УДК 621.396.96

ВЛИЯНИЕ ОШИБОК ОЦЕНИВАНИЯ МАТРИЦЫ ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ НА ТОЧНОСТЬ РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЙ ОЦЕНКИ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ОБЪЕКТА МНОГОПОЗИЦИОННОЙ РАДИОЛОКАЦИОННОЙ СИСТЕМОЙ ПРИ ИЗБЫТОЧНОСТИ ИНФОРМАЦИИ

к.т.н. Ю.В. Кулявец, к.т.н. А.В. Просов
(представил д.т.н., проф. А.В. Кобзев)

Рассмотрено влияние точности определения матрицы весовых коэффициентов на точность результирующей оценки вектора состояния объекта многопозиционной радиолокационной системой в условиях избыточной размерности вектора наблюдаемых параметров положения объекта. Показано, что дисперсия ошибок результирующей оценки местоположения объекта зависит от точности оценок, величин невязок оценок местоположения объекта, полученных различными измерителями одновременно и от точности оценивания матрицы весовых коэффициентов.

Постановка проблемы и анализ литературы. В многопозиционных системах локации по результатам оценок параметров сигналов определяется пространство параметров положения $\mathbf{\Theta}$ объекта, которое отображается в пространство его геометрических координат, характеризуемых вектором состояния $\boldsymbol{\alpha}$ [1]. Часто размерность вектора $\mathbf{\Theta}$ (далее вектор наблюдаемых параметров [2]) является избыточной, т.е. превышает минимально достаточную для определения координат объекта $\boldsymbol{\alpha}$. Как правило, в условиях информационной избыточности имеется возможность определения координат объекта различными сравнительно простыми измерителями. Тогда задача определения местоположения объекта сводится к нахождению оптимальных алгоритмов объединения оценок координат объекта, полученных одновременно различными измерителями. В [3] было показано, что решение задачи оптимального использования оценок одного и того же вектора состояния, полученных различными измерителями, сводится к последовательному применению алгоритма фильтрации оценок:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{n}} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{lv}} + \mathbf{C}_{\mathrm{n}}^{-1}\mathbf{C}_{\mathrm{m}}\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{m}} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{lv}}\right) = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{lv}} + \mathbf{W}\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{m}} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{lv}}\right); \quad (1)$$

$$\mathbf{C}_{\mathrm{n}} = \mathbf{C}_{\mathrm{lv}} + \mathbf{C}_{\mathrm{m}}; \quad (2)$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{lv} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_l - \mathbf{C}_{lv}^{-1}\mathbf{C}_v\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_v - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{lv}\right); \quad (3)$$

$$\mathbf{C}_{lv} = \mathbf{C}_l - \mathbf{C}_v, \quad (4)$$

где $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_\mu = \boldsymbol{\alpha}_\mu\left(\hat{\boldsymbol{\Theta}}_\mu\right)$ – оценка вектора состояния, полученная μ-м измерителем ($\mu = l, v, m$ и $l + v + m = n$); $\mathbf{C}_\mu$ – матрица точности оценок μ-го измерителя; причем $\hat{\boldsymbol{\Theta}}_v$ является общим аргументом для $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_l$ и $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_m$, что обусловливает их корреляцию.

Выражение (1) определяет оптимальное правило нахождения результирующей оценки координат объекта, а выражение (2) – ее точности. Эти выражения, характеризуя измерение текущих координат объекта, структурно подобны формулам получения оценок с учетом доопытных данных, приведенных, например, в [2], однако, существенно отличаются методикой получения $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{lv}$ и $\mathbf{C}_{lv}$, которые в (1) и (2) используются как априорные данные. В [3] также показано, что при отсутствии общего для различных методов вектора $\hat{\boldsymbol{\Theta}}_v$ оценки $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_l$ и $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_m$ являются независимыми. Тогда в алгоритме получения результирующей оценки данные вектора состояния одного измерителя, непосредственно используются как прогнозированные для другого измерителя:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_n = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_l + \mathbf{C}_n^{-1}\mathbf{C}_m\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_m - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_l\right) = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_l + \mathbf{W}\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_m - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_l\right) = \left(\mathbf{I} - \mathbf{W}\right)\hat{\boldsymbol{\alpha}}_l + \mathbf{W}\hat{\boldsymbol{\alpha}}_m; \quad (5)$$

$$\mathbf{C}_n = \mathbf{C}_l + \mathbf{C}_m, \quad (6)$$

где **I** – единичная матрица.

