УДК 517.968

АНАЛИЗ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

к.т.н. М.И. Гиневский, В.П. Марченко
(представил д.т.н., проф. А.В. Королев)

Предложен метод анализа целевой функции в задачах управления, который можно использовать при ограниченной информации об объекте управления.

Постановка проблемы. Планирование развития сложных систем неизбежно сталкивается с противоречием: необходимо создать наиболее эффективную систему при минимальных затратах на ее создание. Очевидно, что оценка эффективности принимаемых решений сильно коррелирует с неопределенностями в оценках основных показателей системы [1]. Анализ, прогнозирование и оценку программ развития сложных систем необходимо проводить в условиях многовариантности, компромиссности и многофакторности с привлечением значительного объема информации [2]. Для оценки и обоснования плановых решений [2] в практике используются интуитивные, экспертные, нормативные и, основанные на экономико-математическом моделировании, методы. При этом любая неполная информация об объекте исследования сильно осложняет анализ. В [3] было предложено использовать для анализа зависимости между критериями подобия, т.е. уравнениями, связывающими безразмерные величины, полученные из участвующих в процессе параметров.

Цель статьи. Рассмотрим возможность анализа целевой функции методом, предложенным в [3] при ограниченной информации об объекте исследования. Связи между параметрами процесса и параметрами элементов системы, в которой этот процесс протекает, представим в виде

$$y = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}}, \tag{1}$$

где y – некоторый обобщенный технико-экономический показатель, характеризующий исследуемый процесс; a_i, α_{ji} – постоянные коэффициенты, определяемые свойствами системы; x_j – переменные параметры системы.

С учетом (1) можно сформулировать задачу поиска экстремума функции следующим образом:

$$y \to \min \quad \text{при} \quad x_j > 0. \tag{2}$$

Если функция y выпукла и дифференцируема на рассматриваемом интервале значений переменных x_j, то данная задача решается исходя из следующих условий:

$$\frac{\partial y}{\partial x_s} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{si} \frac{a_i}{x_s} \cdot \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} = 0, \qquad s = 1 \div n.$$

Преобразуем это выражение в критериальную форму. Умножив его левую и правую части на x_s / y_{min}, получим

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{si}\, a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} \Big/ y_{min} = 0, \qquad s = 1 \div n,$$

а с учетом (1) верно

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{si} \pi_{io} = 0, \qquad s = 1 \div n, \tag{3}$$

где π_{i0} – критерии подобия, которые характеризуют исследуемую систему в состоянии, соответствующем минимуму показателя ее оптимальности y.

Согласно методу интегральных аналогов [3], критериальное уравнение записывается следующим образом:

$$1 = \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_m.$$

Таким образом, условие минимума функции запишется как:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji} \pi_{io} = 0, \quad j = 1 \div n; \\ \sum_{i=1}^{m} \pi_{io} = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Решая систему уравнений (4) относительно π_{i0} и воспользовавшись соотношением [3]:

$$y_* = \pi_{1\delta} \cdot \prod_{j=1}^{n} x_{j*}^{\alpha_{j1}} + \pi_{2\delta} \cdot \prod_{j=1}^{n} x_{j*}^{\alpha_{j2}} + \ldots + \pi_{m\delta} \cdot \prod_{j=1}^{n} x_{j*}^{\alpha_{jm}}, \tag{5}$$

где $y_* = y / y_\delta$; $x_{j*} = x_j / x_{j\delta}$, можно определить изменение y относительно y_{min} при отклонении x_i от x_{io} на заданный процент. При этом критериальный анализ выполняется без определения y_{min} и соответствующих x_{io}.

Уточним, что так задача решается только при определенном сочетании числа членов математической модели – m и числа переменных x_j – n.

Из (4) видно, что система уравнений относительно $\vec{\pi}=(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ определена только при $t=m-n-1=0$. Показатель t называется степенью трудности и, если он не равен нулю, рассмотренный подход использовать нельзя. В этом случае требуются дополнительные исследования.

Обобщим задачу минимизации (2) для некоторых функциональных ограничениях следующим образом:

$$y \to \min \tag{6}$$

при $$g_к = \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} a_i \cdot \prod_{j=1}^{n} x_i^{\alpha_{ji}} \le G_k, \quad k=1,p, \qquad x_j > 0, \quad j=1,n. \tag{7}$$

Будем искать минимум функции Лагранжа, которую можно записать (согласно теореме Куна-Таккера [4]) следующим образом:

$$L(x,\mu) = y + \sum_{k=1}^{p} \mu_k \cdot (g_k - G_k), \quad \mu_k \ge 0,$$

где μ_k – неопределенные множители Лагранжа.

Функция $L(x,\mu)$ достигает экстремума при условии равенства нулю частных производных от L по всем переменным x и μ_k :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_s} = \dfrac{1}{x_s} \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{m_1} \alpha_{si} a_i \prod\limits_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} + \sum\limits_{k=1}^{p} \mu_k \sum\limits_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \alpha_{si} a_i \prod\limits_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} \right) = 0, \ s = 1 \div n; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu_k} = \sum\limits_{k=m_k+1}^{m_{k+1}} a_i \prod\limits_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} - G_k = 0, \qquad k = 1 \div p. \end{cases} \tag{8}$$

Умножив левые и правые части первых n выражений на x_s/y_{min} с учетом (5), получим

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{si} \cdot \Pi_{io} = 0, \quad s = 1 \div n, \tag{9}$$

