УДК 621.39

ОЦЕНКА АДЕКВАТНОСТИ СПЛАЙНОВОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ТРАФИКА ШИРОКОПОЛОСНОЙ ЦИФРОВОЙ СЕТИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

к.т.н. Г.А. Кучук
(представил д.т.н., проф. А.В. Королёв)

Предложен метод, позволяющий построить быстросходящийся итерационный процесс оценки адекватности сплайновой интерполяции реальному трафику широкополосной цифровой сети интегрального обслуживания (ШЦСИО).

Введение. Быстрое развитие новых информационных технологий привело к существенному росту объема трафика, циркулирующего в глобальных и корпоративных вычислительных сетях. Повсеместный переход к использованию широкополосных цифровых сетей интегрального обслуживания остро поставил проблему исследования характеристик сетевого трафика. **Анализ исследований и публикаций** по данному вопросу показал, что в большинстве работ данной области используется классический подход, основанный на построении адекватной динамической модели в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений, например [1]. Однако для построения такой модели необходимо знание значительного объема априорной информации об исследуемом процессе [2]. Кроме этого, обязательным является предположение про гауссовский характер отдельных составляющих процесса [3]. Подробный анализ реального трафика широкополосной цифровой сети интегрального обслуживания показывает наличие в нем долговременных зависимостей, ведущих к распределениям с «тяжелыми хвостами» [4]. А учет фрактального характера как суммарного трафика, так и трафика от отдельных источников (ОИ) конкретных служб ШЦСИО, не позволяет построить классическую динамическую модель. Однако применение аппарата сплайн-функций с достаточно малыми интервалами разбиений для каждого ОИ позволяет провести достаточно точную и быструю аппроксимацию исследуемой сессии [5]. При этом **актуальным** становится вопрос оценки адекватности полученной модели реальному трафику, что и является **целью данной статьи**.

1. Сплайновая интерполяция трафика ШЦСИО. Рассмотрим сеть с K службами, причем k-ая служба $\left(k=\overline{1,K}\right)$ обслуживает трафик из L_k

источников. Пусть $W^{(k,\ell_k)}(t)$ – объем информации, поступающей к k-й службе от источника ℓ_k $\left(\ell_k = \overline{1, L_k}\right)$ за исследуемую сессию $t \in [t_0, T_c]$. Для анализа характера данной функции используем аппарат локальных сплайнов [6], позволяющий учесть различный характер поведения $W^{(k,\ell_k)}(t)$ на разных временных интервалах сессии с наименьшей ошибкой аппроксимации относительно нормы в пространстве $L_2[t_0, T_c]$. Для построения локального $n^{(k,\ell_k)}$-сплайна с узлами интерполяции $t_i^{(k,\ell_k)}$, где $i = \overline{0, n^{(k,\ell_k)}}$, $t_0^{(k,\ell_k)} = t_0$, $t_{n^{(k,\ell_k)}}^{(k,\ell_k)} = T_c$, необходимо на каждом отрезке интерполяции $\tau_i^{(k,\ell_k)} = \left[t_{i-1}^{(k,\ell_k)}, t_i^{(k,\ell_k)}\right]$ построить интерполяционный полином $P_{n^{(k,\ell_k)},i}^{(k,\ell_k)}(t)$. Тогда сплайн, аппроксимирующий $W^{(k,\ell_k)}(t)$, в общем случае можно представить как [6]:

$$S^{(k,\ell_k)}(t) = \sum_{i=1}^{n^{(k,\ell_k)}} \alpha_i^{(k,\ell_k)} \cdot P_{n^{(k,\ell_k)},i}^{(k,\ell_k)}(t), \qquad (1)$$

где $\alpha_i^{(k,\ell_k)}$ – набор постоянных коэффициентов в линейно-независимом функциональном базисе $\left\{P_{n^{(k,\ell_k)},i}^{(k,\ell_k)}\right\}$, который существенно зависит от характера поведения $W^{(k,\ell_k)}(t)$ на рассматриваемом интервале $\tau_i^{(k,\ell_k)}$. Так, если

$$W^{(k,\ell_k)}(t) \in C^{\beta}(\tau_i), \qquad (2)$$

то соответствующий аппроксимирующий полином может иметь степень не выше 2β + 1, а при $W^{(k,\ell_k)}(t) \in C^{\infty}(\tau_i)$ возможна аппроксимация и тригонометрическими сплайнами [7].

