

ЦИФРОВЫЕ ФОРМИРОВАТЕЛИ ЛИНЕЙНО-ЧАСТОТНО МОДУЛИРОВАННЫХ ФРАКТАЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

к.т.н. П.Ф. Буданов, к.ф.-м.н. С.Е. Кальной, к.т.н. Р.Э. Пащенко

Рассматриваются возможности цифрового формирования фрактальных сигналов с использованием ЛЧМ колебаний. Методом численного моделирования проводится анализ спектральных характеристик полученных цифровых ЛЧМ фрактальных сигналов.

Постановка проблемы и анализ литературы. В настоящее время фрактальные модели сигналов строятся, как правило, на основе различных математических алгоритмов с использованием компьютерной графики, что позволяет говорить о новых подходах к исследованию генерации и формирования высокочастотных колебаний, базирующихся на компьютерных экспериментах, значительно отличающихся от традиционных методов анализа и синтеза динамических систем [1].

Интегральное построение динамических хаотических систем предопределило, в частности, повышенный интерес к полностью реализуемым на интегральных микросхемах (за исключением выходного фильтра) цифровым устройствам формирования хаотических, в том числе и фрактальных сигналов.

В основе понятия фрактала, частным случаем которого является фрактальный сигнал (ФС), лежит гипотеза самоподобия, допускающая бесконечную серию вложения друг в друга одинаковых (гомеоморфных) объектов. При этом объект уменьшается только в размере, но остается гомеоморфным исходному объекту. Это вытекает из общего определения фрактала, введенного Б.Б. Мандельбротом, как структуры, состоящей из частей, которые в каком-то смысле подобны целому [2]. При формировании ФС под такими объектами следует понимать отдельные детерминированные колебания, гомеоморфные исходному (базовому) колебанию.

В [3] рассмотрены подходы к формированию аналоговых фрактальных сигналов на основе линейно-частотно модулированного (ЛЧМ) колебания, приведены результаты численного моделирования таких сигналов и проанализирована размерность фрактального сигнала. Использование цифровых методов формирования ФС позволяет не только изменять параметры формируемых сигналов (девиацию частоты, длительность), но и вводить в сигнал

требуемые предискажения, обеспечивать стабильность параметров сигналов, а также хорошую воспроизводимость при серийном производстве.

Цель статьи. Рассмотреть подходы к формированию цифровых ЛЧМ фрактальных сигналов и провести анализ на основе численного моделирования спектральных характеристик цифровых ЛЧМ фрактальных сигналов.

Подходы к цифровому синтезу фрактальных сигналов. Идеи и методы, лежащие в основе синтеза аналоговых ФС на основе ЛЧМ колебаний, могут быть использованы для получения цифровых ЛЧМ фрактальных сигналов. Математическое выражение фрактального сигнала, полученного на основе ЛЧМ колебания, можно представить в следующем виде [3]:

$$u(t) = \sum_{n=0}^N \frac{U_0}{k^n} \sin \left(f_0 t + k^n \frac{\Delta f}{2\tau} t^2 + \varphi_0 \right), \quad (1)$$

где U_0 – амплитуда нулевого ЛЧМ колебания; $k = 2, 3, 4, \dots$ – масштабный коэффициент, определяющий сжатие компоненты сигнала по амплитуде и растяжение – по скорости изменения девиации частоты; n – номер компоненты хаотического сигнала; N – число составляющих фрактального сигнала; $f_0, \Delta f, \tau, \varphi_0$ – средняя частота, девиация частоты, длительность и начальная фаза сигнала соответственно; t – текущее время.

Цифровой формирователь фрактальных сигналов на основе исходного ЛЧМ колебания может быть построен по многокаскадной схеме, в состав которой входят совокупность цифровых генераторов (ЦГ), программного управляющего устройства, задающего линейные модулирующие функции с требуемыми параметрами, а также сумматора, на выходе которого имеет место фрактальный сигнал.

