

## ЦИФРОВЫЕ ФОРМИРОВАТЕЛИ ЛИНЕЙНО-ЧАСТОТНО МОДУЛИРОВАННЫХ ФРАКТАЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

к.т.н. П.Ф. Буданов, к.ф.-м.н. С.Е. Кальной, к.т.н. Р.Э. Пащенко

*Рассматриваются возможности цифрового формирования фрактальных сигналов с использованием ЛЧМ колебаний. Методом численного моделирования проводится анализ спектральных характеристик полученных цифровых ЛЧМ фрактальных сигналов.*

**Постановка проблемы и анализ литературы.** В настоящее время фрактальные модели сигналов строятся, как правило, на основе различных математических алгоритмов с использованием компьютерной графики, что позволяет говорить о новых подходах к исследованию генерации и формирования высокочастотных колебаний, базирующихся на компьютерных экспериментах, значительно отличающихся от традиционных методов анализа и синтеза динамических систем [1].

Интегральное построение динамических хаотических систем предопределило, в частности, повышенный интерес к полностью реализуемым на интегральных микросхемах (за исключением выходного фильтра) цифровым устройствам формирования хаотических, в том числе и фрактальных сигналов.

В основе понятия фрактала, частным случаем которого является фрактальный сигнал (ФС), лежит гипотеза самоподобия, допускающая бесконечную серию вложения друг в друга одинаковых (гомеоморфных) объектов. При этом объект уменьшается только в размере, но остается гомеоморфным исходному объекту. Это вытекает из общего определения фрактала, введенного Б.Б. Мандельбротом, как структуры, состоящей из частей, которые в каком-то смысле подобны целому [2]. При формировании ФС под такими объектами следует понимать отдельные детерминированные колебания, гомеоморфные исходному (базовому) колебанию.

В [3] рассмотрены подходы к формированию аналоговых фрактальных сигналов на основе линейно-частотно модулированного (ЛЧМ) колебания, приведены результаты численного моделирования таких сигналов и проанализирована размерность фрактального сигнала. Использование цифровых методов формирования ФС позволяет не только изменять параметры формируемых сигналов (девиацию частоты, длительность), но и вводить в сигнал

требуемые предискажения, обеспечивать стабильность параметров сигналов, а также хорошую воспроизводимость при серийном производстве.

**Цель статьи.** Рассмотреть подходы к формированию цифровых ЛЧМ фрактальных сигналов и провести анализ на основе численного моделирования спектральных характеристик цифровых ЛЧМ фрактальных сигналов.

**Подходы к цифровому синтезу фрактальных сигналов.** Идеи и методы, лежащие в основе синтеза аналоговых ФС на основе ЛЧМ колебаний, могут быть использованы для получения цифровых ЛЧМ фрактальных сигналов. Математическое выражение фрактального сигнала, полученного на основе ЛЧМ колебания, можно представить в следующем виде [3]:

$$u(t) = \sum_{n=0}^N \frac{U_0}{k^n} \sin \left( f_0 t + k^n \frac{\Delta f}{2\tau} t^2 + \varphi_0 \right), \quad (1)$$

где  $U_0$  – амплитуда нулевого ЛЧМ колебания;  $k = 2, 3, 4, \dots$  – масштабный коэффициент, определяющий сжатие компоненты сигнала по амплитуде и растяжение – по скорости изменения девиации частоты;  $n$  – номер компоненты хаотического сигнала;  $N$  – число составляющих фрактального сигнала;  $f_0, \Delta f, \tau, \varphi_0$  – средняя частота, девиация частоты, длительность и начальная фаза сигнала соответственно;  $t$  – текущее время.

Цифровой формирователь фрактальных сигналов на основе исходного ЛЧМ колебания может быть построен по многокаскадной схеме, в состав которой входят совокупность цифровых генераторов (ЦГ), программного управляющего устройства, задающего линейные модулирующие функции с требуемыми параметрами, а также сумматора, на выходе которого имеет место фрактальный сигнал.

