УДК 389.01.621

МЕТОД АПРОКСИМАЦІЇ ДВОВИМІРНИХ РОЗПОДІЛІВ ЙМОВІРНОСТЕЙ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ЕКВІВАЛЕНТНИХ БЕЗПЕРЕРВНИХ РОЗПОДІЛІВ ДЖОНСОНА

к.т.н. В.В. Хижняк
(подав д.т.н., проф. В.П. Деденок)

Пропонується метод апроксимації двовимірних законів розподілу щільності ймовірності функціональними рядами на основі поліномів Ерміта з базовими двовимірними кривими Джонсона для оцінки кореляційної функції випадкового процесу на виході нелінійного перетворювача.

Вступ. При аналізі ймовірнісних моделей аналогових перетворювачів інформаційно-вимірювальних систем (ІВС) однією з головних проблем є апроксимація і оцінка двовимірних законів розподілу щільності ймовірності за відомими одновимірними законами і кореляційними функціями. Без вирішення цієї задачі неможливо здійснити ймовірнісне моделювання типових функціональних перетворювачів ІВС. У загальному випадку необхідне рішення двох задач [1]:

1) оцінка $f_x(x_1, x_2, \tau)$ за відомими $f_x(x)$ і $K_x(\tau)$;

2) оцінка $f_{x_1 x_2}(x_1, x_2, \tau)$ за відомими $f_{x_1}(x_1)$, $f_{x_2}(x_2)$ і $K_{x_1 x_2}(\tau)$,

де $f_x(x)$ – одновимірний закон розподілу значень випадкового процесу x; $K_x(\tau)$ – його кореляційна функція.

Очевидно, що друга задача є більш загальною і включає першу як часткову.

На практиці існує лише декілька стандартних розподілів, для яких можливий точний аналітичний опис двовимірних законів розподілу, наприклад, Гауса, Стьюдента [2]. Найбільш розповсюджений нормальний двовимірний розподіл, при якому щільність ймовірності описується у вигляді

$$f_{x_1x_2}(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{2\pi\sqrt{D_{x_1}D_{x_2}\left[1-k^2_{x_1x_2}(\tau)\right]}} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{1}{2\sqrt{1-k^2_{x_1x_2}(\tau)}} \cdot \left[\frac{(x_1-m_{x_1})^2}{D_{x_1}} - \frac{2k_{x_1x_2}(\tau)(x_1-m_{x_1})(x_2-m_{x_2})}{\sqrt{D_{x_1}D_{x_2}}} + \frac{(x_2-m_{x_2})^2}{D_{x_2}}\right]\right\}.$$

Поставлена задача може бути вирішена шляхом апроксимації багатовимірних розподілів сімейства кривих Джонсона, основу яких складають одновимірні криві [3]:

1) S_L -розподіл

$$f_x(x) = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi}(x-\varepsilon)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\eta^2\left[\frac{\gamma}{\eta} + \ln(x-\varepsilon)\right]^2\right\} -$$

логарифмічний нормальний розподіл з параметрами $\eta = 1/\sigma_x$, $\gamma = -m_x/\sigma_x$;

2) S_B -розподіл

$$f_x(x) = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\lambda}{(x-\varepsilon)(\lambda - x + \varepsilon)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\gamma + \eta \ln\left(\frac{x-\varepsilon}{\lambda - x + \varepsilon}\right)\right]^2\right\},$$

де $\varepsilon < x \le \varepsilon + \lambda$; $\eta > 0$; $-\infty < \gamma < \infty$; $\lambda > 0$; $-\infty < \varepsilon < \infty$;

3) S_V -розподіл

$$f_x(x) = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi\left[(x-\varepsilon)^2 + \lambda^2\right]}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\gamma + \eta \ln\left(\frac{x-\varepsilon}{\lambda}\right)\right]^2\right\},$$

де $-\infty < x < \infty$; $\eta > 0$; $-\infty < \gamma < \infty$; $\lambda > 0$; $-\infty < \varepsilon < \infty$.