При реализации отдельных ЦГ могут использоваться два подхода к прямому цифровому синтезу [4]: с фиксированным тактом и фиксированным уровнем отсчетов. В первом случае ЦГ представляет собой устройства, осуществляющие вычисления значений выборок воспроизводимых колебаний u_{p_n} , следующих с равномерным шагом по времени Δt_n , где n – номер исходного и гомеоморфных колебаний (генераторов), $n = \overline{0, 5}$, а p – номер выборки n -го колебания. Генераторы такого типа будем называть генераторами с фиксированным тактом (ГФТ). Во втором случае вычисляются моменты времени t_{p_n} , в которые выборки имеют определенные фиксированные значения $u_{фрn}$, или, иначе, в которые фазовые набег $\varphi(t_{p_n})$ кратны выбранному шагу по фазе $\Delta \varphi_n$ [4]. Генераторы такого типа будем называть генераторами фиксированных выборок (ГФВ). Необходимо отметить, что в этом случае фиксируются не только величины выборок, но и их количество на каждом элементарном периоде исходного и гомеоморфных синтезируемых колебаний.

Исходной операцией в обоих типах цифровых генераторов является их программирование, заключающееся в задании требуемого закона $\varphi_n(t)$. Для ГФТ последующими операциями являются:

- вычисления текущих значений аргументов $\varphi_n(p \cdot \Delta t)$;
- вычисления или чтения из постоянных запоминающих устройств (ПЗУ_n) выборочных значений синусоид $u_{pn} = \sin \varphi_n(p \cdot \Delta t)$, соответствующих текущим значениям аргументов;
- преобразование кодов u_{pn} в аналоговые значения u_{pn} ;
- интерполяция промежуточных значений синтезируемых исходного и гомеоморфных колебаний или переход к непрерывным компонентам фрактального сигнала, что достигается путем применения цифроаналогового преобразователя (ЦАП).

В случае ГФВ процесс синтезирования сводится к выполнению следующих операций:

- вычисление (или чтение из ПЗУ) приращений функции $\varphi_n^{-1}(t)$ обратной $\varphi_n(t) \cdot \Delta t_{kn} = \varphi_n^{-1}(k \cdot \Delta \varphi) - \varphi_n^{-1}[(k-1) \cdot \Delta \varphi]$;
- преобразования кодов Δt_{kn} во временные интервалы Δt_{kn} ;
- переключения в найденные текущие моменты времени $t_{kn} = t_{k-1, n} + \Delta t_{kn}$ фиксированных значений отсчетов $u_{\varphi kn}$;
- переход к непрерывным колебаниям.

При аппаратурной реализации формирователя ФС удобнее задавать закон частотной, а не фазовой модуляции $f_n(t)$, поэтому для перехода к функциям $\varphi_n(t)$ необходимы операции интегрирования, которые осуществляются при помощи цифровых интеграторов (ЦИ). Упрощенные структурные схемы формирователей ФС на основе ГФТ и ГФВ приведены на рис. 1 и 2 соответственно, где жирными стрелками обозначены цепи параллельной передачи многоразрядных кодов.

Как правило, программная часть, с помощью которой задается закон частотной модуляции $f_n(t)$, по объему оборудования превосходит все остальные части формирователя сигнала. В цифровых интеграторах коды $f_n(t)$ преобразуются в коды текущих фаз $\varphi_n(t)$. В случае ГФТ (рис. 1) частоты преобразований равны $f_{Tn} = (\Delta t_n)^{-1}$. Вычисленные значения $\varphi_n(p \cdot \Delta t)$ используются для адресаций ПЗУ_n, разрядности входных слов которых, в общем случае, меньше или равны разрядностям интеграторов. С выходов ПЗУ_n снимаются коды выборочных значений синусоид $u_{pn} = \sin \varphi_n(p \cdot \Delta t_n)$. Далее, с помощью цифроаналоговых преобразователей, осуществляются переходы к аналоговым значениям u_{pn} , а затем после операции их сложения в сумматоре к непрерывному фрактальному сигналу

