимость P_M для любых значений n и α пока не удается.

5. Представленные графики подтверждают правильность выведенных выражений (12) – (16).

Приближенные оценки вероятности связности для псевдорегулярных структур. Так как довольно трудно получить аналитическое выражение для вероятности связности рассмотренного семейства графов при различных значениях α и n , то целесообразно разработать приближенные методы ее оценки.

Пусть A_i – событие, когда не существует неповрежденных ребер, инцидентных вершине v_i ; $p(A_i)$ – вероятность этого события; $(1 - p(A_i))$ – вероятность дополнительного события, когда существует хотя бы одно исправное ребро, инцидентное вершине v_i . Поэтому вероятность того, что у всех вершин существует, по крайней мере, одно исправное ребро, то есть граф связан, ограничена неравенством

$$P_M \leq P_M^B = \prod_{i=1}^n [1 - p(A_i)] = \prod_{i=1}^n (1 - q^\alpha) = (1 - q^\alpha)^n, \quad (17)$$

где P_M^B – верхняя оценка вероятности связности.

На рис. 5 представлены зависимости (17) для $n = 6, 8$, и $\alpha = 2, 3, 4$ (штриховые линии). Сравнение кривых показывает, что верхняя оценка вероятности связности P_M^B структуры ИС приближается к точному значению P_M , особенно при больших α . К сожалению, столь простое выражение для нижней оценки пока получить не удается.

Таким образом, предлагаемая верхняя оценка вероятности связности

равнопрочных структур дает хорошее приближение к точному значению вероятности связности при значениях $\alpha > 2$, что позволяет использовать ее при синтезе псевдорегулярных структур функционально устойчивых ИС. При $\alpha = 2$ погрешность оценки достигает 40%, поэтому нужно выполнять вычисления по точной формуле (10) для кольцевых графов.

Выводы. Предложенные выражения для вероятности связности стандартных структур позволяют проводить анализ функциональной устойчивости структур, сравнивать структуры с различными параметрами. Предложенные верхние оценки вероятности связности для псевдорегулярных структур могут использоваться на практике для определения степени структурной избыточности информационных систем. Однако применять предложенную методику можно лишь в том случае, когда методическая погрешность не превышает погрешность исходных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кравченко Ю.В., Барабаш О.В. Функціональна стійкість – властивість складних технічних систем // Збірник наукових праць. – К.: НАОУ. – 2002. – Бюл. № 40. – С. 225 – 229.
2. Тоценко В.Г. Проблемы надежности сетей // Компьютерра. – 1998. – № 4. – С. 23 – 29.
3. Дробаха Г.А. Формалізація задачі опису перетворень для синтезу структури інформаційної системи // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ. – 2004. – Вип. 1. – С. 55 – 61.
4. Полесский В.П. Нижняя оценка надежности сети с двусвязной структурой // Проблемы передачи информации. – 2000. – Т. 36. № 3. – С. 55 – 64.
5. Попков В.К. Математические модели связности. Ч. 1. Графы и сети. – Новосибирск: РАН. Сибир. отд-ние, 2000. – 174 с.
6. Королёв А.В., Кучук Г.А., Пашнев А.А. Адаптивная маршрутизация в корпоративных сетях. – Х.: ХВУ, 2003. – 224 с.
7. Оре О. Графы и их приложение. – М.: Эдиториал, 2003. – 248 с.
8. Мизин И.А., Богатырёв В.А., Кулешов А.П. Сети коммутации пакетов / Под ред. В.С. Семинихина. – М.: Радио и связь, 1986. – 408 с.
9. Колчин В.Ф. Случайные графы. – М.: Физматлит, 2002. – 256 с.

Поступила 12.02.2004

БАРАБАШ Олег Владимирович, кандидат технических наук, доцент. Ведущий научный сотрудник Института авиационно-космических исследований им. И.И. Сикорского. В 1986 г. окончил Киевское высшее военное авиационное инженерное училище. Область научных интересов – надежность вычислительных сетей.