Тоді криві Джонсона можуть бути описані функцією вигляду

$$f_{xD}(x) = \frac{1}{\alpha(x)} \exp\left[-\frac{\beta^2(x)}{2}\right],$$

де $\alpha(x)$, $\beta(x)$ визначаються залежно від вибраного типу S_L , S_B чи S_V розподілів Джонсона.

Мета статті. Розробка методу апроксимації двовимірних законів розподілу щільності ймовірності функціональними рядами на основі поліномів Ерміта з базовими двовимірними кривими Джонсона для оцінки кореляційної функції випадкового процесу на виході нелінійного перетворювача.

Метод апроксимації. Для двовимірних розподілів можна запропонувати таку форму опису кривих Джонсона [2]

$$f_{x_1x_2D}(x_1,x_2,\tau)=\frac{1}{\sqrt{1-R^2}\,\alpha_1(x_1)\alpha_2(x_2)}\exp\left\{-\frac{\beta_1^2(x_1)+\beta_2^2(x_2)-2R\,\beta_1(x_1)\beta_2(x_2)}{2(1-R^2)}\right\},$$

де $\alpha_1(x_1)$, $\beta_1(x_1)$ – функції, що відповідають Джонсоновській апроксимації $f_{x_1}(x_1)$, а $\alpha_2(x_2)$, $\beta_2(x_2)$ – $f_{x_2}(x_2)$ відповідно.

Проведемо оцінку похибки апроксимації за допомогою розподілів Джонсона. Більшість із відомих законів розподілів щільності ймовірності, що зустрічаються на практиці, які унімодальні і досить швидко приближаються до нуля при збільшенні абсолютного значення аргументу, можуть бути подані у вигляді ряду

$$f_x(x)=f_{xD}(x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{b_n}{[\alpha(x)]^n}\cdot H_n\left[\frac{\beta(x)}{\sqrt{2}}\right], \qquad (1)$$

де $f_{xD}(x)$ – апроксимуючий розподіл Джонсона; $H_n(x)$ – одновимірні поліноми Ерміта

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}\right) \qquad H_0=1,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \dots .$$

Від відомих розподілів [4, 5] цей ряд відрізняється тим, що в його основі лежить базова одновимірна апроксимація Джонсона, яка значно розширює різноманіття апроксимуючих кривих в порівнянні, наприклад, з нормальним законом.

Так як поліноми Ерміта ортогональні з вагою $\exp\left(-x^2/2\right)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_n(x)\,H_m(x)e^{-x^2/2}dx=n!\,\sqrt{2\pi}\cdot S_{mn}=\begin{cases}n!\sqrt{2\pi}, & m=n;\\ 0, & m\neq n.\end{cases}$$

Звідси випливає, що коефіцієнти b_n, які називаються квазімоментами [4, 5], визначаються формулою

$$b_n=\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[d(x)]^{n+1}\cdot f_x(x)\cdot H_n\left[\frac{\beta(x)}{\sqrt{2}}\right]\exp\left[-\frac{\beta^2(x)}{4}\right]dx .$$

Розкладання функції $f_x(x)$ в ряд за ортогональними поліномами Ерміта базується на теоремі Вейєрштраса [6]. Довільна функція $f_x(x)$ з інтегрованим квадратом може бути у будь-якому випадку точно в середньоквадратичному смислі подана рядом вигляду (3), тобто

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{f_x(x)-f_{xD}(x)\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}\frac{b_n}{[\alpha(x)]^n}\cdot H_n\left[\frac{\beta(x)}{\sqrt{2}}\right]\right\}^2dx=0 .$$

