

## ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ЗАРЯЖЕННОГО КОЛЬЦА

д.т.н. А.В. Гайдачук, к.ф.-м.н. Е.К. Островский,  
М.В. Сливинский, к.ф.-м.н. А.А.Таран

*Получено интегральное уравнение для расчета напряженности электрического поля. Показано, что при его решении предпочтение следует отдавать численным методам интегрирования. Результаты расчетов позволили определить эффективную область зарядов, определяющих поле на границе заряженного кольца.*

**Общая постановка проблемы и ее связь с научно-практическими задачами.** Большинство неметаллических конструкционных материалов, широко применяемых в авиационно-космической технике, являются хорошими диэлектриками с высоким электрическим сопротивлением  $\rho = 10^7 \div 10^{18}$  Ом·м и поэтому легко электризуются.

Появляющееся статическое электричество на полуфабрикатах и заготовках из таких диэлектриков, часто нарушает течение основного технологического процесса, что может вызвать появление дефектов и привести к снижению качества изделий.

**Обзор публикаций и анализ нерешенных проблем.** По экспериментальным данным, полученным на различных технологических участках НПО им. «Комсомольская правда», максимальные плотности статических зарядов обнаруживаются при пропитке бумаги бакелитовым лаком, а также стеклоткани эпоксиноволачным связующим, и достигают  $\sigma_0 = (26 \div 30) \cdot 10^{-6}$  Кл/м<sup>2</sup>. При такой плотности заряда напряженность электростатического поля, создаваемая вблизи заряженной поверхности, достигает  $E = 1,7 \cdot 10^6$  В/м, вызывая тлеющий разряд и искрение. Электростатические поля напряженностью свыше  $6 \cdot 10^4$  В/м оказывают также вредное воздействие на человека [1].

Измерения статического заряда на технологической линии изготовления панелей сотовой конструкции из полимерной бумаги (ПБ) на предприятии ОАО «УкрНИИТМ» установили влияние статического заряда на процесс смачивания полимерной бумаги связующим на основе бакелитового лака [2].

В экспериментах по растеканию жидкой капли состава пропитки на заряженной и незаряженной горизонтальной поверхности полимерной бу-

маги было установлено значительное увеличение фактора растекания при наличии статического заряда на ПБ. Причину такого явления следует искать в появлении дополнительной электростатической силы, возникающей при взаимодействии между связанными зарядами в жидком диэлектрике и зарядом на поверхности ПБ. Для оценки величины этой силы необходимо знать величину напряженности электрического поля, создаваемого поляризованными связанными зарядами на границе пятна жидкой капли.

В работе [3] рассмотрена задача расчета распределения потенциала поля, создаваемого узким заряженным кольцом. Аналитическое решение для потенциала  $\varphi$ , полученное в этой работе, не выражается через элементарные функции и дальнейшее нахождение напряженности поля требует численных расчетов с привлечением ЭВМ.

**Цель работы.** Используя принцип суперпозиции электрических полей, получить уравнение для проекции напряженности поля  $E_{r-q}$ , которая создается кольцом связанных зарядов с поверхностной плотностью  $-\delta'$  в точках за периметром кольца. Рассмотреть возможность аналитического или численного решения интегрального уравнения для напряженности поля, которое позволяет изучить зависимость  $E_{r-q}$  от геометрических размеров заряженной поверхности.

**Результаты исследований и их обсуждение.** В выбранной цилиндрической системе координат, начало отчета  $r, z = 0$  расположено в центре кольцевого заряда.

Кольцо шириной  $b$  с плотностью связанных зарядов  $\sigma'$  лежит на плоскости отсчета  $Q$  с координатой  $z = 0$  (рис. 1).

Будем искать напряженность электрического поля в точке 1, удаленной от центра кольцевого заряда, на расстоянии  $r + a$  за периметром заряженного кольца. Так как отдельные элементы

заряженного кольца неодинаково удалены от точки 1, они дают разный вклад в общее поле кольца, что усложняет математическое решение задачи.

