

АНАЛИЗ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

к.т.н. М.И. Гиневский, В.П. Марченко
(представил д.т.н., проф. А.В. Королев)

Предложен метод анализа целевой функции в задачах управления, который можно использовать при ограниченной информации об объекте управления.

Постановка проблемы. Планирование развития сложных систем неизбежно сталкивается с противоречием: необходимо создать наиболее эффективную систему при минимальных затратах на ее создание. Очевидно, что оценка эффективности принимаемых решений сильно коррелирует с неопределенностями в оценках основных показателей системы [1]. Анализ, прогнозирование и оценку программ развития сложных систем необходимо проводить в условиях многовариантности, компромиссности и многофакторности с привлечением значительного объема информации [2]. Для оценки и обоснования плановых решений [2] в практике используются интуитивные, экспертные, нормативные и, основанные на экономико-математическом моделировании, методы. При этом любая неполная информация об объекте исследования сильно осложняет анализ. В [3] было предложено использовать для анализа зависимости между критериями подобия, т.е. уравнениями, связывающими безразмерные величины, полученные из участвующих в процессе параметров.

Цель статьи. Рассмотрим возможность анализа целевой функции методом, предложенным в [3] при ограниченной информации об объекте исследования. Связи между параметрами процесса и параметрами элементов системы, в которой этот процесс протекает, представим в виде

$$y = \sum_{i=1}^m a_i \cdot \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_{ji}}, \quad (1)$$

где y – некоторый обобщенный технико-экономический показатель, характеризующий исследуемый процесс; a_i, α_{ji} – постоянные коэффициенты, определяемые свойствами системы; x_j – переменные параметры системы.

С учетом (1) можно сформулировать задачу поиска экстремума функции следующим образом:

$$y \rightarrow \min \text{ при } x_j > 0. \quad (2)$$

Если функция y выпукла и дифференцируема на рассматриваемом интервале значений переменных x_j , то данная задача решается исходя из следующих условий:

$$\frac{\partial y}{\partial x_s} = \sum_{i=1}^m \alpha_{si} \frac{a_i}{x_s} \cdot \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_{ji}} = 0, \quad s = 1 \div n.$$

Преобразуем это выражение в критериальную форму. Умножив его левую и правую части на x_s/y_{\min} , получим

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{si} a_i \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_{ji}} / y_{\min} = 0, \quad s = 1 \div n,$$

а с учетом (1) верно

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{si} \pi_{i0} = 0, \quad s = 1 \div n, \quad (3)$$

где π_{i0} – критерии подобия, которые характеризуют исследуемую систему в состоянии, соответствующем минимуму показателя ее оптимальности y .

Согласно методу интегральных аналогов [3], критериальное уравнение записывается следующим образом:

$$1 = \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_m.$$

Таким образом, условие минимума функции запишется как:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \alpha_{ji} \pi_{i0} = 0, & j = 1 \div n; \\ \sum_{i=1}^m \pi_{i0} = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Решая систему уравнений (4) относительно π_{i0} и воспользовавшись соотношением [3]:

$$y_* = \pi_{1\delta} \cdot \prod_{j=1}^n x_{j*}^{\alpha_{j1}} + \pi_{2\delta} \cdot \prod_{j=1}^n x_{j*}^{\alpha_{j2}} + \dots + \pi_{m\delta} \cdot \prod_{j=1}^n x_{j*}^{\alpha_{jm}}, \quad (5)$$

где $y_* = y/y_\delta$; $x_{j*} = x_j/x_{j\delta}$, можно определить изменение y относительно y_{\min} при отклонении x_i от x_{i0} на заданный процент. При этом критериальный анализ выполняется без определения y_{\min} и соответствующих x_{i0} .

Уточним, что так задача решается только при определенном сочетании числа членов математической модели – m и числа переменных x_j – n .

Из (4) видно, что система уравнений относительно $\bar{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ определена только при $t = m - n - 1 = 0$. Показатель t называется степенью трудности и, если он не равен нулю, рассмотренный подход использовать нельзя. В этом случае требуются дополнительные исследования.

Обобщим задачу минимизации (2) для некоторых функциональных ограничениях следующим образом:

$$y \rightarrow \min \quad (6)$$

$$\text{при} \quad g_k = \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} a_i \cdot \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_{ji}} \leq G_k, \quad k=1, p, \quad x_j > 0, \quad j=1, n. \quad (7)$$

Будем искать минимум функции Лагранжа, которую можно записать (согласно теореме Куна-Таккера [4]) следующим образом:

$$L(x, \mu) = y + \sum_{k=1}^p \mu_k \cdot (g_k - G_k), \quad \mu_k \geq 0,$$

где μ_k – неопределенные множители Лагранжа.