Двовимірні розподіли можуть бути подані рядом

$$f_{x_1x_2}(x_1,x_2,\tau)=f_{x_1x_2D}(x_1,x_2,\tau)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{b_n}{\left[\sqrt{1-R^2}\,\alpha_1(x_1)\alpha_2(x_2)\right]^n}H_n\left[\frac{\beta_1(x_1)}{\sqrt{2\left(1-R^2\right)}}\right]\times \tag{2}$$

$$\times H_n\left[\beta_2(x_2)\Big/\sqrt{2\left(1-R^2\right)}\right]\cdot H_n\left[\sqrt{R\,\beta_1(x_1)\beta_2(x_2)\Big/\left(1-R^2\right)}\right],$$

де коефіцієнти b_n визначаються як

$$b_n=(2x)^{3/2}\left(1-R^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\alpha_1(x_1)\,\alpha_2(x_2)\sqrt{1-R^2}\right]^{n+1}\cdot f_{x_1x_2}(x_1,x_2,\tau)\times$$

$$\times H_n\left[\frac{\beta_1(x_1)}{\sqrt{2\left(1-R^2\right)}}\right]\cdot H_n\left[\frac{\beta_2(x_2)}{\sqrt{2\left(1-R^2\right)}}\right]\cdot H_n\left[\sqrt{\frac{2R\,\beta_1(x_1)\beta_2(x_2)}{2\left(1-R^2\right)}}\right]\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{\beta_1^2(x_1)+\beta_2^2(x_2)-2R\,\beta_1(x_1)\beta_2(x_2)}{4\left(1-R^2\right)}\right\}dx_1dx_2\,.$$

Оцінюючи правильність отриманих співвідношень для граничних випадків, можна відмітити, що при некорельованих процесах (R = 0) x_1 і x_2 залежність (2) розпадається на добуток незалежних апроксимацій $f_{x_1}(x_1)$ і $f_{x_2}(x_2)$, а у випадку залежності $x_1=W(x_2)$, тобто R = 1, вироджується в σ-функцію $f_{x_1x_2}(x_1,x_2)=\sigma[x_1-W(x_2)]$.

Таким чином похибки апроксимації одновимірних і двовимірних щільностей ймовірностей розподілами Джонсона можуть бути оцінені як залишкові члени рядів (1) і (2) при $n\geq 1$:

$$\Delta f_x(x)=f_{xD}(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{b_n}{[\alpha(x)]^n}\cdot H_n\left[\frac{\beta(x)}{\sqrt{2}}\right];$$

$$f_{x_1x_2}(x_1,x_2,\tau)=f_{x_1x_2D}(x_1,x_2,\tau)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{b_n}{\left[\sqrt{1-R^2}\,\alpha_1(x_1)\,\alpha_2(x_2)\right]^n}\times$$

$$\times H_n\left[\frac{\beta_1(x_1)}{\sqrt{2\left(1-R^2\right)}}\right]\cdot H_n\left[\frac{\beta_2(x_2)}{\sqrt{2\left(1-R^2\right)}}\right]\cdot H_n\left[\sqrt{\frac{R\,\beta_1(x_1)\beta_2(x_2)}{\left(1-R^2\right)}}\right].$$

Послідовність апроксимації. Апроксимація $f_{x_1x_2}(x_1,x_2,\tau)$ здійснюється в такому порядку (при машинному моделюванні двовимірні розподіли подаються у вигляді тривимірних масивів):

1) апроксимація $f_{x_1}(x_1)$ сімейством кривих Джонсона і оцінка параметрів розподілу;

2) апроксимація $f_{x_2}(x_2)$ сімейством кривих Джонсона і оцінка параметрів розподілу;

3) оцінка коефіцієнта R;

4) визначення інтервалів табуляції $f_{x_1x_2}(x_1, x_2, \tau)$ і оцінка масиву $f_{x_1x_2}(x_{1i}, x_{2j}, \tau_k)$ для $(i = 1...m,\ j = 1...n,\ k = 1...l)$.

Апроксимація $f_x(x)$ проводиться відповідно з алгоритмом, схема якого наведена на рис. 1.