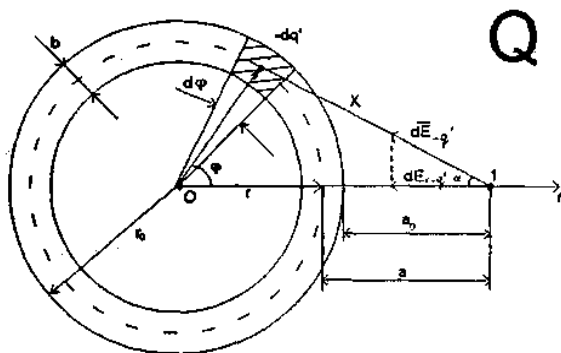


Рис. 1. Заряженное кольцо  $Q$ :  $r_0$  – радиус периметра кольца,  $r$  – радиус центра связанных зарядов кольца,  $a_0$  – расстояние от границы кольца до точки 1,  $b$  – ширина заряженного кольца

Напряженность поля  $\vec{E}_{-q}$  в точке 1 за периметром заряженного кольца в соответствии с принципом суперпозиции можно выразить в виде векторной суммы полей, создаваемых бесконечно малыми зарядами  $-dq'$ :

$$\vec{E}_{-q} = \sum_{i=1}^n d\vec{E}_{-q_i}, \quad (1)$$

где  $d\vec{E}_{-q_i}$  – вектор напряженности поля элементарного заряда кольца  $-dq'$ .

В дальнейшем нас будет интересовать не сам вектор  $\vec{E}_{-q}$ , а его проекция на ось  $r$   $\vec{E}_{r-q}$ . Выражая сумму в уравнении (1) в виде проекций

$$dE_{r-q} = dE_{-q} \cos \alpha, \quad (2)$$

можно перейти от векторного сложения к интегрированию

$$E_{r-q} = \int_0^{2\pi} dE_{r-q}. \quad (3)$$

Напряженность электрического поля в точке 1, создаваемая элементарным зарядом  $-dq'$ , может быть записана как

$$dE_{r-q} = \frac{-dq'}{4\pi\epsilon_0 x^2} = -\frac{\sigma' r \cdot b \cdot d\varphi}{4\pi\epsilon_0 x^2}, \quad (4)$$

$$\text{где } x = [r^2 + (r+a)^2 - 2r(r+a)\cos\varphi]^{1/2}; \quad \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м.} \quad (5)$$

Связь координатного угла  $\varphi$  с углом  $\alpha$  может быть установлена из треугольника  $0-dq'1$  на рис. 1.

Согласно теореме косинусов,

$$r^2 = (r+a)^2 + x^2 - 2r(r+a)\cos\alpha, \quad x^2 = r^2 + (r+a)^2 - 2r(r+a)\cos\varphi. \quad (6)$$

Приравнявая уравнения (6) относительно  $x^2$ , получим

$$\cos\alpha = \frac{(r+a) - r\cos\varphi}{x}. \quad (7)$$

Подставляя (2), (4) и (7) в уравнение (3), представим проекцию напряженности поля на ось  $r$  в точке 1, создаваемую всем заряженным кольцом, в виде

$$E_{r-q} = - \int_0^{2\pi} \frac{\sigma' br [(r+a) - r\cos\varphi]}{4\pi\epsilon_0 x^3} d\varphi. \quad (8)$$

Учитывая симметрию поля относительно оси  $r$ , можно изменить пределы интегрирования и с учетом (5) записать уравнение (8) в виде

$$E_{r-q}' = - \int_0^\pi \frac{\sigma' b r [(r+a) - r \cos \varphi] d\varphi}{0 2\pi \varepsilon_0 [r^2 + (r+a)^2 - 2r(r+a) \cos \varphi]^{3/2}}. \quad (9)$$

При интегрировании уравнения (9) по углу  $\varphi$  остальные параметры  $\sigma'$ ,  $r$ ,  $a$ ,  $b$  являются константами.

