УДК 20.02.12

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ВІДНОВЛЕННЯ МЕРЕЖІ ЗВ'ЯЗКУ НА ОСНОВІ ТЕОРЕТИКО-ГРАФОВОЇ МОДЕЛІ

В.О. Гончаренко
(подав д.ф.-м.н., проф. О.О. Ємець)

В процесі функціонування мереж зв'язку виникають пошкодження (руйнування) ліній та вузлів зв'язку. Розв'язання задачі відновлення обмеженої кількості найбільш важливих ліній та вузлів зв'язку при глобальних руйнуваннях необхідно здійснювати за кілька етапів. Перший етап дає можливість спростити граф, другий – визначити початкове дерево Штейнера, третій етап визначає методи покращення розв'язків.

Постановка проблеми. Під час функціонування мереж зв'язку військового призначення можливе виникнення надзвичайних ситуацій, в результаті яких під впливом зовнішніх факторів відбувається пошкодження частини вузлів і з'єднуючих їх ліній, що може призвести до зміни топології мережі та зробити неможливим зв'язок між деякими пунктами мережі.

При наявності такої ситуації виникає проблема відновлення зв'язності мережі. Завдання повного або часткового відновлення працездатності елементів мережі потрібно розв'язувати, як правило, з використанням мінімального за вартістю або за кількістю складу засобів зв'язку. Являється доцільним як критерій оцінки оптимальності варіантів відновлення мережі зв'язку розглядати вартість витрат на відновлення її зв'язності. Використання даного критерію дозволить вибрати варіант побудови відновленої мережі при мінімальних витратах і використанні мінімальної кількості резервних засобів.

Для відновлення мережі в зоні локального руйнування задача оперативного відновлення зв'язності мережі може бути поставлена як задача відновлення зв'язності усіх вузлів і ліній зв'язку, яка може бути вирішена шляхом побудови остовного дерева мінімальної вартості. Визначити такий остов можна за допомогою добре відомих алгоритмів теорії графів.

При глобальних руйнуваннях основною вимогою до відновленої мережі є забезпечення зв'язності для деякої кількості пар найбільш важливих вузлів – полюсів. Перелік найбільш важливих вузлів визначається міркуваннями посадових осіб і вважається відомим. Для відновлення зв'язності між полюсами потрібно визначити дерево мінімальної вартості, яке включатиме всі полюси і, можливо, інші вершини.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Задачі відновлення мереж зв'язку розглядалися в роботах [2, 4 – 6]. В [2] розглянуті можливості поновлення обмеженої кількості полюсів та наголошено, що при вирішенні цієї задачі не діє „правило трикутника". В [4] викладений метод побудови дерева Штейнера, який дозволяє отримати краще рішення. В [5] розглянуті принципи побудови та надійності радіально-вузлових мереж зв'язку. В [6] проведений аналіз уразливості мереж зв'язку різної структури. Але в даних роботах не було знайдено ефективного рішення задачі відновлення зв'язності підмножини найбільш важливих вузлів зв'язку.

Метою статті являється розробка методу розв'язання задачі відновлення зв'язності підмножини найбільш важливих вузлів зв'язку мережі зв'язку при глобальних руйнуваннях з найменшими затратами сил та засобів зв'язку.

Виклад основного матеріалу. Для дослідження проблеми відновлюваності мережі зв'язку найбільш зручними є моделі, засновані на теорії графів [1, 2, 3, 5, 6]. Проблема визначення найкращого варіанта відновлення зводиться до мінімізації функції F(G, R, T), де G – параметри мережі, R – параметри, що визначають вартість відновлення елементів мережі, T – параметри, що визначають вибраний варіант відновлення мережі, F(G, R, T) – загальна вартість відновлення мережі. Серед параметрів мережі для відновлення мають значення лише її топологія, зв'язність та множина найбільш важливих вершин (полюсів), зв'язок між якими потрібно забезпечити першочергово. Для моделювання параметрів мережі використаємо граф $G = (V, P, E)$, де V – множина вершин, $P \subseteq V$ – множина полюсів, E – множина ненаправлених ребер.

