УДК 681.3

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАИМЕНЬШЕМ ПОКРЫТИИ

к.т.н. А.Ю. Гуль, О.И. Пыкало, А.В. Сидоренко
(представил д.ф-м.н., проф. С.В. Смеляков)

Рассматривается метод решения ЗНП на основе идей рангового подхода, позволяющий оперативно получать минимальное числом СРЛ, обеспечивающих покрытие всех зон радиолокационного поля.

Постановка проблемы. Довольно часто в процессе моделирования приходится решать задачу выбора минимального набора средств для обеспечения заданных параметров работы всей системы. Примером такой задачи может быть задача определения минимального числа радиолокационных станций (РЛС) и мест их размещения для обеспечения требуемых параметров радиолокационного поля (РЛП). Для решения этой задачи предварительно необходимо определить $N > n$ позиций для n РЛС. Территорию района представим в виде матрицы $A = \|a_{ij}\|$ с M строками, соответствующими номерам зон радиолокационного поля, которые должны быть покрыты с помощью РЛС, и N столбцами, соответствующими номерам позиций РЛС, в которой элементы a_{ij} принимают значение, равное 1, если РЛС, установленная на j-й позиции, покрывает i-й квадрат и 0 – в противном случае. Введем параметр x_j, определяющий выбор j-й позиции в качестве основной:

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{ если } j\text{-я позиция выбирается в качестве основной;} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

В этом случае задача отыскания оптимального размещения РЛС сводится к поиску минимального покрытия всех строк в матрице A некоторым множеством столбцов, т.е. необходимо найти вектор x^*, минимизирующий целевую функцию

$$L = \sum_{j=1}^{M} c_j x_j \to \min, \qquad (1)$$

удовлетворяющий ограничениям:

$$\sum_{j=1}^{M} a_{ij} x_j \geq 1, \quad i = \overline{1,N}; \qquad (2)$$
$$x_j \in \{0,1\}, \quad c_j \geq 0,$$

где $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i\text{-я зона может быть покрыта с } j\text{-й позиции}, \\ 0, \text{в противном случае}. \end{cases}$

Коэффициенты целевой функции c_j характеризуют степень приспособленности позиции для размещения на ней РЛС. В частности, в качестве такого весового коэффициента может выбираться вероятность поражения РЛС при отражении удара средств воздушного нападения противника. При равноценности позиций все весовые коэффициенты c_j целевой функции будут равны 1.

Анализ литературы. Данная задача относится к классу задач целочисленного линейного программирования (ЦЛП) и в теории графов эта задача получила название задачи о наименьшем покрытии (ЗНП) [1]. Наличие значительных трудностей и специфических особенностей в решении задач ЦЛП породило большое количество методов и алгоритмов их решения.

Цель статьи. Главной проблемой при решении задач ЦЛП является время их решения, т.е. процесс решения задачи (1 – 2) должен осуществляться с учетом динамики боевых действий, что налагает временные ограничения на время ее решения. Известные методы решения задачи (1 – 2) могут не обеспечить заданную оперативность и сократить тем самым время, оставшееся на перемещение самих РЛС. В работе предлагается подход, позволяющий повысить оперативность решения задачи (1 – 2).

Решение задачи. Для этого представим матрицу A в виде графа G с множеством вершин n, равным числу столбцов в матрице A, и множествами мультиребер {i, j}, получаемых путем перечисления всех возможных сочетаний C_i^2, где i – номера столбцов матрицы A, соответствующие единичным элементам в j-й строке, при этом каждому мультиребру (i, j) присвоим номер строки j. Таким образом, каждой j-й строке матрицы A в графе G соответствует клика из ребер с номерами j, образованная на множестве вершин, соответствующих номерам столбцов в матрице A, в которых в j-й строке расположена единица. При этом будем полагать, что в матрице A все строки содержат две и более единиц. Например, для матрицы A мультиграф G будет иметь вид, представленный на рис. 1. Из правил построения мультиграфа следует следующее утверждение.

Утверждение 1. Подмножество вершин мультиграфа матрицы A, инцидентных ребрам с номерами 1, 2, … , n, определяет покрытие строк столбцами в матрице A.

Следствие. Минимальное число вершин мультиграфа, которым инцидентны ребра с номерами 1, 2, … , m, соответствует минимальному числу столбцов, покрывающих единицами все строки в матрице A.