Поскольку интеграл (9) не выражается через элементарные функции, использовался численный метод интегрирования. Среди известных методов численного интегрирования наиболее часто употребляются те из них, которые основаны на замене интеграла конечной суммой, каждый член которой рассчитывается по формуле прямоугольника, трапеции, либо парабол (Симпсона). Последний метод в большинстве случаев много точнее [4].

Для удобства численного интегрирования проведем замену параметров  $r$  и  $a$  в уравнении (8) на  $r_0$  и  $a_0$ . Согласно рис. 1

$$a = a_0 + b/n \quad \text{и} \quad r = r_0 - b/n,$$

где  $n$  – число, корректирующее положение центра заряда в узком кольце размером  $b$ . Тогда

$$E_{r-q}' = - \frac{\sigma'}{2\pi \varepsilon_0} \times \int_0^\pi \frac{b \left( r_0 - \frac{b}{n} \right) \left[ (r_0 + a_0) - \left( r_0 - \frac{b}{n} \right) \cos \varphi \right] d\varphi}{\left[ \left( r_0 - \frac{b}{n} \right)^2 + (r_0 + a_0)^2 - 2 \left( r_0 - \frac{b}{n} \right) (r_0 + a_0) \cos \varphi \right]^{3/2}}. \quad (10)$$

Интегральное уравнение (10) решалось приближенным методом численного интегрирования по формуле парабол Симпсона при следующих значениях параметров:  $r_0 = (5 \div 12) \cdot 10^{-3}$  м,  $b = (10^{-5} \div 1,5 \cdot 10^{-3})$  м,  $a_0 = (10^{-8} \div 10^{-5})$  м,  $\sigma' = (10^{-8} \div 2 \cdot 10^{-5})$  Кл/м<sup>2</sup>.

График подынтегральной функции в уравнении (10) представлен на рис. 2 как функция угла интегрирования  $\varphi$  для следующих параметров заряженного кольца:  $r_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  м,  $b = 1,5 \cdot 10^{-3}$  м,  $\sigma' = 9,6296 \cdot 10^{-8}$  Кл/м<sup>2</sup>,  $a_0 = 0$ . Если точка 1 находится на границе периметра заряженного кольца ( $a_0 = 0$ ) или на малом расстоянии  $a_0$  от периметра, то основной вклад в общее поле в точке 1, как видно, вносят заряды в узком секторе  $\beta \approx 20^\circ$ . Вклад зарядов, расположенных под большими углами  $\pm\varphi$  в общее поле ослабевает. Границы установлены условно на уровне ниже 1% от значения  $F(\varphi)$  при  $\varphi = 0^\circ$ .

Зависимость напряженности поля  $E_{r-q}'$  в точке 1 на плоскости Q, создаваемая кольцом шириной  $b = 1,5 \cdot 10^{-3}$  с радиусом  $r_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  м, от расстояния точки 1 до периметра кольца  $a_0$  представлена на рис. 3. График зависимости показывает, что напряженность поля быстро уменьшается с

удалением от периметра кольца и на расстоянии  $a_0 = 0,5$  мм его величина меньше 0,5 % от значения у периметра заряженного кольца ( $a_0 = 0$ ).

