

## ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ НАД ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ

к.ф.-м.н. С.В. Львова  
(представил д.ф.-м.н. Г.М. Фельдман)

*Для функций, мероморфных в полуплоскости  $\{\text{Im } z > 0\}$ , получено представление в виде произведения по ее нулям и полюсам и некоторого остаточного члена. Данное представление позволяет получать различные соотношения, связывающие асимптотическое поведение функции с распределением ее нулей и полюсов.*

**Постановка проблемы.** Теория распределения значений целых и мероморфных функций занимает одно из ведущих мест в общей теории аналитических функций. Применение мероморфных функций в других областях математики (топологии, дифференциальной геометрии, теории меры, теории потенциала и др.), а также в ее приложениях к практическим задачам определяют *актуальность тематики*.

**Анализ литературы.** Анализ литературы показывает, что теория целых и мероморфных функций, заданных в конечной плоскости, приобрела в настоящее время, в известной мере, законченный вид. Если же речь идет о мероморфных функциях, заданных в произвольных областях [1, 2], в частности, заданных над полуплоскостью, либо в единичном круге, то их поведение даже в классических задачах слабо изучено.

**Цель работы.** В данной работе получено представление для мероморфных функций, заданных над полуплоскостью, позволяющее получить различные оценки роста и оценить асимптотическое поведение функции. Кроме того, в данной работе используются характеристики Цудзи, что позволяет изучить асимптотическое поведение мероморфной функции под нестандартным углом зрения.

**1. Формулировка теорем.** Пусть  $f(x)$  – функция, мероморфная в полуплоскости  $\{\text{Im } z > 0\}$  и не равная тождественной постоянной,  $\hat{n}(r, f)$ ,  $r \geq 1$  – число ее полюсов, лежащих в области  $\{|z - ir/2| \leq r/2, |z| \geq 1\}$ . Положим:

$$\hat{N}(r, f) = \int_1^r \frac{\hat{n}(t, f)}{t^2} dt, \quad r > 1; \quad \hat{m}(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\kappa(r)}^{\pi - \kappa(r)} \ln^+ |f(re^{i\varphi} \sin \varphi)| \frac{d\varphi}{r \sin^2 \varphi},$$

где  $\kappa(r) = \arcsin r^{-1}$ . Пусть  $\hat{T}(r, f) = \hat{m}(r, f) + \hat{N}(r, f)$ . Тогда имеет место

следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть  $f(z)$  – функция, мероморфная в полуплоскости  $\{\text{Im } z > 0\}$  с нулями  $a_\mu$  и полюсами  $b_\nu$ ,  $a, q \geq 0$  – целое число. При любом  $s > 0$  справедливо представление

$$f(z) = \alpha_{s,q}(z) \cdot \omega_{s,q}(z), \quad (1)$$

$$\text{где } \alpha_{s,q}(z) = \prod_{\left|a_\mu - \frac{s}{2}\right| < \frac{s}{2}} E\left(\frac{z}{a_\mu}, q\right) \left\{ \prod_{\left|b_\nu - \frac{s}{2}\right| < \frac{s}{2}} E\left(\frac{z}{b_\nu}, q\right) \right\}^{-1}, \quad (2)$$

а  $\ln \omega_{s,q}(z)$  (ветвь логарифма выбирается так, чтобы  $\ln \omega_{s,q}(s/2) = 0$ ) допускает оценку

$$\left| \ln \omega_{s,q}(z) \right| \leq K_1 (r/s)^{q+1} \cdot s \cdot T(ks, f) + K_2 q (r^q + 1), \quad (3)$$

$|z| = r \sin t e^{i\tau}$ ,  $s/4 \leq r \leq s/2$ , где  $K_1$  и  $K_2$ ,  $0 < K_1, K_2 < \infty$ , – постоянные, не зависящие от  $\tau$  и  $s$ .