При реализации отдельных ЦГ могут использоваться два подхода к прямому цифровому синтезу [4]: с фиксированным тактом и фиксированным уровнем отсчетов. В первом случае ЦГ представляет собой устройства, осуществляющие вычисления значений выборок воспроизводимых колебаний  $u_{p,n}$ , следующих с равномерным шагом по времени  $\Delta t_n$ , где  $n$  – номер исходного и гомеоморфных колебаний (генераторов),  $n = \overline{0,5}$ , а  $p$  – номер выборки  $n$ -го колебания. Генераторы такого типа будем называть генераторами с фиксированным тактом (ГФТ). Во втором случае вычисляются моменты времени  $t_{p,n}$ , в которые выборки имеют определенные фиксированные значения  $u_{фр,n}$ , или, иначе, в которые фазовые набег  $\varphi(t_{p,n})$  кратны выбранному шагу по фазе  $\Delta \varphi_n$  [4]. Генераторы такого типа будем называть генераторами фиксированных выборок (ГФВ). Необходимо отметить, что в этом случае фиксируются не только величины выборок, но и их количество на каждом элементарном периоде исходного и гомеоморфных синтезируемых колебаний.

Исходной операцией в обоих типах цифровых генераторов является их программирование, заключающееся в задании требуемого закона  $\varphi_n(t)$ . Для ГФТ последующими операциями являются:

- вычисления текущих значений аргументов  $\varphi_n(p \cdot \Delta t)$ ;
- вычисления или чтения из постоянных запоминающих устройств (ПЗУ<sub>n</sub>) выборочных значений синусоид  $u_{pn} = \sin \varphi_n(p \cdot \Delta t)$ , соответствующих текущим значениям аргументов;
- преобразование кодов  $u_{pn}$  в аналоговые значения  $u_{pn}$ ;
- интерполяция промежуточных значений синтезируемых исходного и гомеоморфных колебаний или переход к непрерывным компонентам фрактального сигнала, что достигается путем применения цифроаналогового преобразователя (ЦАП).

В случае ГФВ процесс синтезирования сводится к выполнению следующих операций:

- вычисление (или чтение из ПЗУ) приращений функции  $\varphi_n^{-1}(t)$  обратной  $\varphi_n(t) \cdot \Delta t_{kn} = \varphi_n^{-1}(k \cdot \Delta \varphi) - \varphi_n^{-1}[(k-1) \cdot \Delta \varphi]$ ;
- преобразования кодов  $\Delta t_{kn}$  во временные интервалы  $\Delta t_{kn}$ ;
- переключения в найденные текущие моменты времени  $t_{kn} = t_{k-1, n} + \Delta t_{kn}$  фиксированных значений отсчетов  $u_{\phi kn}$ ;
- переход к непрерывным колебаниям.

При аппаратурной реализации формирователя ФС удобнее задавать закон частотной, а не фазовой модуляции  $f_n(t)$ , поэтому для перехода к функциям  $\varphi_n(t)$  необходимы операции интегрирования, которые осуществляются при помощи цифровых интеграторов (ЦИ). Упрощенные структурные схемы формирователей ФС на основе ГФТ и ГФВ приведены на рис. 1 и 2 соответственно, где жирными стрелками обозначены цепи параллельной передачи многоразрядных кодов.

Как правило, программная часть, с помощью которой задается закон частотной модуляции  $f_n(t)$ , по объему оборудования превосходит все остальные части формирователя сигнала. В цифровых интеграторах коды  $f_n(t)$  преобразуются в коды текущих фаз  $\varphi_n(t)$ . В случае ГФТ (рис. 1) частоты преобразований равны  $f_{Tn} = (\Delta t_n)^{-1}$ . Вычисленные значения  $\varphi_n(p \cdot \Delta t)$  используются для адресаций ПЗУ<sub>n</sub>, разрядности входных слов которых, в общем случае, меньше или равны разрядностям интеграторов. С выходов ПЗУ<sub>n</sub> снимаются коды выборочных значений синусоид  $u_{pn} = \sin \varphi_n(p \cdot \Delta t_n)$ . Далее, с помощью цифроаналоговых преобразователей, осуществляются переходы к аналоговым значениям  $u_{pn}$ , а затем после операции их сложения в сумматоре к непрерывному фрактальному сигналу