Однако матрица весовых коэффициентов (МВК) $\mathbf{W} = \mathbf{C}_n^{-1}\mathbf{C}_m$, входящая в выражения (1), (5) для определения результирующей оценки $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_n$, зависит от местоположения объекта [1, 2, 3, 4], которое и требуется определить. Поэтому прямое применение алгоритма (1) представляется затруднительным.

Цель статьи. Провести анализ влияния на точность результирующей оценки местоположения объекта точности определения МВК независимо от методов ее получения.

Изложение основного материала. Предположим, что оценка местоположения объекта получена с использованием двух различных измерителей, как в [3]. Результирующая оценка вектора состояния $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_n$ определяется согласно (1). Однако вместо истинного значения МВК $\mathbf{W}$ используется ее оценка $\hat{\mathbf{W}}$. Считаем, что математическое ожидание и корреляционная матрица ошибок (КМО) оценивания составляющих МВК

$\hat{\mathbf{W}}$ известны. Оценим влияние ошибок определения МВК на точность результирующей оценки местоположения объекта. Для этого используем зависимость (1), заменив матрицу весовых коэффициентов ее оценкой

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{n}} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{lv}} + \hat{\mathbf{W}}\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{m}} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{lv}}\right) = \left(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{W}}\right)\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{lv}} + \hat{\mathbf{W}}\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{m}}, \tag{7}$$

и дополним вектор оцениваемых параметров оценками составляющих МВК $\hat{\mathbf{W}}$, выполнив операцию “вытягивания” квадратной матрицы $\hat{\mathbf{W}}$ в вектор-столбец $\hat{\mathbf{W}}^{\#}$ [2].

Как видно из выражения (7), результирующая оценка представляет собой функцию от вектора, определяемого составом имеющихся оценок $\hat{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} = \left\| \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{l}} \quad \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{m}} \quad \hat{\mathbf{W}}^{\#} \right\|$. Тогда зависимость (7) представим в виде $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{n}} = \mathbf{b}\left(\hat{\mathbf{A}}\right)$, причем функция $\mathbf{b}\left(\hat{\mathbf{A}}\right)$ является, в общем случае, нелинейной. Это определяет сложность решения поставленной задачи. Однако наличие априорной информации о возможном значении результирующей оценки $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{n}}$, которая может быть определена одним из измерителей, и при условии малости ошибок ее измерения позволяет использовать метод линеаризации зависимости $\mathbf{b}\left(\hat{\mathbf{A}}\right)$ для оценки влияния точности составляющих вектора $\hat{\mathbf{A}}$ на точность $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{n}}$. Кроме того, такие предположения оправданы и самой постановкой задачи – исследовать возможности использования оценки МВК в алгоритме получения результирующей оценки $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{n}}$. Поэтому, предполагая, что функция $\mathbf{b}\left(\hat{\mathbf{A}}\right)$ на любом достаточно узком участке близка к линейной, представим ее в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $\mathbf{A}_0$ и сохраним два первых слагаемых

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{n}} = \mathbf{b}\left(\mathbf{A}_0\right) + \mathbf{B}\left(\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A}_0\right). \tag{8}$$

Тогда математическое ожидание и КМО результирующей оценки записываются соответственно выражениями [2]:

$$\mathrm{M}\left[\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{n}}\right] = \mathbf{b}\left(\mathbf{A}_0\right); \tag{9}$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{B}\mathbf{C}_{\alpha\mathrm{W}}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}, \tag{10}$$

где $\mathbf{C}_{\alpha\mathrm{W}}^{-1} = \begin{Vmatrix} \mathbf{C}_{\mathrm{lv}}^{-1} & \mathbf{R}_{\mathrm{lvm}} & \mathbf{R}_{\mathrm{lvW}} \\ \mathbf{R}_{\mathrm{mlv}} & \mathbf{C}_{\mathrm{m}}^{-1} & \mathbf{R}_{\mathrm{mW}} \\ \mathbf{R}_{\mathrm{Wlv}} & \mathbf{R}_{\mathrm{Wm}} & \mathbf{C}_{\mathrm{W}}^{-1} \end{Vmatrix}$ – симметричная КМО совместного оценивания местоположения объекта различными измерителями и оценивания МВК $\mathbf{C}_W^{-1}$, причем при условии некоррелированности оценок местоположения объекта, полученных различными измерителями, блоки $\mathbf{R}_{mlv}$ и $\mathbf{R}_{lvm}$ являются нулевыми, а при некоррелированности ошибок оценивания МВК и местоположения объекта соответствующие блоки $\mathbf{R}_{Wlv}$, $\mathbf{R}_{lvW}$ и $\mathbf{R}_{Wm}$, $\mathbf{R}_{mW}$ также являются нулевыми.