Важливим елементом моделі є відображення графів, що здійснюється ототожненням вершин його підграфів. Такі відображення дають можливість замінювати дані графи простішими, з меншою кількістю вершин та ребер. Розглянемо граф G і його підграф D, що складається із зв'язних частин D_i, $i = 1, 2, \dots, n$. Ототожнимо вершини підграфів D_i і одержимо граф f(G). Ребра, які інцидентні ототожненій вершині, помітимо символом (ab), де a і b вершини, яким дане ребро інцидентне в графі G і f(G). Така помітка дає можливість визначити прообраз даного ребра в графі G.

До параметрів, що визначають вартість відновлення елементів мережі, відносяться функції v(a) та w((ab)), визначені на множині вершин та ребер графу G, що ставлять у відповідність кожній вершині та ребру вартість їх відновлення, до якої включаються вартість технічних засобів, що задіються (у т.ч. апаратних енергозабезпечення і додаткового лінійно-кабельного обладнання), вартість розгортання лінії зв'язку і технічних засобів, вартість транспортних витрат. До технічних засобів, які задіяні для відновлення працездатності даної лінії зв'язку, включаються засоби, які забезпечують функціонування даної лінії у складі вузлів зв'язку, що відновлюються. Тим самим вартість, що визначається вершинною функцією v(a), розподіляється між ребрами, які інцидентні вершині a.

Параметр T являє собою дерево, що являється підграфом графу G, і включає всі полюси. Для дерева T можна визначити функцію W(T), яка визначає загальну вартість відновлення ліній зв’язку, що відповідають ребрам даного дерева. Дерево, для якого дана функція досягає найменшого значення, називається деревом Штейнера для графу G з множиною полюсів P, а задача визначення цього дерева називається задачею Штейнера на графах (ЗШГ). Різні точні алгоритми її вирішення мають складність, порядок якої виражається експоненціальною функцією з показником n або p, де n – загальна кількість вузлів у мережі, p – кількість полюсів, що не дозволяє практично їх використовувати для вирішення задач значної розмірності.

Відомі також випадки, для яких існують поліноміальні алгоритми рішення ЗШГ для планарних мереж [8]. Але оскільки мережа зв'язку не обов’язково є планарною, ці алгоритми не можна використати для визначення оптимального варіанта відновлення мережі.

При вирішенні задачі відновлення зв’язності досить великої мережі зв’язку використовують евристичні методи, які дозволяють отримувати дерево Штейнера з потрібною точністю при мінімальних затратах.

Розв’язання задачі здійснюється за кілька етапів. Спочатку до графу, який є моделлю мережі зв’язку, застосовують певні перетворення, які зменшують кількість вершин та ребер і дають можливість виділити дерево Штейнера для початкового графу на основі аналогічного дерева для перетвореного графу. Такими перетвореннями є ототожнення вершин, які з’єднані ребрами нульової вартості, виключення кратних ребер, виключення висячих вершин, виключення вершин зі степенем 2, виключення висячих полюсів, розкладання графу на двозв’язні частини (блоки) тощо.

Другий етап дає можливість визначити дерево Штейнера, яке є початковим варіантом для подальшого розв’язання. Для визначення такого дерева можна використати евристичний алгоритм, заснований на приєднанні до дерева найближчого полюса разом із ребрами, які складають найкоротший шлях від полюса до дерева. Початковий полюс вибираємо довільно, потім визначаємо найближчий до нього полюс і відповідний шлях до нього. Ототожнюємо вершини, які включені в шлях, і для одержаного графу визначаємо шлях від полюса, одержаного в результаті ототожнення, до найближчого до нього. Дерево Штейнера – об’єднання всіх таких шляхів. Для застосування вказаного алгоритма потрібно визначити відстані від полюсів до всіх вершин графу. Для цього можна використати алгоритм визначення шляхів мінімальної вартості від даної вершини до всіх інших вершин графу.

