

УДК 621.9.06

В.Б. Струтинський<sup>1</sup>, В.М. Чуприна<sup>2</sup><sup>1</sup> Національний технічний університет України „КПІ“, Київ<sup>2</sup> Державний науково-випробувальний центр Збройних Сил України, Чернігів

## РОЗРОБКА ТЕНЗОРНО-ГЕОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ ПРОСТОРОВОЇ ЖОРСТКОСТІ ШПИНДЕЛЬНОГО ВУЗЛА МЕТАЛОРІЗАЛЬНОГО ВЕРСТАТА

На основі тензорно-математичного підходу виконано теоретичне обґрунтування пружних властивостей конструкції шпиндельних вузлів верстатів в тривимірному просторі. Запропонована тензорно-геометрична модель просторової жорсткості шпиндельного вузла металорізального верстату в зоні різання у формі еліпсоїду жорсткості. Модель дозволяє визначити величину деформацію шпинделя від діючого силового навантаження в будь-якому напрямку робочого простору.

**Ключові слова:** тензор, жорсткість, верстат, шпиндельний вузол, еліпсоїд, тривимірний простір, математична модель.

### Вступ

В сучасних умовах інтенсифікації виробничих процесів технологічні можливості металорізального верстата визначають ряд показників якості, з яких одним з найважливіших є жорсткість конструкції. Вона забезпечується як фізичними властивостями матеріалів окремих деталей, так і жорсткістю вузлів і елементів конструкції. Шпиндельний вузол (ШВ) – це важливий елемент верстата, який у великій мірі визначає жорсткість конструкції в цілому, зокрема і динамічну [3]. Дослідженню пружних властивостей ШВ присвячено багато робіт вітчизняних і закордонних дослідників [1, 3, 5, 7].

Пружні характеристики ШВ зазвичай оцінюються в зоні різання за радіальною жорсткістю пружної системи  $c_{ШВ}$  (Н/м), або її зворотною величиною – податливістю  $\delta_{ШВ}$  (м/Н). Радіальна жорсткість ШВ як правило нормується на фланці шпинделя, причому радіальна жорсткість вузла повинна складати не менше 25-35 даН/мкм, а осьова є значно вищою (визначається жорсткістю упорного підшипника).

Конструктивна жорсткість ШВ залежить від багатьох параметрів: зовнішнього і внутрішнього діаметрів шпинделя, відстані між опорами, довжин консолей і хвостовика, кількості опор шпинделя та їх типів, а також інших факторів.

При моделюванні технічних об'єктів широко застосовується тензорне числення і тензорно-геометричні математичні моделі процесів та систем [6]. Найбільш повно пружні властивості ШВ описуються просторовими величинами жорсткості конструкції з застосуванням матрично-тензорних величин. Ці величини дозволяють визначити значення жорсткості (або податливості) ШВ в заданій точці, причому в будь-якому напрямку тривимірного простору.

Знаючи діюче силове навантаження на шпиндель, на базі матрично-тензорного опису просторо-

вої жорсткості ШВ можна визначити величини деформацій шпинделя в будь-якому довільному напрямку, зокрема в напрямку формування похибок обробки. Це дає можливість застосовувати тензорно-математичні моделі жорсткості ШВ для більш достовірної оцінки точності обробки на верстаті.

Проте, на сьогодні не представлена достовірна модель жорсткості ШВ, яка достатньо повно і точно описує його просторову жорсткість.

**Метою статті є:**

- теоретичне обґрунтування пружних властивостей конструкції шпиндельних вузлів верстатів в тривимірному просторі;

- побудова просторової тензорно-геометричної моделі жорсткості ШВ для оцінки пружно-деформаційних властивостей його конструкції.

### Основний матеріал

Тензорно-математичну модель будемо складаати на прикладі типового ШВ токарного верстату.

Загальний вид 3D-моделі ШВ (в ізометрії) показаний на рис. 1.