Рассмотрим построение кусочно-полиномиального сплайна на интервале τ_i при выполнении условия (2). Зададим узлы $t_{j,i}^{(k,\ell_k)}$ $\left(j = 0, n_i^{(k,\ell_k)}\right)$ и определим значения функции в них $W^{(k,\ell_k)}\left(t_{j,i}^{(k,\ell_k)}\right)$. В качестве степени аппроксимирующего полинома будем рассматривать число $\gamma = \overline{0, \beta - 1}$. Для каждого j-го узла построим интерполяционный полином $P_\beta\left(t, W_{j,i}^{(k,\ell_k)}\right)$, исходя из значений в узлах $t_{j-\gamma,i}^{(k,\ell_k)}$, … , $t_{j-\gamma+\beta,i}^{(k,\ell_k)}$. Тогда соответствующий кусочно-полиномиальный сплайн для интервала $\tau_i^{(k,\ell_k)}$ определяется как

$$S_i^{(k,\ell_k)}(t,\beta) = Q_{2\beta+1}^{(k,\ell_k)}(t,j)\,,$$

где $\left.\dfrac{d^m}{dt^m} Q_{2\beta+1}^{(k,\ell_k)}(t,j)\right|_{t=t_{j,i}^{(k,\ell_k)}} = \left.\dfrac{d^m}{dt^m} P_\beta\left(t, W_{j,i}^{(k,\ell_k)}\right)\right|_{t=t_{j,i}^{(k,\ell_k)}}$;

$$\left.\frac{d^m}{dt^m} Q_{2\beta+1}^{(k,\ell_k)}(t,j)\right|_{t=t_{j+1,i}^{(k,\ell_k)}} = \left.\frac{d^m}{dt^m} P_\beta\left(t, W_{j,i}^{(k,\ell_k)}\right)\right|_{t=t_{j+1,i}^{(k,\ell_k)}}; \ m=\overline{1,\beta}.$$

Представим $Q_{2\beta+1}^{(k,\ell_k)}(t,j)$ как $Q_{2\beta+1}^{(k,\ell_k)}(t,j) = P_\beta\left(t, W_{j,i}^{(k,\ell_k)}\right) + R_{2\beta+1}^{(k,\ell_k)}(t,j)$, где $R_{2\beta+1}^{(k,\ell_k)}(t,j)$ – поправка к классическому интерполяционному полиному на интервале τ_i, равная при выполнении (2) [7]:

$$R_{2\beta+1}^{(k,\ell_k)}(t,j) = (t_{j+1}-t_j)^{\beta+1}\cdot W_{2\beta+1}^{(k,\ell_k)}(t_{j-\gamma}, t_{j-\gamma+1}, \ldots, t_{j-\gamma+\beta+1})\cdot q_{2\beta+1}(\tilde{t}, j)\,,$$

где $W_{2\beta+1}^{(k,\ell_k)}(t_{j-\gamma}, t_{j-\gamma+1}, \ldots, t_{j-\gamma+\beta+1})$ – разностное отношение порядка $2\beta+1$;

$$\tilde{t} = \frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j}\,;\ q_{2\beta+1}(\tilde{t},j) = \frac{t_{j+\beta-\gamma+1}-t_{j-\gamma}}{t_{j+1}-t_j}\cdot\sum_{r=0}^{\beta}\left(\left(\frac{d^2}{d\tilde{t}^2}\prod_{\xi=0}^{\beta}\left.\left(\tilde{t}-\frac{t_{j-\gamma+\xi}}{t_{j+1}-t_i}\right)\right|_{\tilde{t}=1}\right)\cdot\theta_r(\tilde{t})\right);$$

$$\theta_r(\tilde{t}) = \frac{\tilde{t}^{\,j+1}\cdot(\tilde{t}-1)^r}{r!\,j!}\cdot\sum_{m=0}^{\beta-r}(-1)^m\frac{(\beta+m)!}{m!}(\tilde{t}-1)^m.$$

