УДК 519.8 (075)

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ЗАТРАТ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОДРАЗДЕЛЕНИЙ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СТРУКТУР

к.т.н. А.И. Лысенко, И.А. Сорокина

Представленная статья связана с актуальными вопросами повышения эффективности деятельности распределенных систем в условиях риска и неопределенности рынка. Предметом исследования является проблема оптимального управления производственными затратами технологически взаимосвязанных операционных подразделений распределенной структуры с позиции принципа жесткой централизации управления.

Постановка проблемы. В условиях рыночной экономики вопросы организации распределенных структур, состоящих из различных, но технологически взаимосвязанных операционных подразделений, одни из которых привлекают, а другие размещают определенного вида ресурсы, являются весьма актуальными.

При этом возникает проблема оптимального управления производственными затратами функциональных подсистем распределенной организации. Если исследование операций ведется с позиции принципа жесткой централизации управления [1], проблема сводится к решению задачи математического программирования. Общеизвестно, что универсальных методов решения задач математического программирования не существует, поэтому алгоритмизация решения конкретного вида задач нелинейного программирования представляет научный интерес, как с теоретической, так и с практической стороны.

Типовая структурно-функциональная модель такого управления представлена на рис. 1, где: $ЦД_j$ – центр деятельности, размещающий j-й вид ресурсов; $ЦД_i$ – центр деятельности, привлекающий i-й вид ресурсов; ЦО – центр ответственности, аккумулирующий и распределяющий ресурсы; Q_j – приведенный объем размещаемого j-го вида ресурса; Q_i – приведенный объем привлекаемого i-го вида ресурса; x_k – косвенные производственные затраты k-го центра деятельности; y_k – прямые производственные затраты k-го центра деятельности; $j = \overline{1, m}$;

$i = \overline{(m+1),(m+n)};\ \ k = \overline{1,(m+n)}.$

Функционирование отдельного операционного подразделения, привлекающего либо размещающего ресурсы, может быть описано с помощью факторной модели в виде производственных функций типа Кобба-Дугласа с убывающей отдачей:

$$Q_k = a_k x_k^{\alpha_k} y_k^{\beta_k},\ a_k = \sigma_k \mu_k,\ \forall\ k \in \left\{\overline{1,(m+n)}\right\}, \tag{1}$$

где $\sigma_k, \alpha_k, \beta_k$ – параметры модели; μ_k – коэффициенты приведения различных видов ресурсов к одной мере оценки.

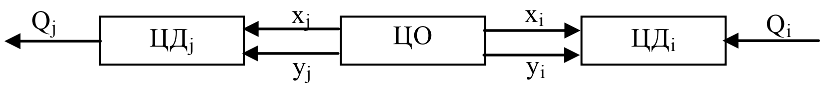

Рис. 1. Структурно-функциональная схема технологически взаимосвязанных операционных подразделений

Необходимо определить оптимальное распределение производственных затрат:

$$\bar{x}_k = (x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n});\ \bar{y}_k = (y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}, \ldots, y_{m+n}); \tag{2}$$

$$j \in \left\{\overline{1,m}\right\};\ i \in \left\{\overline{(m+1),(m+n)}\right\};\ k \in \left\{\overline{1,(m+n)}\right\},$$

доставляющее максимум эффективности функционирования всей системы в целом

$$E(\bar{x},\bar{y}) = \frac{q\sum\limits_{j=1}^{m} a_j x_j^{\alpha_j} y_j^{\beta_j} - p\sum\limits_{i=m+1}^{m+n} a_i x_i^{\alpha_i} y_i^{\beta_i}}{\sum\limits_{k=1}^{m+n} a_k + \sum\limits_{k=1}^{m+n} y_k}, \tag{3}$$

при условиях:

$$g(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{j=1}^{m} a_j x_j^{\alpha_j} y_j^{\beta_j} - \sum_{i=m+1}^{m+n} a_i x_i^{\alpha_i} y_i^{\beta_i} = 0; \tag{4}$$

$$g_{N_1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{j=1}^{m} a_j x_j^{\alpha_j} y_j^{\beta_j} \ge N; \tag{5}$$

$$g_{N_2}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=m+1}^{m+n} a_i x_i^{\alpha_i} y_i^{\beta_i} \ge N; \tag{6}$$

$$g_W(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{k=1}^{m+n} a_k + \sum_{k=1}^{m+n} y_k \le W; \tag{7}$$

$$\bar{x} \ge \bar{c};\ \ \bar{y} \ge 0;\ \ j \in \{1, m\};\ i \in \{\overline{(m+1), (m+n)}\}, \tag{8}$$

где p – цена привлечения приведенной единицы i-го вида ресурса; q – цена размещения приведенной единицы j-го вида ресурса; N – безубыточный объем приведенных ресурсов; W – располагаемая величина производственных затрат.