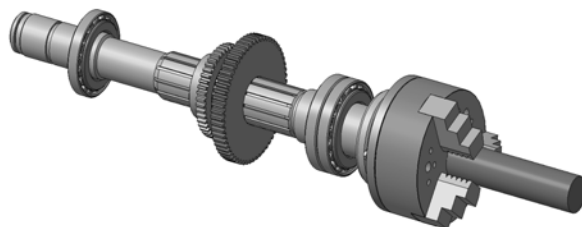


Рис. 1. Шпиндельний вузол токарного верстата

При обробці деталей на металорізальному верстаті з технологічної точки зору важливо забезпечити високу жорсткість пружної системи, особливо в зоні різання. При цьому жорсткість в зоні різання обумовлена як жорсткістю елементів ШВ (вала шпинделя, підшипників), так і жорсткістю техноло-

гічного оснащення (патрон, оправка, інструмент), тобто визначається як інтегральна.

Для аналізу пружно-деформаційних властивостей ШВ виконаємо розробку тензорно-геометричної математичної моделі ШВ з урахуванням приведення жорсткості в кінцеву точку – зону різання [4]. При цьому враховуємо, що жорсткість ШВ в різних напрямках робочого простору змінюється суттєво, причому в першому наближенні вона розподіляється за формою еліпсоїда.

В якості інваріанта для аналізу пружно-деформаційних властивостей ШВ про різанні приймемо роботу узагальнених сил на малих переміщеннях

$$\text{Inv} = A_f = \sum (\bar{f} \cdot d\bar{q}), \quad (1)$$

де  $A_f$  – робота узагальнених сил;

$\bar{f}$  – вектор узагальнених сил ШВ;

$d\bar{q}$  – вектор узагальнених пружних переміщень елементів ШВ.

При переході до іншого базису інваріант, як скалярна величина, не змінюється, тобто

$$\text{Inv} = \bar{f}^T \cdot d\bar{q} = \bar{P}^T \cdot d\bar{X} = \text{const}, \quad (2)$$

де  $d\bar{X} = [dx, dy, dz, d\varphi_x, d\varphi_y, d\varphi_z]$  – вектор узагальнених координат в зоні різання;

$\bar{P} = [P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z]$  – вектор узагальнених сил, прикладених в зоні різання.

З формул (1) і (2) випливає

$$\bar{f} = J^T \cdot \bar{P}, \quad (3)$$

де  $J^T$  – транспонована матриця Якобі.

Матрицю жорсткості  $C_{ШВ}$  просторової конструкції ШВ можна представити у вигляді діагональної матриці з головними жорсткостями як

$$C_{ШВ} = \text{diag}[C_{x0}, C_{y0}, C_{z0}, C_{\varphi x0}, C_{\varphi y0}, C_{\varphi z0}],$$

де  $C_{x0}, C_{y0}, C_{z0}$  – поступальні жорсткості уздовж відповідних осей, а  $C_{\varphi x0}, C_{\varphi y0}, C_{\varphi z0}$  – поворотні жорсткості навколо цих же осей. Тоді,

$$\bar{P} = C_{ШВ} \cdot d\bar{X}. \quad (4)$$

Рівняння для еліпсоїда жорсткості запишеться як

$$\bar{L}^T \cdot C_{ШВ} \cdot \bar{L} = 1, \quad (6)$$

де  $\bar{L}$  – вектор, що задає напрямок в просторі.

Таким чином, еліпсоїд жорсткості відображає поверхню рівня даної квадратичної форми і є подібним до геометричного образу тензора другого порядку (наприклад, тензора інерції).

Напрямок головних осей жорсткості задає власний ортогональний базис – систему координат еліпсоїда, яка певним чином орієнтована в просторі, а величини півосей визначають власні числа – головні жорсткості еліпсоїда.