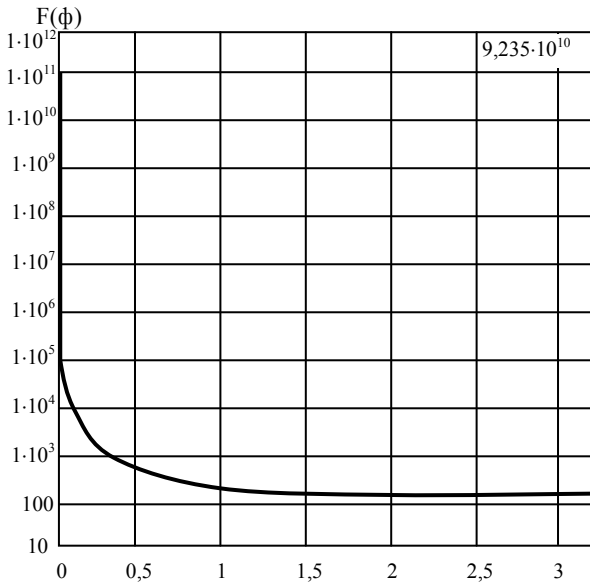


Рис. 2. График подынтегральной функции в зависимости от угла интегрирования  $\phi$ ,  
 $\Gamma_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  м;  $a_0 = 0$  м;  $b = 1,5 \cdot 10^{-3}$  м;  $\sigma' = 9,6296 \cdot 10^{-8}$  Кл/м<sup>2</sup>

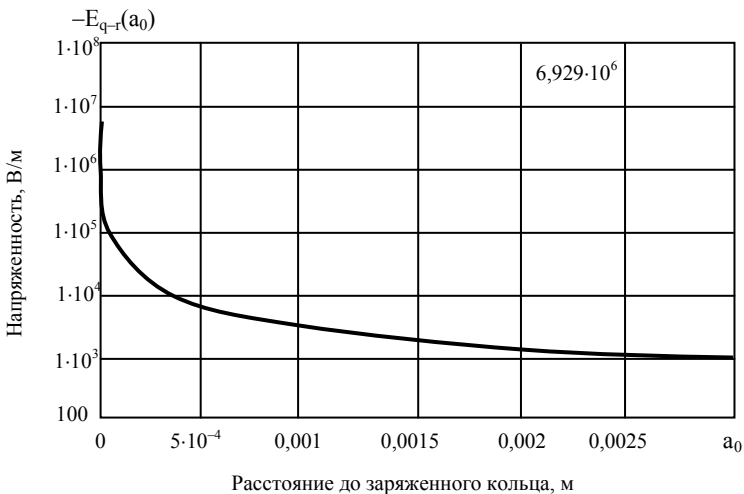


Рис. 3. Зависимость  $-E_{q-r}$  от расстояния  $a_0$  до заряженного кольца с плотностью заряда  $-\sigma'$  в плоскости Q:  
 $\Gamma_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  м;  $b = 1,5 \cdot 10^{-3}$  м;  
 $\sigma' = 9,6296 \cdot 10^{-8}$  Кл/м<sup>2</sup>;  $a_0 = (0 \div 3 \cdot 10^{-3})$  м

Если кольцо шириной  $b$  разбить на серию более узких колец с  $b' = 10^{-5}$  м, то, изменяя радиус кольца  $b'$  в пределах  $r_0 = (10^{-5} \div 5) \cdot 10^{-3}$  м, при фиксированном положении точки 1 на границе периметра кольца  $r_0 + a_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  м, можно оценить вклад каждого узкого кольца  $b' = 10^{-5}$  м с меньшим радиусом в общее поле на границе всего кольца. Такая зависимость  $E_r = f(r_0)$  представлена на рис. 4.