В качестве интерполяционного полинома (ИП) в данном случае можно выбрать ИП Лагранжа степени β [7]:

$$P_\beta\left(t, W_{t_{j,i}}^{(k,\ell_k)}\right) = \sum_{m=0}^{\beta} W^{(k,\ell_k)}\left(t_{m,i}^{(k,\ell_k)}\right)\cdot\frac{\prod\limits_{m_1=0}^{\beta}\left(t-t_{m_1,i}^{(k,\ell_k)}\right)}{\prod\limits_{m_2=0}^{m-1}\left(t_{m,i}^{(k,\ell_k)}-t_{m_2,i}^{(k,\ell_k)}\right)\cdot\prod\limits_{m_3=m+1}^{\beta}\left(t_{m,i}^{(k,\ell_k)}-t_{m_3,i}^{(k,\ell_k)}\right)}. \quad (3)$$

В соответствии с [6] можно оценить погрешность (3) как норму значения невязки $R_{\beta,i}^{(k,\ell_k)} = \left\| W^{(k,\ell_k)}(t) - S_i^{(k,\ell_k)}(t,\beta)\right\|_{L_2(\tau_i)}$, следовательно,

$$R_{\beta,j,i}^{(k,\ell_k)}(t) \le \sup_{t\in\tau_{j,i}^{(k,\ell_k)}} \left| \frac{d^{n_i^{(k,\ell_k)}}}{dtn_i^{(k,\ell_k)}} W_{j,i}^{(k,\ell_k)}(t) \right| \cdot \frac{\prod_{m=0}^{\beta}(t-t_{m,i}^{(k,\ell_k)})}{(\beta+1)!}, \tag{4}$$

т.е. при увеличении β растет точность интерполяционного приближения, однако увеличивается сложность обработки.

Поэтому выбор значения $\beta^{(i)} \le \beta$ для каждого интервала τ_i является отдельной задачей, зависящей от требований к аппроксимации $W^{(k,\ell_k)}(t)$.

2. Итерационный метод оценки адекватности. Используя (1) – (4) можно предложить интерполяционный метод оценки адекватности обобщенного сплайна $S = \bigcup_{k=1}^{K}\bigcup_{\ell=1}^{L} S^{(k,\ell)}(t)$ реальному трафику на интервале $[t_o, T_c]$.

Представим интервал $[t_o, T_c]$ как объединение I временных интервалов

$$[t_o, T_c] = \bigcup_{i=1}^{I}[t_{i-1}, t_i], \quad t_i\big|_{i=0} = t_o;\ t_i\big|_{i=I} = T_c,$$

на каждом из которых проводилось число измерений, необходимое для построения сплайн-полинома требуемой степени гладкости. В качестве критерия точности интерполяции будем использовать $\varepsilon_i^{(k,\ell)}$-ограниченную невязку [8]:

$$\rho\left(W^{(k,\ell)}(t), P_m^{(k,\ell)}(t)\right) \le \varepsilon_i^{(k,\ell)}, \tag{5}$$

где $t \in \tau_i = [t_{i-1}, t_i]$; m – степень интерполирующего полинома, равная

$$m = \arg\min_{m'} P_{m'}^{(k,\ell)}(t); \tag{6}$$

а расстояние $\rho(\bullet)$ определено в пространстве $L_2[t_o, T_c]$, т.е.

$$\rho\left(W^{(k,\ell)}(t), P_m^{(k,\ell)}(t)\right) = \sup_{t\in\tau_i}\left|W^{(k,\ell)}(t) - P_m^{(k,\ell)}(t)\right|. \tag{7}$$