При аналізі точності верстата в зоні різання враховуються переважно поступальні відхилення

елементів пружної системи і відповідно поступальні жорсткості ШВ. В цьому разі матрицю жорсткості  $C_{ШВ}$  можна суттєво спростити

$$C_{ШВ} = \begin{bmatrix} C_{x0} & 0 & 0 \\ 0 & C_{y0} & 0 \\ 0 & 0 & C_{z0} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

В геометричній інтерпретації матриця жорсткості ШВ може бути представлена у формі еліпсоїда з головними півосями  $C_{x0}, C_{y0}, C_{z0}$ , який в тривимірній системі координат являє квадратичну форму.

Рівняння для еліпсоїда жорсткості запишеться як

$$\bar{L}^T \cdot C_{ШВ} \cdot \bar{L} = 1, \quad (6)$$

де  $\bar{L}$  – вектор, що задає напрямок в просторі.

Таким чином, еліпсоїд жорсткості відображає поверхню рівня даної квадратичної форми і є подібним до геометричного образу тензора другого порядку (наприклад, тензора інерції).

Напрямок головних осей жорсткості задає власний ортогональний базис – систему координат еліпсоїда, яка певним чином орієнтована в просторі, а величини півосей визначають власні числа – головні жорсткості еліпсоїда.

При переході до іншого базису застосовуються перетворення координат, зокрема використовуються матриці повороту відносно осей координат. Хоча, для переважної більшості конструкцій ШВ одна з головних осей жорсткості співпадає з віссю обертання шпинделя.

Зображення еліпсоїда жорсткості завжди можна побудувати в довільній точці  $O$ , якщо відомі напрямки головних осей жорсткості  $x_0, y_0, z_0$  у базису  $XYZ$  і значення коефіцієнтів поступальних жорсткостей  $c_{x0}, c_{y0}, c_{z0}$  в цих напрямках. В типовій формі еліпсоїд жорсткості  $E_c = C_{ШВ}$  представлений на рис. 2.

Еліпсоїд жорсткості відображає зміну жорсткості пружної системи в просторі, тобто розподіл величин жорсткості системи в різних напрямках робочого простору ШВ від центра еліпсоїда. Величина жорсткості визначається довжиною радіус-вектора еліпсоїда в заданому напрямку.

Якщо з центру еліпсоїда (точка  $O$ ) провести промінь в довільному напрямку  $L$ , то він перетинає поверхню еліпсоїда в точці  $K$ . Модуль радіус-вектора  $\bar{OK}$  визначить величину жорсткості конструкції ШВ в цьому напрямку.

Слід зазначити, що на практиці часто зручніше оперувати характеристиками податливості, ніж жорсткості. З еліпсоїдом жорсткості завжди пов'язаний відповідний еліпсоїд податливості, як зворотньої величини. Він також зображується у вигляді поверхні еліпсоїда, але з іншим співвідношенням значень головних осей. Для прикладу на рис. 3 приве-

дені взаємопов'язані (спряжені) еліпсоїди жорсткості  $E_C$  і податливості  $E_\delta$ , які побудовані в програмі MathCAD. При цьому співвідношення жорсткостей по головних осях становить 0.5 : 0.7 : 2, а податливостей – 2 : 1.4 : 0.5 відповідно.

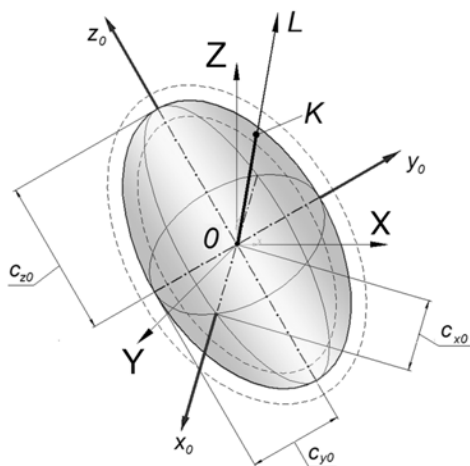


Рис. 2. Типовий еліпсоїд жорсткості

Математичний опис еліпсоїда, як поверхні другого порядку, в декартових прямокутних координатах має вигляд [2]:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \quad (7)$$

причому хоча б один з коефіцієнтів  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$  повинен бути відмінний від нуля.

