УДК 617.535.4

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ НАД ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ

к.ф.-м.н. С.В. Львова
(представил д.ф-м.н. Г.М. Фельдман)

Для функций, мероморфных в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z > 0\}$, получено представление в виде произведения по ее нулям и полюсам и некоторого остаточного члена. Данное представление позволяет получать различные соотношения, связывающие асимптотическое поведение функции с распределением ее нулей и полюсов.

Постановка проблемы. Теория распределения значений целых и мероморфных функций занимает одно из ведущих мест в общей теории аналитических функций. Применение мероморфных функций в других областях математики (топологии, дифференциальной геометрии, теории меры, теории потенциала и др.), а также в ее приложениях к практическим задачам определяют *актуальность тематики*.

Анализ литературы. Анализ литературы показывает, что теория целых и мероморфных функций, заданных в конечной плоскости, приобрела в настоящее время, в известной мере, законченный вид. Если же речь идет о мероморфных функциях, заданных в произвольных областях [1, 2], в частности, заданных над полуплоскостью, либо в единичном круге, то их поведение даже в классических задачах слабо изучено.

Цель работы. В данной работе получено представление для мероморфных функций, заданных над полуплоскостью, позволяющее получить различные оценки роста и оценить асимптотическое поведение функции. Кроме того, в данной работе используются характеристики Цудзи, что позволяет изучить асимптотическое поведение мероморфной функции под нестандартным углом зрения.

1. Формулировка теорем. Пусть f(x) – функция, мероморфная в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ и не равная тождественной постоянной, $\widehat{n}(r,f)$, $r \ge 1$ – число ее полюсов, лежащих в области $\{|z - ir/2| \le r/2,\ |z| \ge 1\}$. Положим:

$$\widehat{N}(r,f) = \int_1^r \frac{\widehat{n}(t,f)}{t^2}dt,\quad r > 1\,;\quad \widehat{m}(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_{\kappa(r)}^{\pi-\kappa(r)} \ln^+\left|f(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right|\frac{d\varphi}{r\sin^2\varphi},$$

где $\kappa(r) = \arcsin r^{-1}$. Пусть $\widehat{T}(r,f) = \widehat{m}(r,f) + \widehat{N}(r,f)$. Тогда имеет место

© к.ф.-м.н. С.В. Львова, 2004

следующая теорема.

Теорема 1. Пусть f(z) – функция, мероморфная в полуплоскости {Im z > 0} с нулями a_μ и полюсами b_ν, а $q \ge 0$ – целое число. При любом $s > 0$ справедливо представление

$$f(z) = \alpha_{s,q}(z) \cdot \omega_{s,q}(z), \tag{1}$$

где
$$\alpha_{s,q}(z) = \prod_{\left|a_\mu - \frac{s}{2}\right| < \frac{s}{2}} E\left(\frac{z}{a_\mu}, q\right) \left\{ \prod_{\left|b_\nu - \frac{s}{2}\right| < \frac{s}{2}} E\left(\frac{z}{b_\nu}, q\right) \right\}^{-1}, \tag{2}$$

а $\ln\omega_{s,q}(z)$ (ветвь логарифма выбирается так, чтобы $\ln\varpi_{s,q}(s/2)=0$) допускает оценку

$$\left|\ln\varpi_{s,q}(z)\right| \le K_1 (r/s)^{q+1} \cdot s \cdot T(ks, f) + K_2 q(r^q + 1), \tag{3}$$

$|z| = r\sin\tau e^{i\tau}$, $s/4 \le r \le s/2$, где K_1 и K_2, $0 < K_1, K_2 < \infty$, – постоянные, не зависящие от r и s.