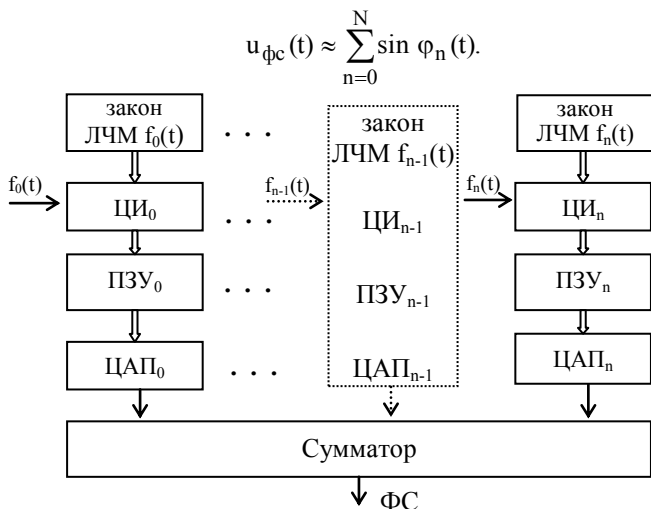


Рис. 1. Упрощенная структурная схема формирователей ФС на основе ГФС

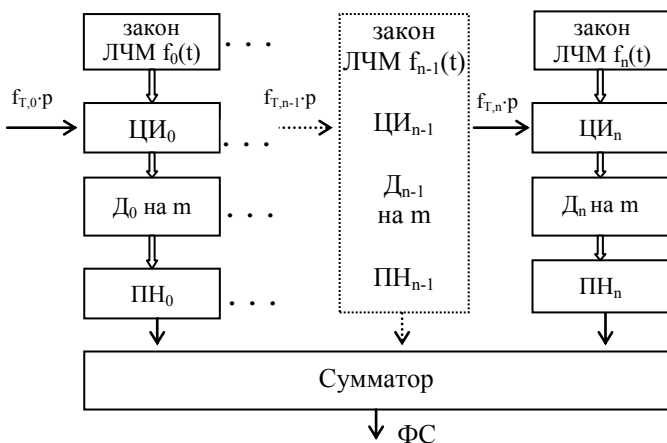


Рис. 2. Упрощенная структурная схема формирователей ФС на основе ГФВ

В случае ГФВ (рис. 2) информация о моментах времени t_{pn} , в которые $\varphi_n(t) = p \cdot \Delta\varphi_n$, снимается со старших разрядов ЦИ_n при их переполнениях. Импульсы переполнения подаются на делители Д_n с коэффициентами деления m_n , где $m_n = 2\pi/\Delta\varphi_n$ – количество выборок на элементарных периодах. Каждому из состояний делителей соответствуют определенные фиксированные значения выборок, снимаемые с выходов переключателей напряжений ПН_n и равные

$$u_{\phi n} = \sin[\Delta\varphi_n(i_n + 0,5v_{pn})], \quad i_n = 0, 1, 2, \dots, (m_n - 1),$$

где $v_{pn} = \tau_{pn}/\Delta t_n$ – отношения длительностей формируемых выборок τ_{pn} к временному расстоянию между ними Δt_n в n -х генераторах.

Переход к непрерывному ФС, как и в первом случае, осуществляется путем суммирования исходного и гомеоморфных колебаний. Для получения тех же значений $f_n(t)$ быстродействие цифровых интеграторов должно быть в g раз выше, где $g \approx (10 \dots 100)$ – параметр, значение которого зависит от отношения емкости интеграторов к максимальному значению кодов $f_n(t)$ и от коэффициентов деления m_n .