Інваріантами цього рівняння є:

$$\begin{aligned} I_1 &= a_{11} + a_{22} + a_{33}, \\ I_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{13} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix}, \\ I_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

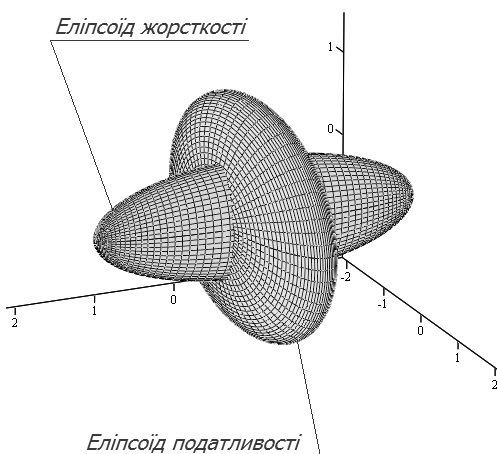


Рис. 3. Два спряжені еліпсоїди – жорсткості  $E_C$  і податливості  $E_\delta$

Також рівняння (7) можна записати в матричній формі як

$$[X_4^T] \cdot [A] \cdot [X_4] = 0, \quad (9)$$

де  $[X_4] = [x \ y \ z \ 1]^T$ .

Для центральних квадрик (до яких відноситься і поверхня еліпсоїда) центр поверхні можна переносити в точку початку координат

$$[X_4^T] \cdot [Tr^T] \cdot [A_4] \cdot [Tr] \cdot [X_4] = 0, \quad (10)$$

де  $Tr$  – відповідна матриця переносу.

Також за допомогою поворотів на кути Ейлера можна зробити осі квадрик паралельними координатним осям. Тоді отримаємо стандартне (канонічне) рівняння квадрики у вигляді

$$[X_4^T] \cdot \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{a}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{a}_{44} \end{bmatrix} \cdot [X_4] = 0. \quad (11)$$

Виділимо окремо квадратичну і лінійну групи членів рівняння (7):

$$\begin{aligned} [x \ y \ z] \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \\ + 2 \cdot [a_{14} \ a_{24} \ a_{34}] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + a_{44} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Тоді, в компактному матричному запису маємо

$$[X_3^T] \cdot [A_3] \cdot [X_3] + 2[B_3] \cdot [X_3] + a_{44} = 0, \quad (13)$$

де  $[A_3] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix},$

$$[B_3] = [a_{14} \ a_{24} \ a_{34}], \quad [X_3] = [x \ y \ z]^T.$$

Лінійна група членів рівняння (7) відповідає за перенесення центру поверхні другого порядку від початку системи координат (точка  $O$ ), а квадратична – за обертання головної системи координат поверхні відносно осей координат.

Якщо центр поверхні другого порядку співпадає з початком системи координат (точка  $O$ ), то матричне рівняння (13) спрощується

$$[X_3^T] \cdot [A_3] \cdot [X_3] + a_{44} = 0. \quad (14)$$

Еліпсоїд належить до центральних квадрик і має центральну точку симетрії. В подальшому будемо розглядати еліпсоїд з центром в початку координат.

Якщо головні осі еліпсоїда колінеарні осям координат  $X, Y, Z$ , то рівняння еліпсоїда має вигляд (канонічна форма)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (15)$$

де  $a, b, c$  – числа, які визначають півосі еліпсоїда.