Функция $L(x, \mu)$ достигает экстремума при условии равенства нулю частных производных от L по всем переменным x и μ_k :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_s} = \frac{1}{x_s} \cdot \left(\sum_{i=1}^{m_1} \alpha_{si} a_i \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_{ji}} + \sum_{k=1}^p \mu_k \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \alpha_{si} a_i \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_{ji}} \right) = 0, \quad s=1 \div n; \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_k} = \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} a_i \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_{ji}} - G_k = 0, \quad k=1 \div p. \end{array} \right. \quad (8)$$

Умножив левые и правые части первых n выражений на x_s/y_{\min} с учетом (5), получим

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{si} \cdot \Pi_{i0} = 0, \quad s=1 \div n, \quad (9)$$

где m – суммарное число членов целевой функции и ограничений,

$$\Pi_{i0} = \begin{cases} \frac{a_i}{y_{\min}} \cdot \prod_{j=1}^n x_{j0}^{\alpha_{ji}}, & i=1 \div m_1; \\ \frac{\mu_{ko}}{y_{\min}} \cdot a_i \cdot \prod_{j=1}^n x_{j0}^{\alpha_{ji}}, & i=m_k+1 \div m_{k+1}, \quad k=1 \div p. \end{cases} \quad (10)$$

Запишем условие нормировки для функции Лагранжа, используя метод интегральных аналогов

$$1 = \sum_{i=1}^{m_1} \frac{a_i}{y_{\min}} \cdot \prod_{j=1}^n x_{j0}^{\alpha_{ji}} + \sum_{k=1}^p \frac{\mu_{k0}}{y_{\min}} \cdot (g_k - G_k).$$

Согласно теореме Куна-Таккера [2] $\mu_{k0} \cdot (g_k - G_k) = 0$, условие при-

нимает вид
$$1 = \sum_{i=1}^{m_1} \pi_{i0}, \quad (11)$$

т.е. нормируются критерии подобия только целевой функции.

Далее исследуем связь между критериями подобия ограничений. Для этого сначала определим значения множителей Лагранжа μ_k . Известно [4], что в точке относительного минимума градиенты функций $y'(x)$ и $g'(x)$ направлены по одной прямой, но в противоположные стороны, т.е. $y'(x) = -\mu_k \cdot g'_k(x)$. Отсюда

$$\mu_k = -\frac{y'(x_0)}{g'_k(x_0)}, \quad k = 1 \div p. \quad (12)$$

Запишем значения градиентов $y'(x)$ и $g'(x)$ через логарифмические производные и подставим их в (12), получим

$$\mu_k = -\frac{y(x)}{g'(x)} \cdot \frac{d \ln y(x)}{d \ln g_k(x)} \Big|_{x=x_0}; \quad \lambda_k = -\frac{d \ln y(x)}{d \ln g_k(x)} \Big|_{x=x_0} \quad (13)$$

является коэффициентом чувствительности k -го ограничения и выражает относительное увеличение $y(x_0)$ при единичном относительном уменьшении значения $g_k(x_0)$, если это ограничение активно.

Если ограничение не активно, то $\lambda_k = 0$, так как такое ограничение не влияет на значение целевой функции $y(x)$ [4]. С учетом (13) выражение для множителей Лагранжа для активных ограничений запишется как

$$\mu_{k0} = \frac{y(x_0)}{G_k} \cdot \lambda_k,$$

откуда
$$\lambda_k = \frac{\mu_{k0}}{y(x_0)} \cdot G_k, \quad (14)$$

т.е. λ_k можно рассматривать как нормированный множитель Лагранжа.

Воспользовавшись соотношением $\mu_{k0} \cdot (g_k - G_k) = 0$, или

$$\sum_{i=m_k+1}^{m_k+1} \frac{\mu_{k0}}{y_{\min}} \cdot a_i \cdot \prod_{j=1}^n x_{j0}^{\alpha_{ji}} = \frac{\mu_{k0}}{y_{\min}} \cdot G_k = \lambda_k$$

с учетом (10) получим

$$\lambda_k = \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_{i0}. \quad (15)$$

Из последнего видно, что нормированный множитель Лагранжа λ_k представляет собой сумму критериев подобия k -го ограничения.

Полученные результаты для критериев подобия дают возможность записать функцию Лагранжа в критериальной форме. Однако для практических применений интерес представляет исследование области условного минимума y , а не ее безусловного минимума. Поэтому оправдана раздельная запись исходной функции y и ограничений g_k в относительных единицах.

Учитывая сделанное замечание и методы, изложенные в предыдущем материале, получим

$$y^* = \sum_{i=1}^{m_1} \pi_{i0} \cdot \prod_{j=1}^n x_{j*0}^{\alpha_{ji}}; \quad (16)$$

$$g_{k*} = \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_{i0} \cdot \prod_{j=1}^n x_{j*0} \leq \lambda_k, \quad k = \overline{1, p}. \quad (17)$$

Выводы. Из соотношений (16) и (17) можно выявить изменения величины целевой функции и ограничений при отклонении x_j от x_{j0} без значения коэффициентов a_i , определяемых свойствами системы, что позволяет сделать заключение о возможности использования метода при ограниченной информации об объекте исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цвиркун А.Д., Акинфиев В.К. Структура многоуровневых и крупномасштабных систем. Синтез и планирование развития. – М.: Наука, 1993. – 160 с.
2. Мазур И.И., Шапиро В.Д., Ольдерогге Н.Г. Управление проектами. – М.: Экономика, 2001. – 574 с.
3. Марченко В.П., Воробьев О.В. Критериальный анализ в операционных задачах управления // Моделювання та інформаційні технології. – К.: НАНУ, ИПМЕ. – 2003. – Вип. 22. – С. 118 – 120.
4. Кузнецов Ю.Н. и др. Математическое программирование. – М.: Высш. шк., 1976. – 352 с.

Поступила 15.03.2004

ГИНЕВСКИЙ Михаил Иванович, канд. техн. наук, ст. научн. сотрудник, нач. ИВЦ ХВУ. В 1969 году окончил Харьковское ВКИУ. Область научных интересов – обработка информации.

МАРЧЕНКО Василий Петрович, начальник НИЛ ИВЦ ХВУ. В 1987 году окончил ХВВКИУ РВ. Область научных интересов – системный анализ.