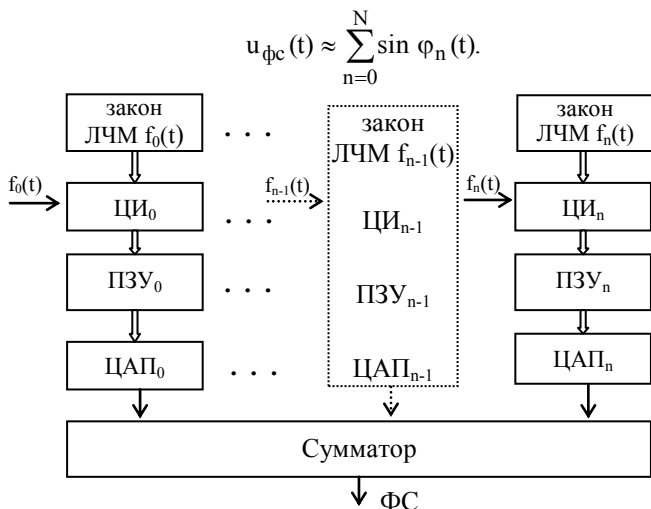


Рис. 1. Упрощенная структурная схема формирователей ФС на основе ГФС

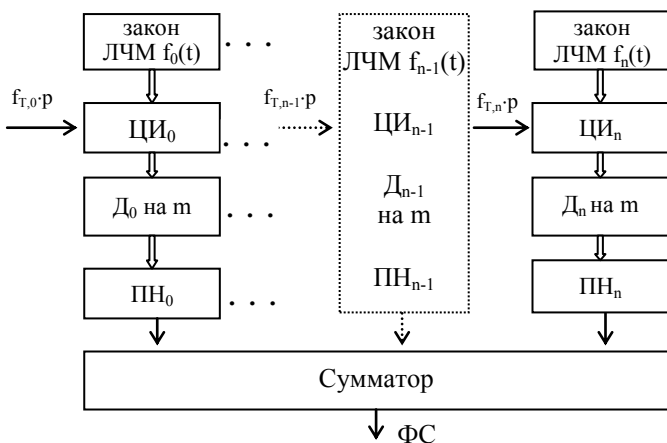


Рис. 2. Упрощенная структурная схема формирователей ФС на основе ГФВ

В случае ГФВ (рис. 2) информация о моментах времени  $t_{pn}$ , в которые  $\varphi_n(t) = p \cdot \Delta\varphi_n$ , снимается со старших разрядов  $\text{ЦИ}_n$  при их переполнениях. Импульсы переполнения подаются на делители  $\text{Д}_n$  с коэффициентами деления  $m_n$ , где  $m_n = 2\pi/\Delta\varphi_n$  – количество выборок на элементарных периодах. Каждому из состояний делителей соответствуют определенные фиксированные значения выборок, снимаемые с выходов переключателей напряжений  $\text{ПН}_n$  и равные

$$u_{\phi n} = \sin[\Delta\varphi_n(i_n + 0,5v_{pn})], \quad i_n = 0, 1, 2, \dots, (m_n - 1),$$

где  $v_{pn} = \tau_{pn}/\Delta t_n$  – отношения длительностей формируемых выборок  $\tau_{pn}$  к временному расстоянию между ними  $\Delta t_n$  в  $n$ -х генераторах.

Переход к непрерывному ФС, как и в первом случае, осуществляется путем суммирования исходного и гомеоморфных колебаний. Для получения тех же значений  $f_n(t)$  быстродействие цифровых интеграторов должно быть в  $g$  раз выше, где  $g \approx (10 \dots 100)$  – параметр, значение которого зависит от отношения емкости интеграторов к максимальному значению кодов  $f_n(t)$  и от коэффициентов деления  $m_n$ .