Якщо в якості власних чисел  $a, b, c$  еліпсоїда прийняти величини жорсткості по головних осях жорсткості  $c_{x0}, c_{y0}, c_{z0}$ , то рівняння еліпсоїда жорсткості для головної системи координат  $X_0, Y_0, Z_0$  запишеться як

$$\frac{x_0^2}{c_{x0}^2} + \frac{y_0^2}{c_{y0}^2} + \frac{z_0^2}{c_{z0}^2} = 1. \quad (16)$$

Або в матричному вигляді

$$[x \ y \ z] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{c_{x0}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_{y0}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c_{z0}^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1. \quad (17)$$

Еліпсоїду жорсткості відповідає діагональна матриця жорсткості системи. Для ШВ вона має наступний вигляд

$$C_{ШВ} = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{x0} & 0 & 0 \\ 0 & c_{y0} & 0 \\ 0 & 0 & c_{z0} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

В конструкціях ШВ головні осі жорсткості  $c_{x0}, c_{y0}, c_{z0}$  часто збігаються з осями координат  $X, Y, Z$ . Просторова жорсткість ШВ верстата у вигляді еліпсоїду з головними жорсткостями (півосями)  $c_{x0}, c_{y0}, c_{z0}$  зображена на рис. 4, а. Напрями головних жорсткостей часто колінеарні осям головної системи координат  $X, Y, Z$  ШВ.

Центр еліпсоїду жорсткості розташований на осі обертання, на торці оправки (точка  $O$ ), в якій умовно прикладена сила різання  $P = [P_x, P_y, P_z]^T$ .

Якщо радіальна жорсткість шпинделя в різних радіальних напрямках мало змінюється ( $c_{x0} \cong c_{y0}$ ), то еліпсоїд жорсткості ШВ перетворюється в еліпсоїд обертання. Для побудови такого еліпсоїду необхідно знати тільки величини  $c_{y0}$  та  $c_{z0}$ .

Згідно спрощеної розрахункової схеми, зображеної на рис. 4, б, під дією сили  $P_y$  (складової сили різання) відбувається переміщення (прогин) консолі шпинделя на величину  $y$ . Величина прогину залежить від жорсткості  $c_y$  системи в радіальному напрямку. Прогин в зоні різання можна розрахувати за традиційною методикою з урахуванням згинної жорсткості вала шпинделя та жорсткості опор.

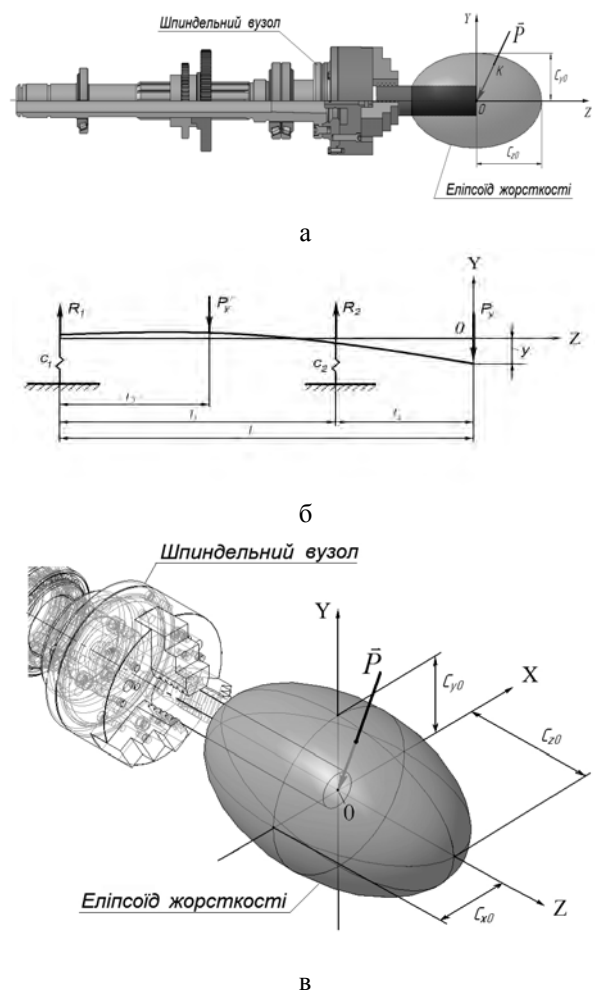


Рис. 4. До визначення просторової жорсткості ШВ: а – загальний вид ШВ з еліпсоїдом жорсткості; б – розрахункова схема ШВ; в – еліпсоїд жорсткості ШВ в ізометрії