Анализ спектральных характеристик цифрового ЛЧМ фрактального сигнала. Исходное и гомеоморфные ЛЧМ колебания, формируемые отдельными цифровыми генераторами типа ГФВ, представляют собой последовательности отсчетов, поэтому их можно записать в виде сумм

$$S_n(t) = \sum_{p=0}^{P_n} u_{pn} \cdot \text{rect}(t_{pn}, \tau_{pn}),$$

где u_{pn} , τ_{pn} , t_{pn} – величины, длительности и моменты появления выборок соответственно; P_n – число выборок n -го ЛЧМ колебания на длительности τ_n , а символом rect обозначена прямоугольная функция единичной амплитуды, существующая на отрезке времени $[t_{pn}, t_{pn} + \tau_{pn}]$.

Спектр n -го колебания $S_n(t)$ равен сумме парциальных спектров прямоугольных функций

$$S_n(jf) = \sum_{p=0}^{P_n} u_{pn} \left[\frac{e^{-jf t_{pn}} - e^{-jf(t_{pn} + \tau_{pn})}}{jf} \right] = \frac{1 + e^{-jf \tau_{pn}}}{jf} \cdot \sum_{p=0}^{P_n} u_{pn} \cdot \exp(-jf t_{pn}).$$

В случае “толстых” выборок, для которых $\tau_{pn} = t_{p+1,n} - t_{pn}$, удобнее в выражении для $S_n(t)$ перейти от значения u_{pn} к их приращениям $\Delta u_{pn} = u_{pn} - u_{p-1,n}$ и представить n -ое выходное колебание в виде суммы сдвинутых единичных скачков $\sigma(t - t_{pn})$:

$$S_n(t) = \sum_{p=0}^P \Delta u_{pn} \cdot \sigma(t - t_{pn}); \quad \Delta u_{0n} = u_{0n}.$$

Спектр такого колебания имеет вид

$$S_n(jf) = \sum_{p=0}^P \Delta u_{pn} \cdot \frac{\exp(-jf t_{pn})}{jf}.$$

В случае применения ГФВ отсчеты синусоиды u_{pn} определяются как

$$u_{pn}(m, p) = \sin[(2\pi/m) \cdot (p + 0,5)],$$

где m – число фазовых уровней.

Отсюда для приращений функции $u_n(m, p)$ имеем

$$\Delta u_n(m, p) = u_n(m, p) - u_n[m, (p-1)] = 2 \cos(2\pi/m) \cdot \sin(\pi/m).$$

Учитывая, что приращения напряжения относительно нулевого уровня в начале импульса (в момент t_{0n}) и в его конце (в момент t_{pn}) равны, соответственно, $\Delta u_n(m, 0)/2$ и $\Delta u_n(m, p)/2$, один импульс длительностью τ_n многоуровневого ЛЧМ колебания можно представить в виде

$$S_n(t) = \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \cdot \left[\sigma(t - t_{0n}) + 2 \sum_{p=1}^{P-1} \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) \cdot \sigma(t - t_{pn}) + \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) \cdot \sigma(t - t_{pn}) \right].$$

Положив $t_{0n} = 0$, $t_{pn} = \tau_n$, и учитывая, что на длительности τ_n должно укладываться четное число элементарных полуволин генерируемого колебания, окончательно для спектра ЛЧМ колебания $S_n(t)$ имеем выражение

$$S_n(jf) = \frac{\sin(\pi/m)}{jf} \cdot \left[1 + 2 \sum_{p=1}^{P-1} \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) \cdot e^{-jft_{pn}} + e^{-jft_{pn}} \right].$$

В случае формирования двоичного сигнала ($m = 2$) спектральная плотность равна

$$S_n(jf) = \left[1 + 2 \sum_{p=1}^{P-1} (-1)^p \cdot \exp(-jft_{pn}) + \exp(-jft_{pn}) \right] / jf, \quad (2)$$

что совпадает с формулой (9.3), полученной в [5].