**Анализ спектральных характеристик цифрового ЛЧМ фрактального сигнала.** Исходное и гомеоморфные ЛЧМ колебания, формируемые отдельными цифровыми генераторами типа ГФВ, представляют собой последовательности отсчетов, поэтому их можно записать в виде сумм

$$S_n(t) = \sum_{p=0}^{P_n} u_{pn} \cdot \text{rect}(t_{pn}, \tau_{pn}),$$

где  $u_{pn}$ ,  $\tau_{pn}$ ,  $t_{pn}$  – величины, длительности и моменты появления выборок соответственно;  $P_n$  – число выборок  $n$ -го ЛЧМ колебания на длительности  $\tau_n$ , а символом  $\text{rect}$  обозначена прямоугольная функция единичной амплитуды, существующая на отрезке времени  $[t_{pn}, t_{pn} + \tau_{pn}]$ .

Спектр  $n$ -го колебания  $S_n(t)$  равен сумме парциальных спектров прямоугольных функций

$$S_n(jf) = \sum_{p=0}^{P_n} u_{pn} \left[ \frac{e^{-jft_{pn}} - e^{-jft_{pn} + jf\tau_{pn}}}{jf} \right] = \frac{1 + e^{-jft_{pn}}}{jf} \cdot \sum_{p=0}^{P_n} u_{pn} \cdot \exp(-jft_{pn}).$$

В случае “толстых” выборок, для которых  $\tau_{pn} = t_{p+1,n} - t_{pn}$ , удобнее в выражении для  $S_n(t)$  перейти от значения  $u_{pn}$  к их приращениям  $\Delta u_{pn} = u_{pn} - u_{p-1,n}$  и представить  $n$ -ое выходное колебание в виде суммы сдвинутых единичных скачков  $\sigma(t - t_{pn})$ :

$$S_n(t) = \sum_{p=0}^P \Delta u_{pn} \cdot \sigma(t - t_{pn}); \quad \Delta u_{0n} = u_{0n}.$$

Спектр такого колебания имеет вид

$$S_n(jf) = \sum_{p=0}^P \Delta u_{pn} \cdot \frac{\exp(-jft_{pn})}{jf}.$$

В случае применения ГФВ отсчеты синусоиды  $u_{pn}$  определяются как

$$u_{pn}(m, p) = \sin[(2\pi/m) \cdot (p + 0,5)],$$

где  $m$  – число фазовых уровней.

Отсюда для приращений функции  $u_n(m, p)$  имеем

$$\Delta u_n(m, p) = u_n(m, p) - u_n[m, (p-1)] = 2 \cos(2\pi/m) \cdot \sin(\pi/m).$$

Учитывая, что приращения напряжения относительно нулевого уровня в начале импульса (в момент  $t_{0n}$ ) и в его конце (в момент  $t_{pn}$ ) равны, соответственно,  $\Delta u_n(m, 0)/2$  и  $\Delta u_n(m, p)/2$ , один импульс длительностью  $\tau_n$  многоуровневого ЛЧМ колебания можно представить в виде

$$S_n(t) = \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \cdot \left[ \sigma(t - t_{0n}) + 2 \sum_{p=1}^{P-1} \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) \cdot \sigma(t - t_{pn}) + \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) \cdot \sigma(t - t_{pn}) \right].$$

Положив  $t_{0n} = 0$ ,  $t_{pn} = \tau_n$ , и учитывая, что на длительности  $\tau_n$  должно укладываться четное число элементарных полуволин генерируемого колебания, окончательно для спектра ЛЧМ колебания  $S_n(t)$  имеем выражение

$$S_n(jf) = \frac{\sin(\pi/m)}{jf} \cdot \left[ 1 + 2 \sum_{p=1}^{P-1} \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) \cdot e^{-jft_{pn}} + e^{-jft_{pn}} \right].$$

В случае формирования двоичного сигнала ( $m = 2$ ) спектральная плотность равна

$$S_n(jf) = \left[ 1 + 2 \sum_{p=1}^{P-1} (-1)^p \cdot \exp(-jft_{pn}) + \exp(-jft_{pn}) \right] / jf, \quad (2)$$

что совпадает с формулой (9.3), полученной в [5].