При цьому радіальна жорсткість ШВ визначається як  $c_{y0} = P_y / y$ . В осьовому напрямку на ШВ діє осьова складова сили різання – сила  $P_z$ , яка сприймається упорним (радіально-упорним, упорно-радіальним) підшипником. При цьому шпиндель переміщується (деформується) на величину  $z$ . Осьова жорсткість ШВ визначається як  $c_{z0} = P_z / z$ .

Оскільки осьова жорсткість вала шпинделя значно перевищує радіальну, то осьова жорсткість ШВ практично визначається жорсткістю упорного підшипника. Її значення можна знайти за допомогою довідників з розрахунку підшипників [8].

На рис. 3, в показана приведена в зону різання просторова жорсткість ШВ у вигляді еліпсоїду жорсткості в ізометричному зображенні з усіма головними жорсткостями  $c_{x0}, c_{y0}, c_{z0}$ , а також вектор сили різання  $P$ , яка прикладена в центрі еліпсоїду (точка  $O$ ).

При переміщенні точки  $O$  вздовж осі шпинделя форма еліпсоїду жорсткості змінюється за рахунок зміни величин радіальної жорсткості. Осьова жорсткість при цьому залишається практично незмінною.

Вектор просторової деформації шпинделя від сили  $P$  можна знайти як

$$X = C_{ШВ}^{-1} \cdot P. \quad (19)$$

При вирішенні просторово-деформаційних задач більш зручним є використання величин податливості ніж жорсткості.

Для трьох головних жорсткостей  $c_{x0}, c_{y0}, c_{z0}$  існують три головні податливості  $\delta_{x0}, \delta_{y0}, \delta_{z0}$  ШВ і, звичайно, інший еліпсоїд – еліпсоїд податливості.

Еліпсоїд податливості ШВ відображає зміну податливості ШВ в просторі, тобто розподіл величин податливості системи в різних напрямках робочого простору від центра еліпсоїда. Величина податливості визначається довжиною радіус-вектора еліпсоїда в заданому напрямку.

Еліпсоїд податливості математично описується формулами, аналогічними еліпсоїду жорсткості, тільки замість  $c$  використовується  $1/\delta$ .

Слід також відмітити таку характерну особливість спряжених еліпсоїдів. Якщо відомі значення головних податливостей, то можна знайти еліпсоїд жорсткості. І навпаки, якщо відомі значення головних жорсткостей, то можна знайти еліпсоїд податливості.

З формули (16) можна записати рівняння еліпсоїда жорсткості для головної системи координат  $X_0, Y_0, Z_0$  через головні податливості системи

$$\frac{x_0^2}{\frac{1}{\delta_{x0}^2}} + \frac{y_0^2}{\frac{1}{\delta_{y0}^2}} + \frac{z_0^2}{\frac{1}{\delta_{z0}^2}} = 1, \quad (20)$$

або

$$\delta_{x0}^2 \cdot x_0^2 + \delta_{y0}^2 \cdot y_0^2 + \delta_{z0}^2 \cdot z_0^2 = 1. \quad (21)$$

В матричній формі це рівняння буде мати вигляд

$$[x \ y \ z] \cdot \begin{bmatrix} \delta_{x0}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{y0}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{z0}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1. \quad (22)$$

Еліпсоїду податливості відповідає діагональна матриця податливості системи. Для ШВ вона має наступний вигляд

$$D_{ШВ} = [\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} \delta_{x0} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{y0} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{z0} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

На рис. 5 показаний ШВ з еліпсоїдом просторової податливості, в якому радіальна податливість значно перевищує осьову.

Запропонований еліпсоїд просторової жорсткості (податливості) ШВ дає можливість визначення величин деформацій шпинделя в будь-яких напрямках робочого простору від діючих силових навантажень.

