УДК 68.512+73

В.М. Клименко, Б.О. Дем'янчук

Військовий інститут Одеського національного політехнічного університету, Одеса

ПРОГНОЗУВАННЯ ОЦІНКИ ВИГРАШУ І РИЗИКУ РІШЕНЬ, ЩО ПРИЙМАЮТЬСЯ В УМОВАХ БОЙОВОЇ ПРОТИДІЇ

Запропонована статистична модель, яка адекватно описує виграш і втрати, враховує наявність одночасного впливу факторів, що сприяють досягненню мети протидії, а також факторів, що перешкоджають досягненню цієї мети. В умовах безкомпромісної бойової протидії двох сторін наводиться ілюстрація застосування нелінійної функції корисності і ризику і метод оцінки параметрів її тренда.

Ключові слова: *статистична модель, функція корисності і ризику, особа, що приймає рішення, оцінка інтенсивності вогневого впливу сторін.*

Вступ

Результат бойової протидії, ризик прийнятих рішень завжди мають випадковий характер і визначаються безліччю факторів, що важко враховуються, але однозначно пов'язані з величиною виграшу і втрат (і противника, і своїх), які очікуються особою, що приймає рішення [1, 2]. Об'єктивний прогноз очікуваної величини корисності і ризику під дією як детермінованих, так і випадкових факторів, можливий за умови, коли відомий механізм, що породжує ці результати, є постійно діючим.

Як відомо, основою рішення завдання прогнозування як свого виграшу, так і своїх втрат, є функція корисності, що описує закономірність зміни результатів (наслідків) рішення, прийнятого у заданих умовах [3]. Однак, відомі моделі оцінки корисності і ризику рішень є неадекватними в умовах безкомпромісної бойової протидії.

Метою статті є вибір, побудова і обговорення математичної моделі, що адекватно описує виграш і втрати в умовах бойової протидії, а також ілюстрація застосування нової функції корисності і ризику в умовах перешкод, що заважають цій функції для статистичної оцінки параметрів її тренда, в у мовах безкомпромісної бойової протидії двох сторін.

Модель, що пропонується, ґрунтується на побудові і статистичному прогнозуванні параметрів функції корисності і ризику, яка, на відміну від відомих [3, 4], більш адекватно враховує наявність одночасної протидії факторів, що сприяють досягненню мети протидії, а також факторів, що перешкоджають досягненню цієї мети.

1. Побудова функції корисності і ризику

Для побудови цієї функції введемо у розгляд допоміжну функцію – імовірність f досягнення результату протидії заданого рівня, що дорівнює v. При цьому в умовах антагоністичної протидії багатьох факторів імовірність недосягнення зазначеного результату дорівнює (1 – f).

Швидкість зміни ймовірності, що відображає інтенсивність зміни імовірності в умовах одночасної протидії різних факторів, як відомо, пропорційна добутку зазначених ймовірностей, узятому з деяким коефіцієнтом пропорційності α, який можна назвати показником різниці інтенсивностей впливу однієї сторони на іншу, наприклад різниці потужностей вогневих ударів, віднесеній до результатів бою, що досягаються.

У розглянутій ситуації одержуємо залежність у вигляді диференціального рівняння

$$\frac{df}{dv} = \alpha f(1-f), \quad 0 < f < 0 . \qquad (1)$$

Вирішуючи (1), наприклад, при початкових умовах f = 0,5, тобто в ситуації, коли очікуваний успіх і свої втрати рівноімовірні, а нормована різниця успішних впливів на противника позитивна, тобто при α>0, одержимо інтегральну залежність імовірності успіху від величини виграшу у вигляді