1. Вибираємо довільну вершину а і надаємо їй значення 0.

2. Визначаємо вершини, які з’єднані з вершиною а ребрами, і надаємо їм значення, рівні значенням ребер, які з’єднують ці вершини з вершиною а, з’єднуючі ребра позначаємо стрілками, направленими до вершини а.

3. Встановлюємо для вершини а індикатор, який визначає, що всі з’єднані з нею ребрами вершини вже одержали значення.

4. Вибираємо довільну вершину b, яка з’єднана ребром з вершиною а, переглядаємо вершини, з’єднані з нею ребрами, і для кожної такої вершини надаємо значення, що визначається додаванням значення вершини b і вартості ребра від вершини b до даної вершини.

5. Встановлюємо для вершини b індикатор і повертаємось до 4.

6. При визначенні значень для вершин, які з’єднані з вершиною b ребрами, може виявитись, що така вершина раніше вже одержала значення. Якщо нове значення більше існуючого, то залишаємо існуюче значення без змін, інакше замінюємо існуюче значення новим і відповідно змінюємо стрілки біля цієї вершини. Індикатор для вершини b встановлюється, якщо для вершини, яка змінила значення, він не встановлювався.

7. Якщо змінилося значення відміченої індикатором вершини, то змінюються значення вершин, які з’єднані з нею ребрами, а потім встановлюється індикатор для вершини b і повертаємось до 4.

8. Якщо всі вершини одержали індикатори, то значення вершин дорівнюють віддалям до вершини а, а стрілки вказують оптимальні ланцюги.

9. Повторивши вказані дії для іншого полюса, ми одержимо і для нього оптимальні відстані до вершин.

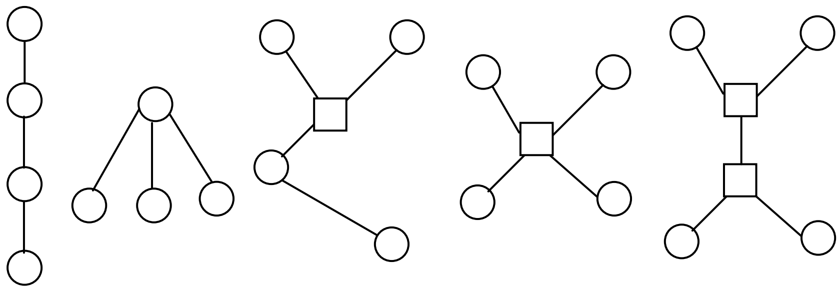
Третій етап визначає методи покращення розв’язків. Візьмемо довільне дерево Штейнера. Вершини цього дерева поділяються на три класи. До першого відносяться полюси, до другого вершини, які не є полюсами, а їх степінь в дереві не менше трьох, до третього вершини, які не є полюсами і степені яких менше трьох. Визначимо довжини ланцюгів між полюсами і вершинами цього дерева, степінь яких не менше трьох.

Визначимо на множині дерев Штейнера перетворення $f_n(T, A)$, де A – множина n ребер дерева T. В дереві T вибираємо довільні n ребер і видаляємо їх з дерева. Одержимо граф, що складається з n + 1 дерев T_i. Ототожнимо вершини дерев T_i, позначаючи ребра, які інцидентні вершинам T_i, позначками відповідних їм вершин. Одержимо граф, який включає n + 1 вершину, які одержані ототожненням вершин дерев T_i. Якщо в дереві T_i містився полюс графу G, то відповідна вершина вважається полюсом одержаного графу. Для одержаного графу можна визначити дерево Штейнера, що включає полюси. Це дерево містить помічені ребра. Приєднавши до цих ребер відповідні поміткам вершини дерев T_i, ми одержимо дерево Штейнера для графу G, загальна вартість ребер якого не більша, ніж для дерева T. Застосовуючи вказане перетворення кілька разів з різними множинами A, ми можемо покращити початковий розв'язок.