Для доказательства основных результатов нам потребуется

**Теорема А.** [3] Пусть  $f(z)$  – функция, мероморфная в круге  $\{|z| \leq R\}$ . Справедлива следующая формула

$$\begin{aligned} \frac{d^p}{dz^p} \ln f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \left( \frac{Re^{i\theta}}{z} \right) \right| \frac{p! 2 Re^{i\theta}}{\left( Re^{i\theta} - z \right)^{p+1}} d\theta + (p-1)! \times \\ &\times \sum_{|a_m| < R} \left( \frac{\bar{a}_m^p}{\left( R^2 - \bar{a}_m z \right)^p} - \frac{(-1)^p}{(z - a_m)^p} \right) - (p-1)! \sum_{|b_n| < R} \left( \frac{\bar{b}_n^p}{\left( R^2 - \bar{b}_n z \right)^p} - \frac{(-1)^p}{(z - b_n)^p} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

**2. Доказательство теоремы 1.** Применим формулу (4) к функции  $f(z + (is/2))$  в круге  $|z| < s/2$  и положим  $z + (is/2) = \zeta$ . Имеем

$$\begin{aligned} \{\ln f(z)\}^{(q+1)} &= (-1)^q \cdot q! \times \sum_{\left|a_\mu - \frac{is}{2}\right| < \frac{s}{2}} \frac{1}{\left(\zeta - a_\mu\right)^{q+1}} - (-1)^q \cdot q! \times \\ &\times \sum_{\left|b_\nu - \frac{is}{2}\right| < \frac{s}{2}} \frac{1}{\left(\zeta - b_\nu\right)^{q+1}} + I_{\frac{s}{2}, q}(\zeta) + J_{\frac{s}{2}, q}(\zeta), \quad \left| \zeta - \frac{is}{2} \right| < \frac{s}{2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где 
$$I_{\frac{s}{2},q}(\zeta) = \frac{(q+1)!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| f\left(\frac{s}{2}e^{i\theta} + \frac{is}{2}\right) \right| \frac{se^{i\theta}}{\left(\frac{s}{2}e^{i\theta} - \zeta + \frac{is}{2}\right)^{q+2}} d\theta;$$

$$J_{\frac{s}{2},q}(\zeta) = (q)! \sum_{\left|a_\mu - \frac{is}{2}\right| < \frac{s}{2}} \left( \frac{a_\mu - \frac{is}{2}}{\frac{s^2}{4} - \left(\zeta - \frac{is}{2}\right) \cdot \left(a_\mu - \frac{is}{2}\right)} \right)^{q+1} -$$

$$- (q)! \cdot (-1)^q \sum_{\left|b_\nu - \frac{is}{2}\right| < \frac{s}{2}} \left( \frac{b_\nu - \frac{is}{2}}{\frac{s^2}{4} - \left(\zeta - \frac{is}{2}\right) \cdot \left(b_\nu - \frac{is}{2}\right)} \right)^{q+1}.$$

Далее будем полагать:  $\zeta = r \cdot \sin \tau \cdot e^{i\tau}$ ;  $\kappa(r) \leq \tau \leq \pi - \kappa(r)$ ;  $\kappa(r) = \arcsin 1/r$ , а  $K$  – положительные постоянные, не зависящие от  $R$  и  $g$ .

Путем непосредственного подсчета имеем

$$\left\{ \ln \alpha_{\frac{s}{2},q}(\zeta) \right\}^{(q+1)} = (-1)^q \cdot q! \cdot \sum_{\left|a_\mu - \frac{is}{2}\right| < \frac{s}{2}} \frac{1}{\left(\zeta - a_\mu\right)^{q+1}} - (-1)^q \cdot q! \cdot \sum_{\left|b_\nu - \frac{is}{2}\right| < \frac{s}{2}} \frac{1}{\left(\zeta - b_\nu\right)^{q+1}}. \quad (6)$$

Вычитая (6) из (5), получаем 
$$\left\{ \ln \varpi_{\frac{s}{2},q}(\zeta) \right\}^{(q+1)} = I_{\frac{s}{2},q}(\zeta) + J_{\frac{s}{2},q}(\zeta).$$

Оценим  $I_{\frac{s}{2},q}(\zeta)$  и  $J_{\frac{s}{2},q}(\zeta)$  при  $\left|\zeta - \frac{is}{2}\right| \leq \frac{s}{4}$ .