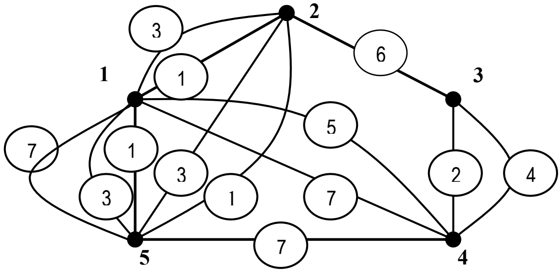


Рис. 1. Мультиграф G матрицы A

Преобразуем мультиграф G в неориентированный граф G(V, E), в котором все мультиребра заменены одним ребром (рис. 2) – это граф преобразования мультиграфа G. Тогда справедливо следующее утверждение.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

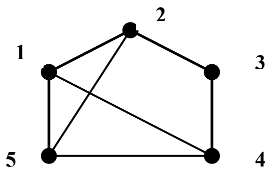


Рис. 2. Неориентированный граф G(V, E) после замены мультиребер одним неориентированным ребром

Утверждение 2. Минимальное вершинное покрытие (МВП) графа преобразования определяет подмножество вершин в мультиграфе G, инцидентное номерам ребер 1, 2, … , m.

Доказательство. Пусть множество вершин графа преобразования $\{V_k, V_l ,\ldots ,V_q\}$ образует в нем минимальное вершинное покрытие, т.к. в мультиграфе каждое ребро вырождается в некоторое подмножество параллельных ребер. Значит, множество вершин $\{V_k, V_l, \ldots , V_q\}$ в мультиграфе G тоже покрывает все ребра и, следовательно, инцидентно ребрам с номерами 1, 2, … , m, что и требовалось доказать.

В мультиграфе каждой вершине i соответствует подмножество инцидентных ребер с подмножеством номеров Ω_i. Обозначим минимальное вершинное покрытие графа преобразования $Y = \{y_1, y_2, \ldots , y_k\}$. Каждой вершине $y_i \in Y$ в мультиграфе G инцидентно некоторое подмножество ребер Ω_i :

$$y_1 \to \Omega_1;$$
$$\ldots\ldots\ldots \qquad (3)$$

$$y_к \to \Omega_к.$$

На основе подмножеств Ω_i номеров ребер построим полный граф $G_П$ с k вершинами, в котором каждой вершине i соответствует множество Ω_i. Произвольную клику графа $G_П$, состоящую, например, из вершин (p, l, t), будем характеризовать объединением подмножеств $\{\Omega_p \cup \Omega_l \cup \Omega_t\}$. Ясно, что клика минимальной мощности в графе $G_П$, содержащая все множество номеров ребер $\{1, 2, \dots , m\}$, определяет подмножество вершин $\{y_1, y_2, \dots , y_k\}$ в мультиграфе G, покрывающее m ребер с номерами $\{1, 2, \dots , m\}$, и минимальное покрытие столбцами матрицы A с номерами столбцов соответственно $\{y_1, y_2, \dots , y_k\}$.

Нетрудно видеть, что перед поиском клики граф $G_П$ может быть упрощен за счет исключения вершин по правилу L: если $\Omega_i \subset \Omega_j$, то Ω_i и соответствующая ему y_i исключаются из рассмотрения. Для решения задачи используем представление графа $G_П$ в виде стянутого дерева D всех путей (рис. 3) [3].

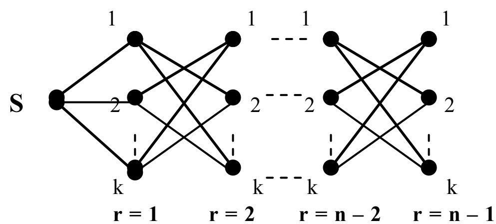


Рис. 3. Стянутое дерево всех путей D

Рассмотрим алгоритм определения клики минимальной мощности в графе $G_П$. Каждую вершину графа D характеризуем весовой характеристикой α, равной числу элементов во множестве Ω_i. Максимальное значение α равно m, следовательно, задача построения клики сводится к поиску пути длины m в графе D минимально возможного ранга r_{min}.

Алгоритм $A_П$ определения клики минимальной мощности в графе $G_П$. Шаг 1. Формируем в графе D пути ранга r = 1 и вычисляем их длины, определяемые весовыми характеристиками α.

Шаг 2. Определяем на ярусе r путь μ_{sj}^{*r} максимальной длины. Проверяем, есть ли путь длины m. Если есть, то алгоритм заканчивает работу, иначе переходим к выполнению шага 3.

Шаг 3. На основе пути текущего ранга μ_{sj}^{*r} строим все возможные пути ранга r + 1.

Шаг 4. Увеличиваем значение текущего ранга r := r + 1 и переходим к шагу 2.

Минимальным вершинным покрытием графа G(V, E) (рис. 2) являются подмножества вершин: {245}; {135}; {124}. Но по отношению к графу G (рис. 1) эти вершинные покрытия являются избыточными. Так, вершинам 2, 4, 5, образующим минимальное вершинное покрытие в мультиграфе, соответствуют ребра с номерами соответственно

$$2 \rightarrow (1, 3, 6) = \Omega_2; \quad 4 \rightarrow (2, 4, 5, 7) = \Omega_4; \quad 5 \rightarrow (1, 3, 7) = \Omega_5.$$

Анализ работы алгоритма $A_П$ показывает, что вершины (2, 4) соответствуют столбцам 2 и 4, образующим в матрице A минимальное покрытие (табл. 1).