Матрица **B**, определяемая соотношением

$$\mathbf{B} = \left\| \partial\mathbf{b}(\mathbf{A})/\partial\boldsymbol{\alpha}_{lv} \quad \partial\mathbf{b}(\mathbf{A})/\partial\boldsymbol{\alpha}_{m} \quad \partial\mathbf{b}(\mathbf{A})/\partial\mathbf{W} \right\|, \tag{11}$$

является блочной матрицей пересчета результирующей оценки $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_n$ в оценки $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{lv}$ и $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_m$, полученные различными измерителями, и оценку матрицы весовых коэффициентов $\hat{\mathbf{W}}$. С учетом (1) и при условии некоррелированности ошибок оценивания МВК и местоположения объекта, перепишем величины, входящие в (11), в следующем виде:

$$\partial\mathbf{b}(\mathbf{A})/\partial\boldsymbol{\alpha}_{lv} = (\mathbf{I} - \mathbf{W}),\ \partial\mathbf{b}(\mathbf{A})/\partial\boldsymbol{\alpha}_{m} = \mathbf{W}\ ,\ \partial\mathbf{b}(\mathbf{A})/\partial\mathbf{W} = \left\| \partial W_{ij}/\partial W_{kf} \right\| (\boldsymbol{\alpha}_m - \boldsymbol{\alpha}_{lv}),$$

где i, j, k, f = 1, … , N.

Результатом нахождения матрично-матричной производной $\left\| \partial W_{ij}/\partial W_{kf} \right\|$ является матрица, размерность, которой равна четырем [5]. Поэтому для получения произведения $\left\| \partial W_{ij}/\partial W_{kf} \right\| (\boldsymbol{\alpha}_m - \boldsymbol{\alpha}_{lv})$ представим матрицу $\mathbf{W}$ в виде вектор-столбцов $\mathbf{W} = \left\| \mathbf{W}_1 \quad \dots \quad \mathbf{W}_N \right\|$. Тогда

$$\left\| \partial W_{ij}/\partial W_{kf} \right\| = \left\| \partial\mathbf{W}_1/\partial\mathbf{W}_1 \quad \dots \quad \partial\mathbf{W}_1/\partial\mathbf{W}_N \quad \dots \quad \partial\mathbf{W}_N/\partial\mathbf{W}_1 \quad \dots \quad \partial\mathbf{W}_N/\partial\mathbf{W}_N \right\|.$$

Результат векторно-векторной производной $\partial\mathbf{W}_i/\partial\mathbf{W}_j$ представляет собой матрицу, размерность которой равна двум [5]. Вектор-столбцы матрицы $\mathbf{W}$ в общем случае коррелированны. В результате нахождения производной $\partial\mathbf{b}(\mathbf{A})/\partial\mathbf{W}$:

$$\partial\mathbf{b}(\mathbf{A})/\partial\mathbf{W} = \left\| \partial\mathbf{W}_i/\partial\mathbf{W}_j \cdot (\boldsymbol{\alpha}_m - \boldsymbol{\alpha}_{lv}) \right\| = \mathbf{V} \tag{12}$$

получим матрицу **V**, мерность которой соответствует двум. С учетом этого можно получить выражение для матрицы пересчета результирующей оценки $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_n$ в оценки $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{lv}$, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_m$ и $\hat{\mathbf{W}}$:

$$\mathbf{B} = \left\| \mathbf{I} - \mathbf{W} \quad \mathbf{W} \quad \mathbf{V} \right\|. \tag{13}$$

Подстановка (13) в (10) позволяет определить выражение для КМО результирующей оценки $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_n$ при использовании коррелированных оценок местоположения объекта, полученных различными измерителями, при использовании оценки МВК

$$\mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{I}-\mathbf{W})\mathbf{C}_{\mathrm{lv}}^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{W})^{\mathrm{T}} + \mathbf{W}\mathbf{R}_{\mathrm{mlv}}(\mathbf{I}-\mathbf{W})^{\mathrm{T}} + (\mathbf{I}-\mathbf{W})\mathbf{R}_{\mathrm{lvm}}\mathbf{W}^{\mathrm{T}} + \mathbf{W}\mathbf{C}_{\mathrm{m}}^{-1}\mathbf{W}^{\mathrm{T}} + \mathbf{V}\mathbf{C}_{\mathrm{W}}^{-1}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}. \quad (14)$$