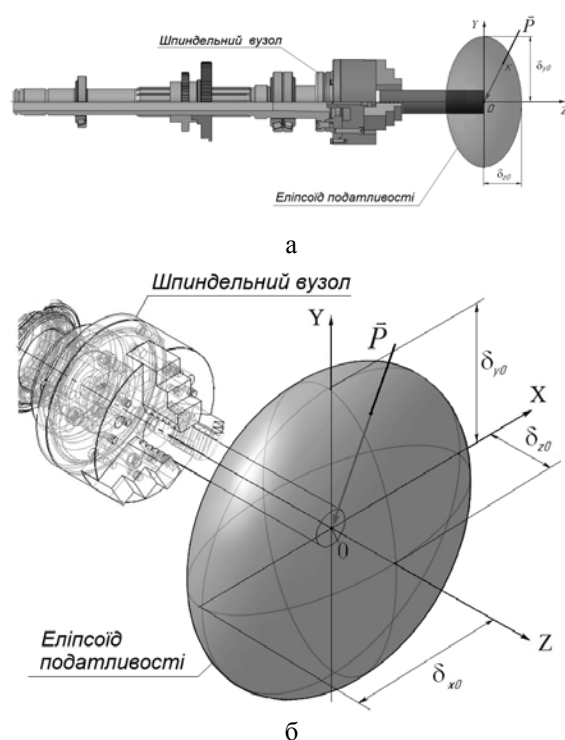


Рис. 5. ШВ з еліпсоїдом просторової податливості:  
а – загальний вид;  
б – еліпсоїд податливості в ізометрії

При цьому вектор просторової деформації шпинделя  $X$  від дії сили  $P$  можна знайти як

$$X = D_{ШВ} \cdot P. \quad (24)$$

Для знаходження величини податливості  $\delta_k$  ШВ в заданому напрямку необхідно задати напрямну пряму  $L$ , яка проходить через центр еліпсоїду просторової податливості.

При знаходженні точок на поверхнях еліпсоїдів напрямок задається нескінченною прямою  $L$ , яка записується у вигляді канонічного рівняння

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}, \quad (25)$$

де  $l, m, n$  – напрямні коефіцієнти;

$x_0, y_0, z_0$  – координати центра еліпсоїду.

Якщо точка на прямій співпадає з початком системи координат, то  $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$ .

Пряму  $L$  можна задати як лінію перетину двох не компланарних площин у вигляді системи рівнянь

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Якщо площини проходять через початок системи координат, то

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Напрямний вектор цієї прямої визначається як

$$\vec{a} = |\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2| = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\}, \quad (28)$$

де  $\bar{p}_1 = \{A_1 \ B_1 \ C_1\}$ ;  $\bar{p}_2 = \{A_2 \ B_2 \ C_2\}$ .

З рівняння (25) можна знайти коефіцієнти для системи (28):

$$A_1 = m; B_1 = -1; C_1 = 0; A_2 = n; B_2 = 0; C_2 = -1.$$

Таким чином, координати точки К перетину еліпсоїда з прямою L можна знайти з системи лінійно-квадратичних рівнянь виду

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z = 0, \\ a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + \\ + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + a_{44} = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Квадратичні рівняння мають два рішення, тому таких точок перетину на поверхні існує дві – К та К' (симетричні відносно центру симетрії еліпсоїду).

Податливість ШВ в даному напрямку знайдемо як довжину (модуль) радіус-вектора  $\vec{K}$ , проведеного з центру еліпсоїду в точку К:

$$\delta_K = \left| \sqrt{\left( x_K^2 + y_K^2 + z_K^2 \right)} \right|. \quad (30)$$

## ВИСНОВКИ

На базі тензорно-математичного апарату розроблена тензорно-геометрична модель просторової жорсткості ШВ металорізального верстата, яка дозволяє оцінити пружно-деформаційні властивості конструкції ШВ. Вона визначає анізотропію жорсткості ШВ, тобто розподілення жорсткості конструкції по різних напрямках тривимірного простору.