Переходя к тригонометрической форме записи, получим выражения для синусной и косинусной компонент спектра двоичного колебания:

$$A_n(f) = -2 \left[ \sin(f \cdot \tau_n / k^n) + 2 \sum_{p=1}^{P-1} (-1)^p \cdot \sin(f \cdot t_{pn} / k^n) \right] / f; \quad (3)$$

$$C_n(f) = -2 \left[ 1 + 2 \sum_{p=1}^{P-1} (-1)^p \cdot \cos(f \cdot t_{kn} / p^n) + \cos(f \cdot \tau_n / p^n) \right] \cdot f. \quad (4)$$

Нормированный модуль спектра бинарного ЛЧМ колебания имеет вид

$$|S_{nm}(f)| = (\sqrt{B} \cdot k^n / 2\tau_n) \sqrt{A_n^2(f) + C_n^2(f)}. \quad (5)$$

На основе свойств рассмотренного ЛЧМ колебания, проанализируем спектр синтезируемого фрактального сигнала, полученного путем суммирования четырех (исходного и трех гомеоморфных –  $n = 0, 1, 2, 3$ ) колебаний.

С этой целью для получения спектра ФС воспользуемся выражением (2) и

$$t_{pn} = \tau_n \cdot \left( \sqrt{b^2 + 2 \cdot p / B \cdot m} - b \right),$$

где  $B = \Delta f \cdot \tau$  – база ЛЧМ колебания;  $b = f_H / \Delta f$  – коэффициент узкополосности колебания;  $f_H$  – нижняя частота ЛЧМ колебания.

Выражение для спектра цифрового фрактального сигнала на основе ЛЧМ колебания имеет вид

$$S_{\text{фс}}(f) = \sum_{n=0}^N S_n(f) = \sum_{n=0}^N \left| \frac{\sin(\pi/m)}{f} \cdot \left[ 1 + 2 \cdot \sum_{p=1}^{P-1} (-1)^p \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot p}{m}\right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp\left(-j \cdot f \cdot \left(\tau/k^n\right) \frac{\tau}{k^n} \cdot \left(\sqrt{b + 2 \cdot p \cdot k^n / (B \cdot m)} - b\right)\right) + \exp\left(-j \cdot f \cdot \left(\tau/k^n\right)\right) \right] \right| \quad (6)$$

На рис. 3, а – г показаны спектры отдельных  $n$ -х ЛЧМ колебаний ( $n = 0, 1, 2, 3$ ), формирующих суммарный спектр фрактального сигнала.

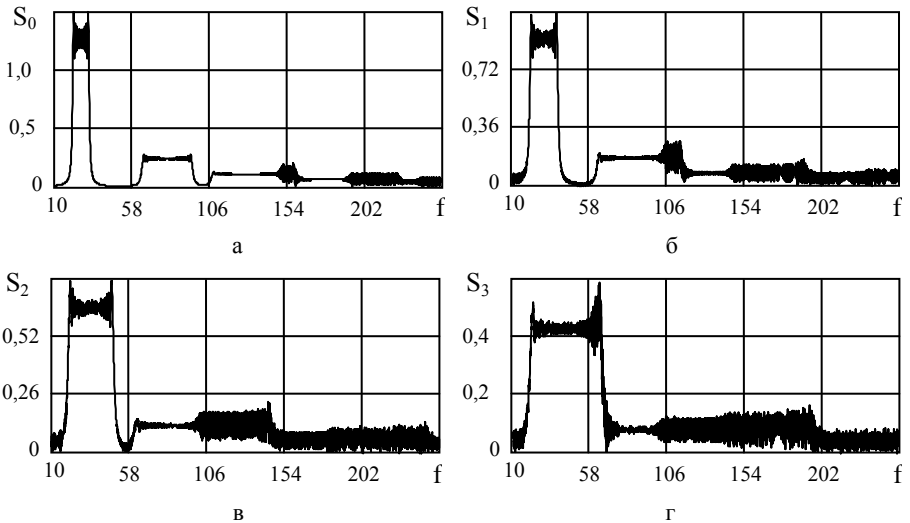


Рис. 3. Спектры отдельных ЛЧМ составляющих фрактального сигнала при  $k = 2, m = 2$  (а –  $n = 0$ ; б –  $n = 1$ ; в –  $n = 2$ ; г –  $n = 3$ )