Описанную задачу можно рассматривать как следующую задачу математического программирования:

$$\max_{\bar{x}, \bar{y}} E(\bar{x}, \bar{y}) \tag{9}$$

при условиях:

$$g(\bar{x}, \bar{y}) = 0; \tag{10}$$

$$g_{N_1}(\bar{x}, \bar{y}) \ge N; \tag{11}$$

$$g_{N_2}(\bar{x}, \bar{y}) \ge N; \tag{12}$$

$$g_W(\bar{x}, \bar{y}) \le W; \tag{13}$$

$$\bar{x} \ge \bar{c};\ \ \bar{y} \ge 0. \tag{14}$$

Целевая функция $E(\bar{x}, \bar{y})$, не являясь вогнутой на соответствующем множестве определения при условии $(q-p) > 0$, принадлежит более широкому классу функций, для которых из условия

$$(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)\, \nabla E(\bar{z}_1) \le 0, \quad \forall\, \bar{z}_1, \bar{z}_2 \in \{\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) \mid \bar{x} \ge \bar{c} > 0, \bar{y} \ge 0\}; \tag{15}$$

следует

$$E(\bar{z}_1) \ge E(\bar{z}_2). \tag{16}$$

Такие функции называются псевдовогнутыми и обладают следующим свойством: любая последовательность точек на множестве $\{\bar{z} \mid \bar{z} > 0\}$, обращающая градиент функции в нуль, приводит в положение ее глобального максимума.

Таким образом, целевая непрерывная функция $E(\bar{x}, \bar{y})$ является строго псевдовогнутой на допустимом выпуклом множестве, которое предполагается непустым и компактным.

Согласно теореме Веерштраса непрерывная функция $E(\bar{x}, \bar{y})$, определенная на непустом компактном множестве, достигает глобального максимума на внутренней или граничной точке допустимого множества.

Пусть глобальный максимум целевой функции $E(\bar{x}, \bar{y})$ достигается в точке, не принадлежащей ни одному из ограничений (11) – (13).

В этом случае максимизирующую точку определяем из решения следующей задачи нелинейного программирования:

$$\max_{\bar{x}, \bar{y}} E(\bar{x}, \bar{y})\ ;\quad g(\bar{x}, \bar{y}) = 0;\quad \bar{x} \ge \bar{c};\ \ \bar{y} \ge 0.$$

Применение метода множителей Лагранжа приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial y_k}(\bar{x},\bar{y}) = 0, \ k = \left\{\overline{1,(m+n)}\right\}; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_j}(\bar{x},\bar{y}) = 0, \ j \in I_j; \\ x_i = c_i, \ i \in I_i; \\ g(\bar{x},\bar{y}) = 0, \end{cases} \tag{17}$$

где

$$L(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) = \frac{qg_{N_1}(\bar{x},\bar{y}) - pg_{N_2}(\bar{x},\bar{y})}{g_W(\bar{x},\bar{y})} + \lambda\bigl(0 - g(\bar{x},\bar{y})\bigr), \quad \lambda \neq 0, \tag{18}$$

$$I_j \cup I_i = \left\{\overline{1,(m+n)}\right\}, I_j \cap I_i = \varnothing; \ I_j, I_i = \varnothing; \ldots, \left\{\overline{1,(m+n)}\right\}. \tag{19}$$

Пусть глобальный максимум целевой функции $E(\bar{x},\bar{y})$ достигается в точке, принадлежащей границе допустимого множества, которая задана уравнениями (11) – (12).

Тогда максимизирующая точка определяется (9) – (12), (14).

Метод множителей Лагранжа приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial y_k}(\bar{x},\bar{y}) = 0, \ k = \left\{\overline{1,(m+n)}\right\}; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_j}(\bar{x},\bar{y}) = 0, \ j \in I_j; \\ x_i = c_i, \ i \in I_i; \\ g_{N_1}(\bar{x},\bar{y}) = N; \ g_{N_2}(\bar{x},\bar{y}) = N, \end{cases} \tag{20}$$

где

$$L(\bar{x},\bar{y}) = \frac{(q-p)N}{g_W(\bar{x},\bar{y})} + \lambda_1\bigl(N - g_{N_1}(\bar{x},\bar{y})\bigr) + \lambda_2\bigl(N - g_{N_2}(\bar{x},\bar{y})\bigr), \ \lambda_1 \neq 0, \ \lambda_2 \neq 0; \tag{21}$$

$$I_j \cup I_i = \left\{\overline{1,(m+n)}\right\}, I_j \cap I_i = \varnothing; \ I_j, I_i = \varnothing; \ldots, \left\{\overline{1,(m+n)}\right\}. \tag{22}$$

Пусть глобальный максимум целевой функции $E(\bar{x},\bar{y})$ достигается в точке, принадлежащей границе допустимого множества, которая задана уравнением

$$g_W(\bar{x},\bar{y}) = W. \tag{23}$$

Тогда максимизирующая точка определяется решением следующей задачи математического программирования:

$$\max_{\bar{x},\bar{y}} E(\bar{x},\bar{y}); \;\; g(\bar{x},\bar{y}) = 0; \;\; g_W(\bar{x},\bar{y}) = W; \;\; \bar{x} \ge \bar{c}; \;\; \bar{y} \ge 0.$$