Введя обозначение $\widetilde{W}_m^{(k,\ell)} = \sup_{t\in\tau_i}\left|\frac{d^m W^{(k,\ell)}(t)}{dt^m}\right|$ и используя (6), (7), можно критерий (5) записать как

$$\sup_{t\in\tau_i}\left|W^{(k,\ell)}(t) - P_m^{(k,\ell)}(t)\right| \le \frac{\widetilde{W}_{m+1}^{(k,\ell)}}{(m+1)!}\sup_{t\in\tau_i}\left|\prod_{r=0}^{m}(t-t_r)\right| \le \varepsilon_i^{(k,\ell)}. \tag{8}$$

Тогда из (8) можно найти для каждой пары (k,ℓ) значения $\widetilde{m}^{(k,\ell)}$ и

$W^{(k,\ell)}_{\widetilde{m}^{(k,\ell)}+1}$, при которых будет обеспечена требуемая точность интерполяции, выбирая $t_j^{(i)}$ и t_i таким образом, чтобы эти значения совпадали с корнями многочлена Чебышева $t_j^{(i)} = \frac{t_{i-1}+t_i}{2} - \frac{t_{i+1}+t_i}{2}\cos\left(\frac{2j-1}{2m}\pi\right)$, $j \in \overline{1,m}$, для использования известной [3] верхней оценки

$$\sup_{t\in\tau_i}\left|\prod_{r=0}^{m}(t^{(i)} - t_r^{(i)})\right| \le 2\left(\frac{t_{i-1}-t_i}{4}\right)^m. \tag{9}$$

Оценивая адекватность сплайн-интерполяции реальному трафику с использованием (5) – (9) на каждом из шагов итерации будем проводить анализ (8) на степень несоответствия по всем $k \in \overline{1,K}$ и $\ell = \overline{1,L}$ [8] и в зависимости от степени отклонения от $\varepsilon_i^{(k,\ell)}$ проводить новое разбиение $[t_o, T_c]$. Согласно [8] данный интегральный процесс является быстросходящимся и позволяет определить полиномиальную сплайн-интерполяцию трафика, обладающую высокой точностью аппроксимации суммарного трафика ШЦСИО W(t) на интервале $[t_o, T_c]$, описывающем типичную сессию сети.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Предложенный метод можно использовать при проведении оценки адекватности сплайновой интерполяции трафика широкополосной цифровой сети интегрального обслуживания. Для почти регулярного трафика возможна реализация метода в режиме реального времени с динамическим уточнением постоянных коэффициентов сплайна (1). Отсутствие быстрой сходимости описанного выше итерационного процесса будет свидетельствовать о невозможности сплайновой интерполяции из-за наличия большого количества нерегулярных составляющих, моделирование которых является **направлением дальнейших исследований** в рассматриваемом вопросе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чураков Е.П. Оптимальные и адаптивные системы. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 242 с.*
2. *Халсалл Ф. Передача данных, сети компьютеров и взаимосвязь открытых систем. – М.: Радио и связь, 1995. – 408 с.*
3. *Ершов В.А., Ковалёв В.В. Метод расчета пропускной способности звена передачи Ш-ЦСИС // Электросвязь. – 2000. – № 3. – С. 18 – 26.*
4. *Кучук Г.А. Фрактальный гауссовский шум в трафиковых трассах // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ. – 2004. – Вип. 3. – С. 91 – 99.*
5. *Аджемов А.С., Сонева И.С. Метод аналогово-цифровых преобразований на основе сплайн-интерполяции // Электросвязь. – 1998. – № 2. – С. 37 – 39.*

6. *Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближений. – М.: Наука, 1984. – 352 с.*
7. *Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и математическое обеспечение. – М.: Мир, 1998. – 576 с.*
8. *Варакин Л.Е. Интеллектуальная сеть // Электросвязь. – 1992. – № 1. – С. 2 – 7.*

Поступила 31.03.2004

***КУЧУК Георгий Анатольевич**, канд. техн. наук, ст. наук. сотр., нач. НИО ИВЦ ХВУ. В 1977 году окончил мехмат Московского госуниверситета. Область научных интересов – оптимизация информационных систем.*