Эти спектры получены при фиксированном значении девиации частоты и при масштабном коэффициенте  $k = 2$ . При одной и той же девиации увеличение номера ЛЧМ колебания приводит к расширению подспектров отдельных  $n$ -х колебаний. Это физически обуславливается, в силу кратности их длительностей  $\tau$ , возрастанием линейной скорости изменения частоты.

Анализ графиков (рис. 3, а и б) показывает, что при увеличении указанной скорости вдвое (длительность колебания  $\tau = 5$ ) имеет место расширение подспектров? в результате чего происходит их пересечение. Так, например, наложение второго подспектра на третий приводит к “зашумливанию” области пересечения подспектров (рис. 3, б). Такая же тенденция характерна и для более высоких номеров  $n$  (рис. 3, в, г). Анализ показывает, что при рассматриваемых условиях, несмотря на расширение подспектров первого и второго гомеоморфных ЛЧМ колебаний, их основные (первые) подспектры не перекрываются с боковыми подспектрами (рис. 3, б, в). Особенность спектра третьего гомеоморфного колебания заключается в перекрытии основного и второго (бокового) подспектров (рис. 3, г). В этом случае правое крыло основного подспектра находится на пьедестале, образованном вторым (боковым) подспектром. Таким образом, при номере гомеоморфного ЛЧМ колебания  $n \geq 3$  все подспектры в результате воздействия друг на друга сливаются и образуют единый спектр с интенсивными осцилляциями огибающих отдельных подспектров.

Рассмотрим структуру спектра фрактального сигнала на примере суммирования исходного и трех гомеоморфных ЛЧМ колебаний. Этот спектр представлен на рис. 4 и получен в соответствии с выражением (6).

Анализ суммарного спектра ФС показывает, что он имеет четырехступенчатую форму, определяемую спектрами отдельных ЛЧМ колебаний. В результате перекрытия четвертой “ступеньки” (основной подспектр третьего гомеоморфного колебания) и второго суммарного подспектра образуется выброс примерно единичной амплитуды.

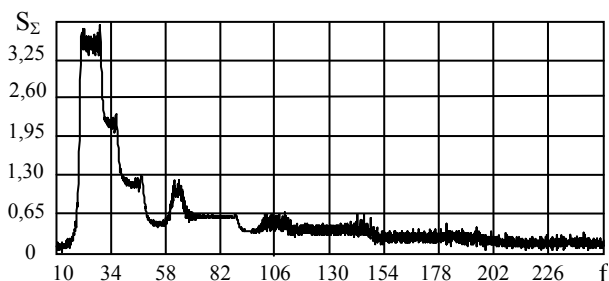


Рис. 4. Суммарный спектр фрактального сигнала  $k = 2$ ,  $m = 2$

Основная энергия фрактального сигнала определяется энергетически спектрами исходного и первого гомеоморфного колебаний. Уровень суммарного спектра превышает уровень спектра исходного ЛЧМ колебания более чем в три раза. Ступенчатая форма правого крыла суммар-



ного спектра отвечает свойству гиперболичности, которая является критерием хаотичности рассматриваемого процесса. В данном случае гиперболичность определяется как комбинация увеличения скорости изменения частоты в одном направлении (растяжение) и уменьшения длительности колебания  $\tau$  в другом (сжатие), что и приводит к хаотизации сигнала [6]. Следует отметить, что пересечение основного суммарного подспектра с боковым подспектром приводит к искажению ФС. Для устранения этого недостатка необходимо предварительно осуществить подбор параметров исходных колебаний, таким образом, чтобы исключить взаимное пересечение подспектров. После подбора параметров можно с помощью соответствующего фильтра подавить второй и более высокие подспектры, в результате чего формируется ФС с требуемыми параметрами.