Для доказательства основных результатов нам потребуется

Теорема А. [3] Пусть f(z) – функция, мероморфная в круге $\{|z| \le R\}$. Справедлива следующая формула

$$\begin{aligned} \frac{d^p}{dz^p} \ln f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln\left|\left(Re^{i\theta}\right)\right| \frac{p!\, 2Re^{i\theta}}{\left(Re^{i\theta} - z\right)^{p+1}} d\theta + (p-1)! \times \\ &\times \sum_{|a_m| < R} \left(\frac{\bar{a}_m^p}{\left(R^2 - \bar{a}_m z\right)^p} - \frac{(-1)^p}{(z - a_m)^p} \right) - (p-1)! \sum_{|b_n| < R} \left(\frac{\bar{b}_n^p}{\left(R^2 - \bar{b}_n z\right)^p} - \frac{(-1)^p}{(z - b_n)^p} \right). \end{aligned} \tag{4}$$

2. Доказательство теоремы 1. Применим формулу (4) к функции $f(z + (is/2))$ в круге $|z| < s/2$ и положим $z + (is/2) = \varsigma$. Имеем

$$\begin{aligned} \{\ln f(z)\}^{(q+1)} &= (-1)^q \cdot q! \times \sum_{\left|a_\mu - \frac{is}{2}\right| < \frac{s}{2}} \frac{1}{\left(\varsigma - a_\mu\right)^{q+1}} - (-1)^q \cdot q! \times \\ &\times \sum_{\left|b_\nu - \frac{is}{2}\right| < \frac{s}{2}} \frac{1}{\left(\varsigma - b_\nu\right)^{q+1}} + I_{\frac{s}{2},q}(\varsigma) + J_{\frac{s}{2},q}(\varsigma), \quad \left|\varsigma - \frac{is}{2}\right| < \frac{s}{2}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $$I_{\frac{s}{2},q}(\varsigma)=\frac{(q+1)!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|f\left(\frac{s}{2}e^{i\theta}+\frac{is}{2}\right)\right|\frac{se^{i\theta}}{\left(\frac{s}{2}e^{i\theta}-\varsigma+\frac{is}{2}\right)^{q+2}}d\theta\,;$$

$$J_{\frac{s}{2},q}(\varsigma)=(q)!\sum_{\left|a_\mu-\frac{is}{2}\right|<\frac{s}{2}}\left(\frac{\overline{a_\mu-\frac{is}{2}}}{\frac{s}{4}^2-\left(\varsigma-\frac{is}{2}\right)\cdot\overline{\left(a_\mu-\frac{is}{2}\right)}}\right)^{q+1}-$$

$$-(q)!\cdot(-1)^q\sum_{\left|b_\nu-\frac{is}{2}\right|<\frac{s}{2}}\left(\frac{\overline{b_\nu-\frac{is}{2}}}{\frac{s}{4}^2-\left(\varsigma-\frac{is}{2}\right)\cdot\overline{\left(b_\nu-\frac{is}{2}\right)}}\right)^{q+1}.$$

Далее будем полагать: $\varsigma=r\cdot\sin\tau\cdot e^{i\tau}$; $\kappa(r)\le\tau\le\pi-\kappa(r)$; $\kappa(r)=\arcsin 1/r$, а K – положительные постоянные, не зависящие от R и r.

Путем непосредственного подсчета имеем

$$\left\{\ln\alpha_{\frac{s}{2},q}(\varsigma)\right\}^{(q+1)}=(-1)^q\cdot q!\cdot\sum_{\left|a_\mu-\frac{is}{2}\right|<\frac{s}{2}}\frac{1}{(\varsigma-a_\mu)^{q+1}}-(-1)^q\cdot q!\cdot\sum_{\left|b_\nu-\frac{is}{2}\right|<\frac{s}{2}}\frac{1}{(\varsigma-b_\nu)^{q+1}}.\quad(6)$$

Вычитая (6) из (5), получаем $\left\{\ln\varpi_{\frac{s}{2},q}(\varsigma)\right\}^{q+1}=I_{\frac{s}{2},q}(\varsigma)+J_{\frac{s}{2},q}(\varsigma)$.

Оценим $I_{\frac{s}{2},q}(\varsigma)$ и $J_{\frac{s}{2},q}(\varsigma)$ при $\left|\varsigma-\frac{is}{2}\right|\le\frac{s}{4}$.