Для оценки интеграла  $I_{s/2,q}(\zeta)$  выбираем промежуток интегрирования  $[-\pi/2, 3\pi/2]$ , делаем замену переменных  $\theta = 2\tau - \pi/2$ , полагая  $\zeta = r \cdot \sin \tau \cdot e^{i\tau}$ ,  $\kappa(r) \leq \tau \leq \pi - \kappa(r)$ ,  $\kappa(r) = \arcsin 1/r$ , получаем

$$\left| I_{\frac{s}{2},q}(\zeta) \right| = \frac{(q+1)!}{\pi} \int_0^\pi \ln \left| f(s \sin \tau e^{i\tau}) \right| \left| \frac{se^{i\left(2\tau - \frac{\pi}{2}\right)}}{se^{i\left(2\tau - \frac{\pi}{2}\right)} / 2 - \left(\zeta - is/2\right)^{q+2}} \right| d\tau \leq$$

$$\leq \frac{(q+1)!}{\pi} \frac{s}{(s/2 - s/4)^{q+2}} \int_{\kappa(s)}^{\pi - \kappa(s)} \left| \ln \left| f(s \sin \tau e^{i\tau}) \right| \right| \frac{s \cdot \sin^2 \tau}{s \cdot \sin^2 \tau} d\tau + \left[ \int_0^{\kappa(s)} + \int_{\pi - \kappa(s)}^{\pi} \right] \times$$

$$\times \left[ \ln \left| f(se^{i\tau} \sin \tau) \right| \right] d\tau \leq \frac{(q+1)! \cdot 4^{q+2}}{s^q} \cdot T(s, f);$$

$$\left| J_{s,q}(\xi) \right| \leq q! \left\{ \frac{s/2}{s^2/4 - s/8} \right\}^{q+1} \cdot \left\{ n(s, f) + n\left(s, \frac{1}{f}\right) \right\} \leq q! \frac{4^{q+1}}{s^q} T(ks, f),$$

т.к. для  $k > 1$   $n(s, f) \leq s \cdot N(ks, f) \leq s \cdot T(ks, f)$ .

Таким образом, при  $|\xi - is/2| \leq s/4$

$$\left| \left\{ \ln \varpi_{s,q}(\zeta) \right\}^{q+1} \right| \leq \left( (q+1)! \cdot 4^{q+2} / s^q \right) \cdot T(ks, f). \quad (7)$$

Далее нам понадобится соотношение

$$\ln \varpi_{s,q}(\zeta) = \frac{1}{q!} \int_{is/2}^{\zeta} (\zeta - \eta)^q \left\{ \ln \varpi_{s,q}(\eta) \right\}^{q+1} d\eta + \sum_{k=0}^q \frac{(\zeta - is/2)^k}{k!} \left[ \left\{ \ln \varpi_{s,q}(\eta) \right\}^{(k)} \right]_{\eta=is/2} \quad (8)$$

в круге  $|\xi - is/2| \leq s/2$ .

Производные порядка  $q+1$  правой и левой части совпадают тождественно, а производные порядка  $n = 0, 1, \dots, q$  совпадают в точке  $\eta = is/2$ .

Из (7) и (8) получаем оценку

$$\left| \ln \varpi_{s,q}(\zeta) \right| = (q+1) \cdot \frac{4^{q+2}}{s^q} |\zeta - is/2|^{q+1} T(ks, f) + \sum_{k=0}^q \left| \frac{(\zeta - is/2)^k}{k!} \left\{ \ln \varpi_{s,q}(\eta) \right\}^{(k)} \right|_{\eta=is/2}.$$

При  $s/8 \leq r < s/4$  и  $|\zeta - is/2| \leq s/2$  получаем

$$\left| \ln \varpi_{s,q}(\zeta) \right| = (q+1) \cdot \left( 4^{q+2} / s^q \right) \cdot 2^{q+1} \cdot r^{q+1} \cdot T(ks, f) + K_2 \cdot q \cdot (r^q + 1).$$

**Выводы.** Представление мероморфной функции (1) позволяет получать различные соотношения, связывающие асимптотическое поведение мероморфной функции с распределением ее нулей и полюсов, что является крайне важным для приложений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Марченко И.И., Николенко И.Г. О величинах отклонений мероморфных функций в круге // *Доповіди. НАН України.* – 2002. – № 2. – С. 25 – 28.
2. Львова С.В. О величинах отклонения мероморфных функций и целых кривых над полуплоскостью // *Теория операторов в функциональных про-*

- странствах и ее приложения.* – К.: Наук. думка, 1981. – С. 67 – 81.
3. Гольдберг А.А., Островский И.В. *Распределение значений мероморфных функций.* – М.: Наука, 1970. – 591 с.

Поступила 19.02.2004

**ЛБВОВА Светлана Владимировна**, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ИВЦ ХВУ. Окончила мехмат ХГУ. Область научных интересов – современный анализ, теория функций комплексного переменного.

---