На рис. 5 изображен суммарный спектр многоуровневого ( $m = 8$ ) фрактального сигнала.

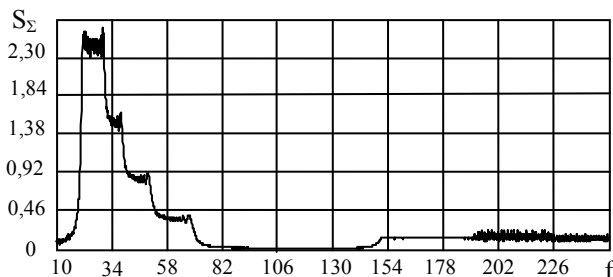


Рис. 5. Суммарный спектр фрактального сигнала при  $k = 2$ ,  $m = 8$

Существенной особенностью этого спектра, в отличие от спектра бинарного ФС, является отсутствие перекрытия основного суммарного подспектра со вторым (боковым) подспектром. Кроме того, амплитуда и интенсивность бокового подспектра значительно меньше, чем у подобного подспектра бинарного сигнала (рис. 4).

Как и следовало ожидать, огибающая суммарного спектра ФС при  $m = 8$  по своей структуре совпадает с огибающей спектра при  $m = 2$ , однако второй подспектр не перекрывается с основным подспектром и находится на значительном расстоянии от него, составляющем величину более  $2 \cdot f_{H2}$ , где  $f_{H2}$  – нижняя частота второго подспектра. В этом случае при формировании фрактального сигнала можно не проводить предварительного подавления более высоких подспектров, так как они практически не оказывают влияния на его параметры.

**Выводы.** 1. Показана возможность цифрового формирования фрактальных сигналов на основе вспомогательного ЛЧМ колебания, при использовании двух подходов к прямому цифровому синтезу: с фиксированным тактом и фиксированным уровнем отсчетов (генератора с фиксированным тактом и генератора фиксированных выборок).

2. Рассмотрена структура спектра цифрового линейно частотно модулированного фрактального сигнала на примере суммирования исходного и трех гомеоморфных ЛЧМ колебаний, при масштабном коэффициенте  $k = 2$ , а также бинарном ( $m = 2$ ) и многоуровневом ( $m = 8$ ) квантовании.

3. Ступенчатая форма правого крыла суммарного спектра отвечает свойству гиперболичности, которая является критерием хаотичности рассматриваемого процесса.

4. Целесообразно рассмотреть различные способы аппаратурной реализации формирователей цифровых ЛЧМ фрактальных сигналов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кук Ч., Бернфельд М. Радиолокационные сигналы. – М.: Сов. радио, 1971. – 567 с.
2. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
3. Пащенко Р.Э., Барданова О.А., Шаповалов А.В. Формирование фрактальных сигналов с использованием линейно-частотно модулированных колебаний // Збірник наукових праць ІПМЕ НАН України. – К.: ІПМЕ, 2003. – Вип. 22. – С. 142 – 152.
4. Приемно-передающие устройства радиотехнических систем. Часть 1. / Под ред. Ю.Н. Седышева. – Х.: ВИРТА, 1991. – 335 с.
5. Вакман Д.Е., Седлецкий Р.М. Вопросы синтеза радиолокационных сигналов. – М.: Сов. радио, 1973. – 312 с.
6. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. – М.: Наука, 1987. – 424 с.

Поступила 9.04.2004

**БУДАНОВ Павел Феофанович**, канд. техн. наук, преподаватель кафедры Харьковского военного университета. В 1981 году окончил Ростовское ВВКИУ. Область научных интересов – фрактальный анализ.

**КАЛЬНОЙ Сергей Евгеньевич**, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры Харьковского военного университета. В 1975 году окончил Харьковский государственный университет. Область научных интересов – фрактальный анализ.

**ПАЩЕНКО Руслан Эдуардович**, канд. техн. наук, доцент, профессор кафедры Харьковского военного университета. В 1987 году окончил Житомирское ВУРЭ ПВО. Область научных интересов – первичная обработка сигналов, фрактальный анализ.