Тестування розробленої методики апроксимації шляхом порівняння з точними результатами для нормальних законів і на основі опосередкованого методу, що заключається в інтегруванні $f_{x_1x_2}(x_1, x_2, \tau)$ і оцінці $f_{x_1}(x_1)$, $f_{x_2}(x_2)$, $K_{x_1x_2}(\tau)$ для низки інших розподілів (рівномірного, Релея, Максвела тощо) дало змогу отримати похибку, яка не перевищує 5% (при $m, n \geq 100$, $l \geq 10$). Порівняння результатів апроксимації двовимірних розподілів за допомогою кривих Джонсона за даною методикою з точними результатами, які отримані при аналітичному описі двовимірних законів для деяких спеціальних розподілів, наприклад, Стьюдента, також дає похибку в межах 5% (табл. 1).

Таблиця 1

Дослідження похибок апроксимації двовимірних законів розподілу ймовірностей

а) відносне середнє квадратичне відхилення (СКВ) похибки відновлення одновимірного закону розподілу шляхом чисельного інтегрування двовимірного закону, що отримано з використанням Джонсоновських апроксимацій

Закон розподілу	Коефіцієнт кореляції	СКВ похибки (%)
нормальний $(m_x = \sigma_x = 1)$	0,1 0,5 0,9	2,1 3,5 4,5
Релея $(m_x = 1)$	0,1 0,5 0,9	3,4 3,5 4,7
рівномірний $(m_x = \sigma_x = 1)$	0,1 0,5 0,9	3,3 4,2 4,3

б) порівняння з точними аналітичними результатами

Закон розподілу	Коефіцієнт кореляції	СКВ похибки (%)
нормальний $(m_x = \sigma_x = 1)$	0,1 0,5 0,9	3,6 4,1 4,4
Стьюдента $(m_x = \sigma_x = 1)$	0,1 0,5 0,9	3,9 4,7 5,4

в) відносне СКВ похибки Джонсоновської апроксимації двовимірних розподілів, оцінено шляхом порівняння з результатами статистичного моделювання (умови експерименту ідентичні)

Закон розподілу	Коефіцієнт кореляції	СКВ похибки (%)	
		аналітична оцінка	статистичне моделювання
нормальний $(m_x = \sigma_x = 1)$	0,1 0,5 0,9	2,7 2,8 3,6	2,5 2,8 4,0
Релея $(m_x = 1)$	0,1 0,5 0,9	2,6 3,1 3,3	3,0 3,1 3,7
рівномірний $(m_x = \sigma_x = 1)$	0,1 0,5 0,9	2,8 3,4 3,5	2,6 3,2 5,0

Висновки. Таким чином, запропонований метод апроксимації двовимірних розподілів ймовірностей дискретних випадкових процесів за допомогою еквівалентних безперервних розподілів Джонсона дозволяє провести оцінку кореляційної функції випадкового процесу на виході нелінійного перетворювача. Тестування відповідної методики показало, що похибка апроксимації не перевищує 5%.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Хижняк В.В. Критерії та показники ефективності аналітичних імовірнісних інформаційно-вимірювальних систем // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ. – 2002. – Вип. № 5(43). – С. 500 – 508.*
2. *Кэнделл М.Дж., Стюарт А. Теория распределений. – М.: Наука, 1968. – 900 с.*
3. *Хан Г., Шапиро С. Статистические методы в инженерных задачах. – М.: Наука, 1986. – 412 с.*
4. *Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 830 с.*
5. *Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.*
6. *Корн Г., Корн М. Справочник по математике для научных работников и*

инженеров. – М.: Наука, 1970. – 720 с.

Надійшла 12.02.2004

***ХИЖНЯК Володимир Віталійович**, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, начальник воєнно-наукового управління – заступник начальника Головного управління оборонного планування і науки Генерального штабу Збройних Сил України. Область наукових інтересів – підвищення ефективності функціонування систем метрологічного забезпечення, аналіз та моделювання складних систем.*