Доведено, що просторова жорсткість пружної системи ШВ, як правило, розподіляється за квадратичною формою, яка геометрично реалізується поверхнею еліпсоїду. При цьому еліпсоїд жорсткості ШВ звично будується на консолі шпинделя з центром в зоні (точці) різання. Часто для зручності замість еліпсоїду жорсткості використовують еліп-

соїд податливості, який будується за аналогічною методикою.

Кінцева жорсткість ШВ зумовлює просторові деформації конструкції, які викликають відтиснення інструмента від деталі в процесі різання, що впливає на точність обробки. Це надає можливість визначення величин деформацій шпинделя від діючих силових навантажень в будь-яких напрямках робочого простору.

## Список літератури

1. Данильченко Ю.М. Прецизійні шпиндельні вузли на опорах кочення. / Ю.М. Данильченко, Ю.М. Кузнєцов. – Тернопіль: „Економічна думка”, 2003. – 342 с.
2. Ильин В.А. Аналитическая геометрия: учебник для вузов / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 224 с.
3. Кудинов В.А. Динамика станков / В.А. Кудинов. – М.: Машиностроение, 1967. – 360 с.
4. Подураев Ю.В. Мехатроника: основы, методы, применение: учебн. пос. для вузов / Ю.В. Подураев. – М.: Машиностроение, 2006. – 256 с.
5. Струтинський В.Б. Статистична динаміка шпиндельних вузлів на гідростатичних опорах: монографія / В.Б. Струтинський, Д.Ю. Федориненко. – Ніжин: Вид-во „Аспект-Поліграф”, 2011. – 464 с.
6. Струтинський В.Б. Тензорні математичні моделі процесів та систем: підручник / В.Б. Струтинський. – Житомир: ЖДТУ, 2005. – 635 с.
7. Хомяков В.С. Моделирование и расчет динамических характеристик шпиндельных узлов / В.С. Хомяков, Н.А. Кочинев, Ф.С. Сабиров // Вестник УГАТУ. – Уфа: УГАТУ, 2009. – Т.12. – № 2(31). – С. 69-75.
8. Черменский О.Н. Подшипники качения. Справочник-каталог / О.Н. Черменский, Н.Н. Федотов. – М.: Машиностроение, 2003. – 576 с.

Надійшла до редколегії 14.12.2015

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Д.Ю. Федориненко, Чернігівський національний технологічний університет, Чернігів.

## РАЗРАБОТКА ТЕНЗОРНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ ШПИНДЕЛЬНОГО УЗЛА МЕТАЛЛОРЕЖУЩЕГО СТАНКА

В.Б. Струтинский, В.М. Чуприна

На основе тензорно-математического подхода выполнено теоретическое обоснование упругих свойств конструкции шпиндельных узлов станков в трехмерном пространстве. Предложена тензорно-геометрическая модель пространственной жесткости шпиндельного узла металлорежущего станка в зоне резания в форме эллипсоида жесткости. Модель позволяет определить величину деформации шпинделя от действующей силовой нагрузки в любом направлении рабочего пространства.

**Ключевые слова:** тензор, жесткость, станок, шпиндельный узел, эллипсоид, трехмерное пространство, математическая модель.

## DEVELOPMENT OF THE TENSOR-GEOMETRICAL MODEL OF SPATIAL RIGIDITY OF THE MACHINE TOOL SPINDLE UNIT

V.B. Strutinsky, V.M. Chupryna

On the basis of the tensor-mathematical campaign a theoretical basis of the elastic properties of the structure spindles machines in three-dimensional space was carried out. A tensor-geometrical model of spatial rigidity of the machine tool spindle unit in the cutting area in the form of an ellipsoid of stiffness was proposed. The model allows to determine the amount of deformation of the spindle from the current power load in any direction of workspace.

**Keywords:** tensor, rigidity, machine, spindle unit, ellipsoid, three-dimensional space, a mathematical model.