Переходя к тригонометрической форме записи, получим выражения для синусной и косинусной компонент спектра двоичного колебания:

$$A_n(f) = -2 \left[\sin(f \cdot \tau_n / k^n) + 2 \sum_{p=1}^{P-1} (-1)^p \cdot \sin(f \cdot t_{pn} / k^n) \right] / f; \quad (3)$$

$$C_n(f) = -2 \left[1 + 2 \sum_{p=1}^{P-1} (-1)^p \cdot \cos(f \cdot t_{kn} / p^n) + \cos(f \cdot \tau_n / p^n) \right] \cdot f. \quad (4)$$

Нормированный модуль спектра бинарного ЛЧМ колебания имеет вид

$$|S_{nm}(f)| = (\sqrt{B} \cdot k^n / 2\tau_n) \sqrt{A_n^2(f) + C_n^2(f)}. \quad (5)$$

На основе свойств рассмотренного ЛЧМ колебания, проанализируем спектр синтезируемого фрактального сигнала, полученного путем суммирования четырех (исходного и трех гомеоморфных – $n = 0, 1, 2, 3$) колебаний.

С этой целью для получения спектра ФС воспользуемся выражением (2) и

$$t_{pn} = \tau_n \cdot \left(\sqrt{b^2 + 2 \cdot p / B \cdot m} - b \right),$$

где $B = \Delta f \cdot \tau$ – база ЛЧМ колебания; $b = f_H / \Delta f$ – коэффициент узкополосности колебания; f_H – нижняя частота ЛЧМ колебания.

Выражение для спектра цифрового фрактального сигнала на основе ЛЧМ колебания имеет вид

$$S_{\text{фс}}(f) = \sum_{n=0}^N S_n(f) = \sum_{n=0}^N \left| \frac{\sin(\pi/m)}{f} \cdot \left[1 + 2 \cdot \sum_{p=1}^{P-1} (-1)^p \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot p}{m}\right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp\left(-j \cdot f \cdot \left(\tau/k^n\right) \frac{\tau}{k^n} \cdot \left(\sqrt{b + 2 \cdot p \cdot k^n / (B \cdot m)} - b\right)\right) + \exp\left(-j \cdot f \cdot \left(\tau/k^n\right)\right) \right] \right| \quad (6)$$

На рис. 3, а – г показаны спектры отдельных n -х ЛЧМ колебаний ($n = 0, 1, 2, 3$), формирующих суммарный спектр фрактального сигнала.

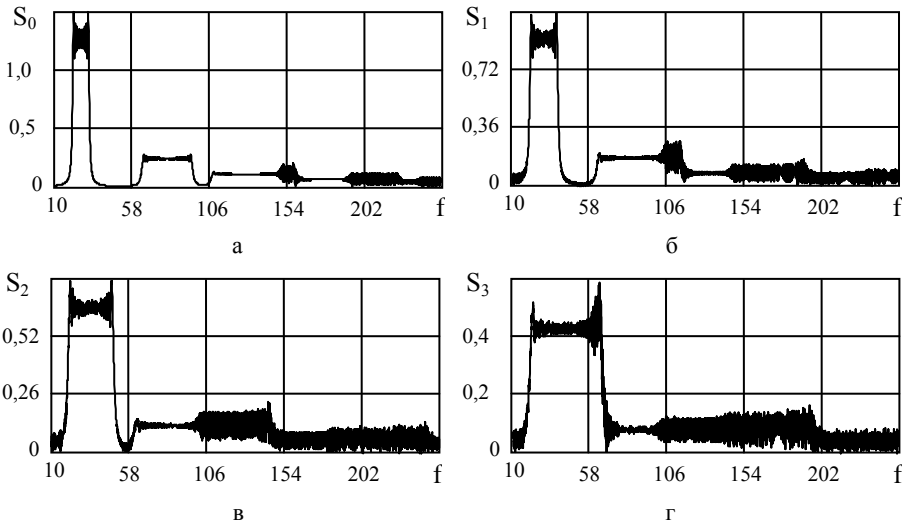


Рис. 3. Спектры отдельных ЛЧМ составляющих фрактального сигнала при $k = 2, m = 2$ (а – $n = 0$; б – $n = 1$; в – $n = 2$; г – $n = 3$)

Эти спектры получены при фиксированном значении девиации частоты и при масштабном коэффициенте $k = 2$. При одной и той же девиации увеличение номера ЛЧМ колебания приводит к расширению подспектров отдельных n -х колебаний. Это физически обуславливается, в силу кратности их длительностей τ , возрастанием линейной скорости изменения частоты.