Применение метода множителей Лагранжа приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial y_k}(\bar{x},\bar{y}) = 0, \;\; k = \left\{\overline{1,(m+n)}\right\}; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_j}(\bar{x},\bar{y}) = 0, \;\; j \in I_j; \\ x_i = c_i, \;\; i \in I_i; \\ g(\bar{x},\bar{y}) = 0; \, g_W(\bar{x},\bar{y}) = W, \end{cases} \tag{24}$$

где

$$L(\bar{x},\bar{y}) = \frac{q g_{N_1}(\bar{x},\bar{y}) - p g_{N_2}(\bar{x},\bar{y})}{W} + \lambda_1\left(0 - g(\bar{x},\bar{y})\right) + \lambda_2\left(W - g_W(\bar{x},\bar{y})\right),$$

$$\lambda_1 \ne 0, \;\; \lambda_2 \ne 0; \tag{25}$$

$$I_j \cup I_i = \left\{\overline{1,(m+n)}\right\}, \, I_j \cap I_i = \varnothing; \;\; I_j, I_i = \varnothing; \ldots, \left\{\overline{1,(m+n)}\right\}. \tag{26}$$

Пусть глобальный максимум целевой функции $E(\bar{x},\bar{y})$ достигается в точке, принадлежащей границам допустимого множества, которые задана уравнениями (11) – (12), (23).

Тогда максимизирующая точка определяется решением следующей задачи математического программирования:

$$\max_{\bar{x},\bar{y}} E(\bar{x},\bar{y}); \;\; g_{N_1}(\bar{x},\bar{y}) \ge N; \; g_{N_2}(\bar{x},\bar{y}) \ge N; \; g_W(\bar{x},\bar{y}) = W; \;\; \bar{x} \ge \bar{c}; \;\; \bar{y} \ge 0.$$

Метод множителей Лагранжа приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial y_k}(\bar{x},\bar{y}) = 0, \;\; k = \left\{\overline{1,(m+n)}\right\}; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_j}(\bar{x},\bar{y}) = 0, \;\; j \in I_j; \\ x_i = c_i, \;\; i \in I_i; \\ g_{N_1}(\bar{x},\bar{y}) = N; \, g_{N_2}(\bar{x},\bar{y}) = N; \\ g_W(\bar{x},\bar{y}) = W; \\ \bar{x} \ge \bar{c}, \;\; \bar{y} \ge 0, \end{cases} \tag{27}$$

где

$$L(\bar{x},\bar{y}) = \frac{(q-p)N}{W} + \lambda_1\left(N - g_{N_1}(\bar{x},\bar{y})\right) + \lambda_2\left(N - g_{N_2}(\bar{x},\bar{y})\right) + \lambda_3\left(W - g_W(\bar{x},\bar{y})\right),$$

$$\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0; \qquad (28)$$

$$I_j \cup I_i = \left\{\overline{1,(m+n)}\right\}, I_j \cap I_i = \varnothing;\ I_j, I_i = \varnothing; \ldots, \left\{\overline{1,(m+n)}\right\}. \qquad (29)$$

Решение каждой из четырех полученных систем уравнений сводится к последовательному рассмотрению случаев внутреннего $I_i = \varnothing$ и граничных решений, когда сначала лишь одна из переменных $x_k, k = \overline{1,(m+n)}$ принадлежит границе $\bar{x} = \bar{c}$ допустимого множества, затем фиксируются две компоненты вектора $\bar{x}$, потом три, четыре и так далее до одновременной фиксации всех переменных $x_k, k = \overline{1,(m+n)}$.

На последнем этапе вычисляются значения целевой функции $E(\bar{x}, \bar{y})$ для всех полученных решений. Наибольшее из всех полученных значений будет глобальным максимумом целевой функции на допустимом множестве, а значение векторов $\bar{x}^*, \bar{y}^*$, доставляющих этот глобальный максимум, будет искомым решением сформулированной задачи математического программирования.

Выводы. Таким образом, проблема оптимального управления производственными затратами технологически взаимосвязанных операционных подразделений распределенной структуры моделируется задачей математического программирования. Решение сформулированной задачи сведено к последовательному рассмотрению систем нелинейных уравнений и выбору из получаемых решений наилучшего с позиции критерия эффективности функционирования всей системы в целом. Описанная процедура легко реализуется на ПЭВМ с использованием стандартной программы для решения нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений методом Ньютона.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кучмиев В.Г., Лысенко А.И. Организационно-функциональное моделирование различных принципов управления в распределенных финансово-кредитных системах // Вестник "ХПИ". Системный анализ, управление и информационные технологии. – Х.: НТУ "ХПИ". – 2002. – № 8. – Т. 1. – С. 120 – 131.*

Поступила 12.04.2004

***ЛЫСЕНКО Александр Иванович**, канд. техн. наук, доцент, доцент факультета экономики и менеджмента Национального аэрокосмического университета "ХАИ". В 1967 году окончил ХАИ. Область научных интересов – исследование операций, теория игр.*

***СОРОКИНА Ирина Анатольевна**, аспирантка кафедры менеджмента факультета экономики и менеджмента Национального аэрокосмического университета "ХАИ", который окончила в 2002 г. Область научных интересов – организационное управление.*