Для оценки интеграла $I_{s/2,q}(\varsigma)$ выбираем промежуток интегрирования $[-\pi/2,3\pi/2]$, делаем замену переменных $\theta=2\tau-\pi/2$, полагая $\varsigma=r\cdot\sin\tau\cdot e^{i\tau}$, $\kappa(r)\le\tau\le\pi-\kappa(r)$, $\kappa(r)=\arcsin 1/r$, получаем

$$\left|I_{\frac{s}{2},q}(\varsigma)\right|=\frac{(q+1)!}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\ln\left|f(s\sin\tau e^{i\tau})\right|\right|\left|\frac{se^{i\left(2\tau-\frac{\pi}{2}\right)}}{se^{i\left(2\tau-\frac{\pi}{2}\right)}/2-(\varsigma-is/2)^{q+2}}\right|d\tau\le$$

$$\le \frac{(q+1)!}{\pi}\frac{s}{(s/2-s/4)^{q+2}}\int\limits_{\kappa(s)}^{\pi-\kappa(s)}\left|\ln\left|f(s\sin\tau e^{i\tau})\right|\right|\frac{s\cdot\sin^2\tau}{s\cdot\sin^2\tau}d\tau+\left[\int\limits_0^{\kappa(s)}+\int\limits_{\pi-\kappa(s)}^{\pi}\right]\times$$

$$\times\left[\ln\left|f(se^{i\tau}\sin\tau)\right|\right]d\tau\le\frac{(q+1)!\cdot 4^{q+2}}{s^q}\cdot T(s,f);$$

$$\left|J_{s,q}(\xi)\right|\le q!\left\{\frac{s/2}{s^2/4-s/8}\right\}^{q+1}\cdot\left\{n(s,f)+n\left(s,\frac{1}{f}\right)\right\}\le q!\frac{4^{q+1}}{s^q}T(ks,f),$$

т.к. для $k>1\quad n(s,f)\le s\cdot N(ks,f)\le s\cdot T(ks,f)$.

Таким образом, при $\left|\xi-is/2\right|\le s/4$

$$\left|\left\{\ln\varpi_{s,q}(\varsigma)\right\}^{q+1}\right|\le\left((q+1)!\cdot 4^{q+2}/s^q\right)\cdot T(ks,f). \qquad (7)$$

Далее нам понадобится соотношение

$$\ln\varpi_{s,q}(\zeta)=\frac{1}{q!}\int\limits_{is/2}^{\zeta}(\zeta-\eta)^q\left\{\ln\varpi_{s,q}(\eta)\right\}^{q+1}d\eta+\sum_{k=0}^{q}\frac{(\zeta-is/2)^k}{k!}\left[\left\{\ln\varpi_{s,q}(\eta)\right\}^{(k)}\right]_{\eta=is/2} \qquad (8)$$

в круге $\left|\xi-is/2\right|\le s/2$.

Производные порядка $q+1$ правой и левой части совпадают тождественно, а производные порядка $n=0,\ 1,\ \ldots,\ q$ совпадают в точке $\eta=is/2$.

Из (7) и (8) получаем оценку

$$\left|\ln\varpi_{s,q}(\zeta)\right|=(q+1)\cdot\frac{4^{q+2}}{s^q}\left|\zeta-is/2\right|^{q+1}T(ks,f)+\sum_{k=0}^{q}\left|\frac{(\zeta-is/2)^k}{k!}\left\{\ln\varpi_{s,q}(\eta)\right\}^{(k)}\right|_{\eta=is/2}.$$

При $s/8\le r<s/4$ и $\left|\zeta-is/2\right|\le s/2$ получаем

$$\left|\ln\varpi_{s,q}(\zeta)\right|=(q+1)\cdot\left(4^{q+2}/s^q\right)\cdot 2^{q+1}\cdot r^{q+1}\cdot T(ks,f)+K_2\cdot q\cdot(r^q+1).$$

Выводы. Представление мероморфной функции (1) позволяет получать различные соотношения, связывающие асимптотическое поведение мероморфной функции с распределением ее нулей и полюсов, что является крайне важным для приложений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Марченко И.И., Николенко И.Г. О величинах отклонений мероморфных функций в круге // Доповіді. НАН України. – 2002. – № 2. – С. 25 – 28.*
2. *Львова С.В. О величинах отклонения мероморфных функций и целых кривых над полуплоскостью // Теория операторов в функциональных про-*

странствах и ее приложения. – К.: Наук. думка, 1981. – С. 67 – 81.

3. *Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 591 с.*

Поступила 19.02.2004

***ЛЬВОВА Светлана Владимировна**, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ИВЦ ХВУ. Окончила мехмат ХГУ. Область научных интересов – современный анализ, теория функций комплексного переменного.*