Анализ графиков (рис. 3, а и б) показывает, что при увеличении указанной скорости вдвое (длительность колебания $\tau = 5$) имеет место расширение подспектров? в результате чего происходит их пересечение. Так, например, наложение второго подспектра на третий приводит к “зашумливанню” области пересечения подспектров (рис. 3, б). Такая же тенденция характерна и для более высоких номеров n (рис. 3, в, г). Анализ показывает, что при рассматриваемых условиях, несмотря на расширение подспектров первого и второго гомеоморфных ЛЧМ колебаний, их основные (первые) подспектры не перекрываются с боковыми подспектрами (рис. 3, б, в). Особенность спектра третьего гомеоморфного колебания заключается в перекрытии основного и второго (бокового) подспектров (рис. 3, г). В этом случае правое крыло основного подспектра находится на пьедестале, образованном вторым (боковым) подспектром. Таким образом, при номере гомеоморфного ЛЧМ колебания $n \geq 3$ все подспектры в результате воздействия друг на друга сливаются и образуют единый спектр с интенсивными осцилляциями огибающих отдельных подспектров.

Рассмотрим структуру спектра фрактального сигнала на примере суммирования исходного и трех гомеоморфных ЛЧМ колебаний. Этот спектр представлен на рис. 4 и получен в соответствии с выражением (6).

Анализ суммарного спектра ФС показывает, что он имеет четырехступенчатую форму, определяемую спектрами отдельных ЛЧМ колебаний. В результате перекрытия четвертой “ступеньки” (основной подспектр третьего гомеоморфного колебания) и второго суммарного подспектра образуется выброс примерно единичной амплитуды.

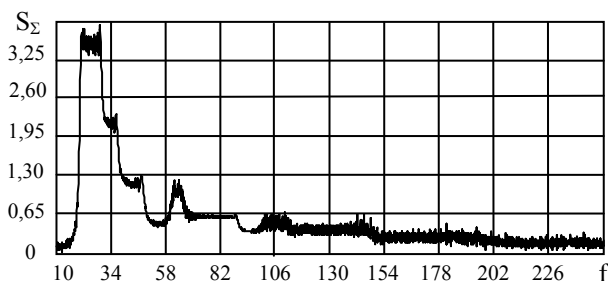


Рис. 4. Суммарный спектр фрактального сигнала $k = 2$, $m = 2$

Основная энергия фрактального сигнала определяется энергетически спектрами исходного и первого гомеоморфного колебаний. Уровень суммарного спектра превышает уровень спектра исходного ЛЧМ колебания более чем в три раза. Ступенчатая форма правого крыла суммар-

ного спектра отвечает свойству гиперболичности, которая является критерием хаотичности рассматриваемого процесса. В данном случае гиперболичность определяется как комбинация увеличения скорости изменения частоты в одном направлении (растяжение) и уменьшения длительности колебания τ в другом (сжатие), что и приводит к хаотизации сигнала [6]. Следует отметить, что пересечение основного суммарного подспектра с боковым подспектром приводит к искажению ФС. Для устранения этого недостатка необходимо предварительно осуществить подбор параметров исходных колебаний, таким образом, чтобы исключить взаимное пересечение подспектров. После подбора параметров можно с помощью соответствующего фильтра подавить второй и более высокие подспектры, в результате чего формируется ФС с требуемыми параметрами.

На рис. 5 изображен суммарный спектр многоуровневого ($m = 8$) фрактального сигнала.