Таблица 1

Результаты работы алгоритма $A_П$

S2(1,3,6)(α = 3),2	S42(1,2,3,4,5,6,7) (α = 7),2	S425 ,2
S4(2,4,5,7)(α = 4),4	S24(1,2,3,4,5,6,7) (α = 7),4	S245, 4
S5(1,3,7)(α = 3),5	S25(1,3,6,7) (α = 4) S45(1,2,3,5,7) (α = 6),5	S254, 5

Выводы. Нетрудно показать, что суммарная временная сложность точного алгоритма решения задачи определения минимального покрытия матрицы A на основе ее сведения к задаче о минимальном вершинном покрытии в графе не может превысить $O(mn^3)$. Результаты экспериментального сравнения разработанного алгоритма с известными приведены на рис. 4. Сравнение проводилось по среднему значению числа элементарных операций (ЭО), выполняемых указанными алгоритмами.

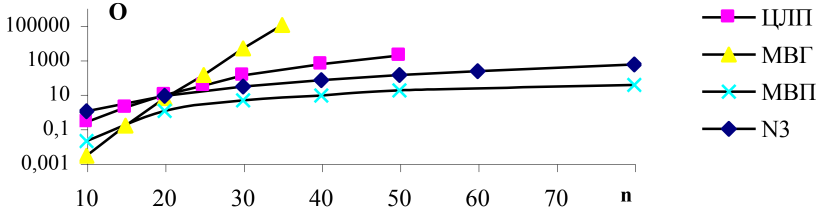
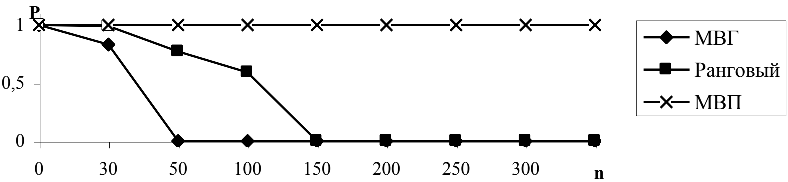


Рис. 4. Зависимость числа элементарных операций, выполняемых алгоритмами от размерности решаемой задачи.

Для обеспечения объективности сравнения плотность ребер в графе была выбрана равной 0,01, т.е. рассматривался случай, когда число вершинных покрытий экспоненциально растет с увеличением числа вершин в графе. На рис. 4 надписи ЦЛП соответствует алгоритм, основанный на ранговом подходе, надписи МВГ – алгоритм на основе метода ветвей и границ, надписи МВП соответствует описанный в данной статье алгоритм определения минимального вершинного покрытия. Для наглядности сравнения, на рис. 5 приведен график зависимости $y = n^3$, обозначенный N3. Из рис. 5 следует, что метод ветвей и границ практически неприменим при значениях $n > 30$, а предложенный алгоритм определения МВП практически в n^2 раз быстрее по сравнению с алгоритмом, основанном на идеях рангового подхода [4]. Среднее время решения задачи определения МВП при плотностях ребер, изменяющихся в диапазоне от 0,01 до 0,9, и n изменяющемся до 300, не превышало 10 – 30 секунд. Оценка показателя оперативности решения задачи создания единого радиолокационного по-



ля в условиях противодействия противника показала (рис. 5), что решение

Рис. 5. Зависимость показателя оперативности решаемой задачи от ее размерности

задачи (1 – 2) алгоритмами, основанными на предложенном графовом подходе (МВП), обеспечивает заданную точность вычислений при допустимых временных и ресурсных затратах при уровне оперативности $P \geq 0{,}9$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 309 с.

2. Городнов В.П. Моделирование боевых действий частей, соединений и объединений войск ПВО. – Х.: ВИРТА ПВО, 1987. – 380 с.

3. Листровой С.В. Параллельный алгоритм для задачи о кратчайших маршрутах на графе // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – № 4. – 1990. – С. 23 – 39.

4. Листровой С.В., Гуль А.Ю., Шубина Г.В. Алгоритм точного решения задачи о наименьшем покрытии // Модели и системы. – 1999. – № 1. – С. 50 – 52.

Поступила 27.03.2004

ГУЛЬ Александр Юрьевич*, канд. техн. наук, начальник НИЛ ХИ ВВС. Область научных интересов – применение задач дискретной оптимизации в радиотехнических системах.*

ПЫКАЛО Олег Иванович*, научный сотрудник ХИ ВВС. Область научных интересов – применение задач дискретной оптимизации в радиотехнических системах.*

СИДОРЕНКО Андрей Владимирович*, адъюнкт ХВУ. В 2001 году окончил ХВУ. Область научных интересов – применение задач дискретной оптимизации в радиотехнических системах.*