Однако определяемая таким образом зависимость достаточно громоздка и неудобна для анализа. В связи с этим, введем ряд предположений, позволяющих упростить полученное выражение. Так, без потери общности рассуждений, можно ввести предположение о некоррелированности оценок местоположения объекта $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{lv}}$ и $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{m}}$. Тогда, выражение для КМО результирующей оценки $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{n}}$ принимает вид

$$\mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{I}-\mathbf{W})\mathbf{C}_{\mathrm{lv}}^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{W})^{\mathrm{T}} + \mathbf{W}\mathbf{C}_{\mathrm{m}}^{-1}\mathbf{W}^{\mathrm{T}} + \mathbf{V}\mathbf{C}_{\mathrm{W}}^{-1}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}. \quad (15)$$

Использование постоянного и не зависящего от оценок $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{lv}}$ и $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{m}}$ и не обязательно оптимального, значения оценки матрицы весовых коэффициентов $\mathbf{W}_0$ также упрощает вычисление КМО результирующей оценки $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{n}}$. Данное предположение может быть оправдано близкими к постоянным значениями ошибок оценивания векторов $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{lv}}$ и $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{m}}$ в заданной области пространства

$$\mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{I}-\mathbf{W}_0)\mathbf{C}_{\mathrm{lv}}^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{W}_0)^{\mathrm{T}} + \mathbf{W}_0\mathbf{C}_{\mathrm{m}}^{-1}\mathbf{W}_0^{\mathrm{T}} + \mathbf{V}\mathbf{C}_{\mathrm{W}}^{-1}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}.$$

Введем предположение о высокой точности оценок $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{lv}}$ и $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{m}}$. При этом вклад в $\mathbf{C}^{-1}$ двух первых слагаемых (15) незначителен, а само выражение приводится к виду

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{C}_{\mathrm{W}}^{-1}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}. \quad (16)$$

В этом случае точность оценивания $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{n}}$ зависит от точности оценивания МВК и величины невязок математических ожиданий оценок местоположения объекта, полученных различными измерителями одновременно. При условии несмещенности оценок координат объекта, полученных различными измерителями, выражение (16) стремится к нулю.

Корреляционную матрицу ошибок, определяющую потенциальную точность результирующей оценки в случае комплексирования информации независимых измерителей, можно получить из выражения (15). Для этого необходимо использовать истинное значение матрицы весовых коэффициентов $\mathbf{W}$ (элементы матрицы $\mathbf{C}_{\mathrm{W}}^{-1}$ стремятся к нулю), что приводит выражение (15) к определенному в (6) виду

$$\mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{I}-\mathbf{W})\mathbf{C}_{\mathrm{lv}}^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{W})^{\mathrm{T}} + \mathbf{W}\mathbf{C}_{\mathrm{m}}^{-1}\mathbf{W}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{C}_{\mathrm{lv}} + \mathbf{C}_{\mathrm{m}})^{-1}. \quad (17)$$

Выводы. Таким образом, дисперсия ошибок результирующей оценки местоположения объекта $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{n}}$ зависит не только от точности оценок $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{lv}}$ и $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{m}}$, но и от точности оценивания МВК $\hat{\mathbf{W}}$, величин невязок оценок местоположения объекта, полученных различными измерителями одновременно.

Полученные выражения позволяют оценить влияние ошибок определения матрицы весовых коэффициентов на точность определения местоположения объекта. Задаваясь требуемой точностью измерения координат объекта различными измерителями и допустимыми ошибками результирующей оценки, можно предъявить требования к величине ошибок определения матрицы весовых коэффициентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черняк В.С. Многопозиционная радиолокация. М.: Радио и связь, 1993. – 416 с.*
2. *Ширман Я.Д., Манжос В.Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. – М.: Радио и связь, 1981. – 416 с.*
3. *Багдасарян С.Т., Хачатуров В.Р. Оптимизация оценивания координат объекта многопозиционной радиолокационной системой при избыточности информации. Радиотехника и электроника. – 1992, Т. 37, № 10. – С. 1839 – 1846.*
4. *Черняк В.С., Заславский Л.П., Осипов Л.В. Многопозиционные радиолокационные станции и системы. – Зарубежная радиоэлектроника, 1987, Вып. 1. – С. 9 – 69.*
5. *Красногоров С.И. Матричный анализ в задачах отыскания экстремумов. – Ногинск: Научно-исследовательский центр 30 ЦНИИ МО, 1998. – 100 с.*

Поступила 17.02.2004

КУЛЯВЕЦ Юрий Владленович*, канд. техн. наук, начальник научно-исследовательского отдела научного центра при Харьковском военном университете. Область научных интересов – радиолокация.*

ПРОСОВ Андрей Валерьевич*, канд. техн. наук, начальник лаборатории научно-исследовательского отдела научного центра при Харьковском военном университете. Область научных интересов – радиолокация.*