где m – суммарное число членов целевой функции и ограничений,

$$\pi_{io} = \begin{cases} \dfrac{a_i}{y_{min}} \cdot \prod\limits_{j=1}^{n} x_{jo}^{\alpha_{ji}}, \quad i = 1 \div m_1; \\ \dfrac{\mu_{ko}}{y_{min}} \cdot a_i \cdot \prod\limits_{j=1}^{n} x_{jo}^{\alpha_{ji}}, \quad i = m_k + 1 \div m_{k+1}, \quad k = 1 \div p. \end{cases} \tag{10}$$

Запишем условие нормировки для функции Лагранжа, используя метод интегральных аналогов

$$1=\sum_{i=1}^{m_1}\frac{a_i}{y_{min}}\cdot\prod_{j=1}^{n}x_{jo}^{\alpha_{ji}}+\sum_{k=1}^{p}\frac{\mu_{ko}}{y_{min}}\cdot\left(g_k-G_k\right).$$

Согласно теореме Куна-Таккера [2] $\mu_{ko}\cdot\left(g_k-G_k\right)=0,$ условие принимает вид

$$1=\sum_{i=1}^{m_1}\pi_{io}, \tag{11}$$

т.е. нормируются критерии подобия только целевой функции.

Далее исследуем связь между критериями подобия ограничений. Для этого сначала определим значения множителей Лагранжа μ_k. Известно [4], что в точке относительного минимума градиенты функций $y'(x)$ и $g'(x)$ направлены по одной прямой, но в противоположные стороны, т.е. $y'(x)=-\mu_k\cdot g_k'(x).$ Отсюда

$$\mu_k=-\frac{y'(x_0)}{g_k'(x_0)},\quad k=1\div p. \tag{12}$$

Запишем значения градиентов $y'(x)$ и $g'(x)$ через логарифмические производные и подставим их в (12), получим

$$\mu_k=-\frac{y(x)}{g'(x)}\cdot\frac{d\ln y(x)}{d\ln g_k(x)}\Bigg|_{x=x_0};\quad \lambda_k=-\frac{d\ln y(x)}{d\ln g_k(x)}\Bigg|_{x=x_0} \tag{13}$$

является коэффициентом чувствительности k-го ограничения и выражает относительное увеличение $y(x_0)$ при единичном относительном уменьшении значения $g_k(x_0)$, если это ограничение активно.

Если ограничение не активно, то $\lambda_k=0$, так как такое ограничение не влияет на значение целевой функции y(x) [4]. С учетом (13) выражение для множителей Лагранжа для активных ограничений запишется как

$$\mu_{k0}=\frac{y(x_0)}{G_k}\cdot\lambda_k,$$

откуда

$$\lambda_k=\frac{\mu_{k0}}{y(x_0)}\cdot G_k, \tag{14}$$

т.е. λ_k можно рассматривать как нормированный множитель Лагранжа.

Воспользовавшись соотношением $\mu_{k0}\cdot(g_k-G_k)=0,$ или

$$\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}}\frac{\mu_{k0}}{y_{min}}\cdot a_i\cdot\prod_{j=1}^{n}x_{j0}^{\alpha_{ji}}=\frac{\mu_{k0}}{y_{min}}\cdot G_k=\lambda_k$$

с учетом (10) получим

$$\lambda_k = \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_{io}. \qquad (15)$$

Из последнего видно, что нормированный множитель Лагранжа λ_k представляет собой сумму критериев подобия k-го ограничения.

Полученные результаты для критериев подобия дают возможность записать функцию Лагранжа в критериальной форме. Однако для практических применений интерес представляет исследование области условного минимума y, а не ее безусловного минимума. Поэтому оправдана раздельная запись исходной функции y и ограничений g_k в относительных единицах.

Учитывая сделанное замечание и методы, изложенные в предыдущем материале, получим

$$\begin{cases} y_* = \sum\limits_{i=1}^{m_1} \pi_{io} \cdot \prod\limits_{j=1}^{n} x_{j*0}^{\alpha_{ji}}; & (16) \\ g_{k*} = \sum\limits_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_{io} \cdot \prod\limits_{j=1}^{n} x_{j*0} \le \lambda_k, \quad k = \overline{1,p}. & (17) \end{cases}$$

Выводы. Из соотношений (16) и (17) можно выявить изменения величины целевой функции и ограничений при отклонении x_j от x_{j0} без значения коэффициентов a_i, определяемых свойствами системы, что позволяет сделать заключение о возможности использования метода при ограниченной информации об объекте исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цвиркун А.Д., Акинфиев В.К. Структура многоуровневых и крупномасштабных систем. Синтез и планирование развития. – М.: Наука, 1993. – 160 с.*
2. *Мазур И.И., Шапиро В.Д., Ольдерогге Н.Г. Управление проектами. – М.: Экономика, 2001. – 574 с.*
3. *Марченко В.П., Воробьев О.В. Критериальный анализ в операционных задачах управления // Моделювання та інформаційні технології. – К.: НАНУ, ІПМЕ. – 2003. – Вип. 22. – С. 118 – 120.*
4. *Кузнецов Ю.Н. и др. Математическое программирование. – М.: Высш. шк., 1976. – 352 с.*

Поступила 15.03.2004

***ГИНЕВСКИЙ Михаил Иванович**, канд. техн. наук, ст. научн. сотрудник, нач. ИВЦ ХВУ. В 1969 году окончил Харьковское ВКИУ. Область научных интересов – обработка информации.*

***МАРЧЕНКО Василий Петрович**, начальник НИЛ ИВЦ ХВУ. В 1987 году окончил ХВВКИУ РВ. Область научных интересов – системный анализ.*