Кількість ребер n для перетворення $f_n(T,A)$ може вибиратися довільною, але найкращими варіантами є значення 2, 3, 4, оскільки для цих значень визначити дерево Штейнера нескладно. Якщо n = 2, то дерево Штейнера для графу, одержаного перетворенням $f_n(T,A)$, являється звичайним ланцюгом, для визначення якого можна застосувати відомий алгоритм Дейкстри.

Якщо n = 3, то дерево Штейнера для графу, одержаного перетворенням $f_n(T,A)$, являється або ланцюгом, або складається з трьох ланцюгів, які йдуть від деякої вершини до полюсів. В принципі перший випадок зводиться до другого, якщо вважати, що додаткова вершина співпадає з одним із полюсів. Переглядаємо по черзі всі вершини графу і вибираємо вершину, для якої загальна віддаль до полюсів є найменшою. Наведений вище алгоритм дає можливість не тільки визначити відстані від вершин до полюсів, а й визначити відповідні їм ланцюги. Дані ланцюги і складають дерево Штейнера.

Якщо n = 4, то дерево Штейнера для графу, одержаного перетворенням $f_n(T,A)$, являється ланцюгом, або складається з трьох ланцюгів, які йдуть від деякої вершини до полюсів і ланцюга між полюсами, або складається з чотирьох ланцюгів, які йдуть від деякої вершини до полюсів, або включає з'єднані ланцюгом додаткові вершини, які з'єднані з парами полюсів (рис. 1).



а) б) в) г) д)

Рис. 1. Варіанти дерева Штейнера при n = 4

Варіанти а), б), в) і г) є частковими випадками варіанта д), якщо деякі вершини ототожнити.

Переглядаючи по черзі всі пари (ab) вершин графу, визначимо величини

$$W(ab) + \min\left(W(ap_{i1}) + W(ap_{i2}) + W(bp_{i3}) + W(bp_{i4})\right),$$

де $p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}, p_{i4}$ – полюси, і вибираємо пару вершин, для якої ця величина є найменшою.

Наведений вище алгоритм дає можливість не тільки визначити відстані від вершин до полюсів, а й визначити відповідні їм ланцюги. Дані ланцюги і складають дерево Штейнера.

Висновки. Таким чином, використовуючи методи спрощення графу, визначення початкового дерева Штейнера та наведений вище алгоритм, можна покращити початковий розв'язок.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход: пер. с англ. Э.В. Вершкова, И.В. Коновальцева / Под. ред. Г.П. Гаврилова. – М.: Мир, 1978. – 432 с.*
2. *Мешковский К.А., Рокотян А.Ю. Восстановление связности сети связи при выходе из строя узлов и линий связи // Электросвязь. – 1991. – № 8. – С. 11 – 13.*
3. *Филин Б.П. Методы анализа структурной надежности сетей связи. – М.: Радио и связь, 1988. – 208 с.*
4. *Еремеев А.В. Генетический алгоритм для задачи о покрытии // Дискретный анализ и исследование операций, серия 2. – 2000. – Том 7, № 1. – С. 47 – 60.*
5. *Птицын Г.А. Живучесть сетей связи // Электросвязь, 2002. – № 2. – С. 20 – 22.*
6. *Птицын Г.А., Ивин Ю.Э. Динамика средней длины пути сообщений и уязвимости развивающихся сетей // Электросвязь, 2003. – № 7. – С. 38 – 40.*
7. *Куликовский Л.Ф., Мотов В.В. Теоретические основы информационных процессов. – М.: Высшая школа, 1987. – 247 с.*
8. *Winter P. Steiner problem in networks: a survey // Networks. – 1987. – V.17, № 6. – P. 129 – 167.*

Надійшла 22.03.2004

***ГОНЧАРЕНКО Віталій Олексійович**, ад'юнкт кафедри Полтавського військового інституту зв'язку. В 1995 році закінчив Полтавське вище військове командне училище зв'язку. Область наукових інтересів – застосування методів оптимізації на графах в телекомунікаційних мережах.*