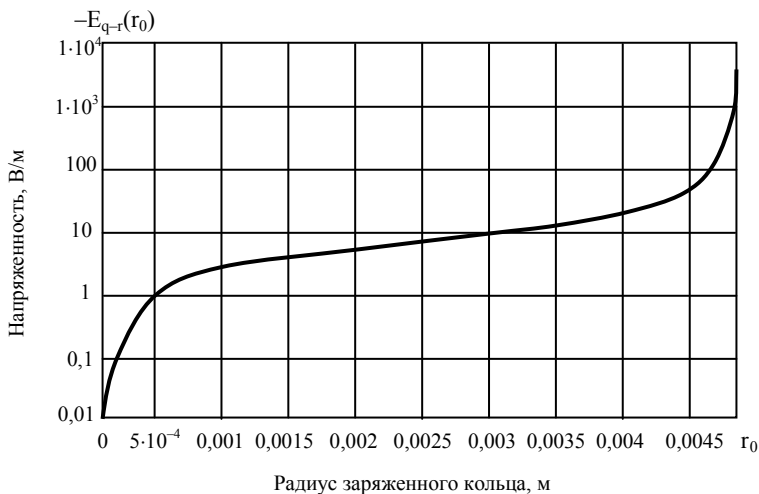


Рис. 4. Зависимость напряженности поля в точке 1 от радиуса заряженного кольца  $r_0$ :  
 $(r_0 + a_0) = 5 \cdot 10^{-3}$  м;  $\sigma' = 9,6296 \cdot 10^{-8}$  Кл/м<sup>2</sup>;  
 $b = 10^{-5}$  м;  $r_0 = (0 \div 5 \cdot 10^{-3})$  м

Из графика очевиден вывод, что напряженность электрического поля на границе заряженного кольца определяется в основном зарядами вблизи периметра кольца. Так поле кольца  $b' = 10^{-5}$  м с радиусом  $r_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  м в точке 1 в 100 раз превышает поле кольца такой же ширины с радиусом  $r_0 = 3,5 \cdot 10^{-3}$  м. Полученные результаты позволяют обоснованно с приемлемой точностью меньше 1% заменить поле заряженного диска с радиусом  $r_0$  полем узкого кольца такого же радиуса  $r_0$  с шириной  $b' = 10^{-5}$  м.

**Перспективы дальнейших исследований.** Интегральное уравнение, описывающее напряженность электростатического поля в точке 1, для заряженного кольца с плотностью поверхностных связанных зарядов  $\sigma'$  от размеров кольца  $r_0$ ,  $b$  и положения  $a_0$  точки 1, позволяет в дальнейшем использовать его для расчетов:

а) напряженности электростатического поля заряженного диска и системы зарядов с цилиндрической геометрией;

б) электростатических сил взаимодействия между поляризованными зарядами при контакте жидкого диэлектрика на заряженной поверхности другого диэлектрика.

**Выводы:** 1. Получено интегральное уравнение для расчета напряженности электрического поля заряженного кольца с поверхностной плотностью связанных зарядов  $\sigma'$ .

2. Показано, что аналитическое решение интегрального уравнения не выражается в элементарных функциях и предпочтительнее следует отдать численным методам интегрирования.

3. Проведен компьютерный анализ зависимости напряженности поля вблизи границы заряженного кольца методом численного интегрирования по формуле парабол Симпсона.

4. Результаты расчетов позволяют определить эффективную область зарядов, определяющих поле на границе заряженного кольца, а также зависимость напряженности поля на границе кольца от его параметров  $\sigma'$ ,  $\epsilon_0$ ,  $b$  и  $a_0$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Филатов В.И. Пластмассы в приборах и механизмах. – Л.: Машиностроение, 1983. – 270 с.
2. Накопление электростатического заряда при производстве сотового заполнителя из полимерной бумаги «NOMEX» // Авиационно-космическая техника и технология. – 2004. – Вып. 2(10). – С. 43 – 48.
3. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. – М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1962. – 480 с.
4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. – М.: Изд. физ.-мат. литературы, 1959. – 608 с.

Поступила 1.04.2004

**ГАЙДАЧУК Александр Витальевич**, доктор техн. наук, доцент, проректор по НИР Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского “ХАИ”, окончил ХАИ. Область научных интересов – технология производства изделий из полимерных композиционных материалов.

**ОСТРОВСКИЙ Евгений Константинович**, канд. техн. наук, доцент кафедры физики Национального университета им. Н.Е. Жуковского “ХАИ”, окончил ХПИ. Область научных интересов – физика плазмы, физика поверхностных явлений.

**СЛИВИНСКИЙ Михаил Владимирович**, зам. нач. отделения ОАО “УкрНИИТМ” г. Днепрпетровск, окончил ДГУ. Область научных интересов – технология производства изделий из полимерных композиционных материалов.

**ТАРАН Анатолий Алексеевич**, канд. техн. наук, профессор, зав. кафедры физики Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского “ХАИ”, окончил ХГУ. Область научных интересов – физическая электроника, физика твердого тела.