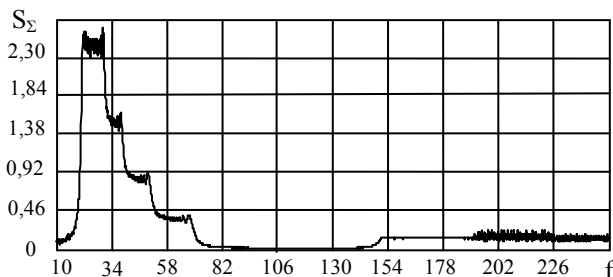


Рис. 5. Суммарный спектр фрактального сигнала при $k = 2$, $m = 8$

Существенной особенностью этого спектра, в отличие от спектра бинарного ФС, является отсутствие перекрытия основного суммарного подспектра со вторым (боковым) подспектром. Кроме того, амплитуда и интенсивность бокового подспектра значительно меньше, чем у подобного подспектра бинарного сигнала (рис. 4).

Как и следовало ожидать, огибающая суммарного спектра ФС при $m = 8$ по своей структуре совпадает с огибающей спектра при $m = 2$, однако второй подспектр не перекрывается с основным подспектром и находится на значительном расстоянии от него, составляющем величину более $2 \cdot f_{H2}$, где f_{H2} – нижняя частота второго подспектра. В этом случае при формировании фрактального сигнала можно не проводить предварительного подавления более высоких подспектров, так как они практически не оказывают влияния на его параметры.

Выводы. 1. Показана возможность цифрового формирования фрактальных сигналов на основе вспомогательного ЛЧМ колебания, при использовании двух подходов к прямому цифровому синтезу: с фиксированным тактом и фиксированным уровнем отсчетов (генератора с фиксированным тактом и генератора фиксированных выборок).

2. Рассмотрена структура спектра цифрового линейно частотно модулированного фрактального сигнала на примере суммирования исходного и трех гомеоморфных ЛЧМ колебаний, при масштабном коэффициенте $k = 2$, а также бинарном ($m = 2$) и многоуровневом ($m = 8$) квантовании.

3. Ступенчатая форма правого крыла суммарного спектра отвечает свойству гиперболичности, которая является критерием хаотичности рассматриваемого процесса.

4. Целесообразно рассмотреть различные способы аппаратурной реализации формирователей цифровых ЛЧМ фрактальных сигналов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кук Ч., Бернфельд М. Радиолокационные сигналы. – М.: Сов. радио, 1971. – 567 с.
2. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
3. Пащенко Р.Э., Барданова О.А., Шаповалов А.В. Формирование фрактальных сигналов с использованием линейно-частотно модулированных колебаний // Збірник наукових праць ІПМЕ НАН України. – К.: ІПМЕ, 2003. – Вип. 22. – С. 142 – 152.
4. Приемно-передающие устройства радиотехнических систем. Часть 1. / Под ред. Ю.Н. Седышева. – Х.: ВИРТА, 1991. – 335 с.
5. Вакман Д.Е., Седлецкий Р.М. Вопросы синтеза радиолокационных сигналов. – М.: Сов. радио, 1973. – 312 с.
6. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. – М.: Наука, 1987. – 424 с.

Поступила 9.04.2004

БУДАНОВ Павел Феофанович, канд. техн. наук, преподаватель кафедры Харьковского военного университета. В 1981 году окончил Ростовское ВВКИУ. Область научных интересов – фрактальный анализ.

КАЛЬНОЙ Сергей Евгеньевич, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры Харьковского военного университета. В 1975 году окончил Харьковский государственный университет. Область научных интересов – фрактальный анализ.

ПАЩЕНКО Руслан Эдуардович, канд. техн. наук, доцент, профессор кафедры Харьковского военного университета. В 1987 году окончил Житомирское ВУРЭ ПВО. Область научных интересов – первичная обработка сигналов, фрактальный анализ.