$$f(v) = \left\{1+\exp\left[-\alpha(v-v_0)\right]\right\}^{-1}. \qquad (2)$$

Перетворюючи (2) так, щоб при здвигу f вліво по осі v на величину v_0 і вниз по осі f на одиницю отримана після перетворення функція f мала смисл функції корисності прийнятого рішення для $\alpha > 0$, одержимо, що очікуваний виграш особа, що приймає рішення (ОПР), оцінює величиною $v > 0$. При цьому для $v < 0$ ця ж функція набуває смислу функції ризику прийнятого рішення (для $v < 0$ функція негативна, величина v відповідає очікуваним своїм втратам). Узагальнена функція корисності, отримана із (2), у вигляді непарної функції від рівня виграшу і втрат, очікуваних ОПР, має вигляд гіперболічного тангенса. Дійсно,

$$\begin{aligned}\phi(\alpha, v) &= \left\{\left[1+\exp\left(-\alpha(v+v_0-v_0)\right)\right]^{-1} - \frac{1}{2}\right\}^2 = \\ &= \left(e^{\alpha v/2} - e^{\alpha v/2}\right)\Big/\left(e^{\alpha v/2} + e^{\alpha v/2}\right) = \mathrm{th}\left(\frac{\alpha v}{2}\right).\end{aligned} \qquad (3)$$

Вона відображає рівень показника корисності і ризику рішення, які очікує особа, що приймає рішення. Важливо відмітити, що функція (3) відображає лише порівняні виграш і втрати, що очікуються. Зрозуміло, залежність будується шляхом аналізу даних про противника і про свої можливості, в результаті об'єктивної оцінки обстановки.

Однак, вона часто носить і суб'єктивний характер, тому що відображає також особистісні погляди ОПР, залишаючись непарною S-образною функцією очікуваних виграшу та втрат.

Так, наприклад, якщо відношення ОПР до ситуації (до очікуваного успіху і невдачі) „рівне”, то це відображається параметром функції $\alpha = 2$, що означає помірне зростання виграшу і втрат через очікувану приблизну рівність інтенсивностей взаємного вогневого впливу протидіючих сторін.

У випадку „сміливо-песимістичної” оцінки очікуваного результату, це відображається параметром $\alpha=4$. Тоді це означає, що очікується швидке зростання втрат і виграшу через інтенсивний, але порівняний взаємний вплив.

Нарешті, при „обережно-оптимістичному” відношенні ОПР до успіху та своїх втрат для функції (3) маємо $\alpha = 1$, що відповідає ситуації, коли ОПР вважає корисним прийняти таке рішення, що приведе до повільного зростання виграшу при одночасному запобіганні швидкого зростання своїх втрат.

Зазначені погляди ОПР відображаються як аналітично, так і графічно у такому вигляді (рис. 1):

$$\phi(\alpha, v) = \begin{cases} \mathrm{th}(2, v) - \text{рівне відношення ОПР} \\ \qquad \text{до очікуваного результату бою;} \\ \mathrm{th}(4, v) - \text{сміливо-песимістичне} \\ \qquad \text{відношення ОПР;} \\ \mathrm{th}(1, v) - \text{обережно-оптимістичне} \\ \qquad \text{відношення ОПР.} \end{cases}$$

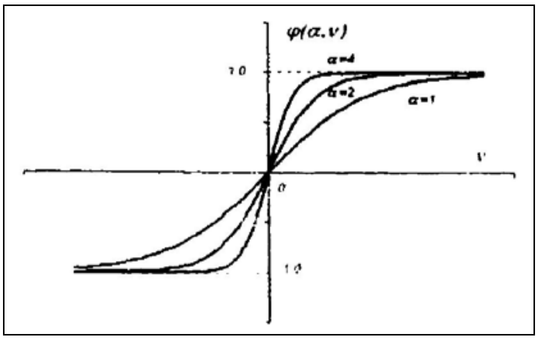

Рис. 1. Приклад непарної функції корисності і ризику

Однак функція може виявитися і функцією загального вигляду. Так, при „сміливо-оптимістичному” відношенні ОПР до очікуваних наслідків прийнятого рішення функція може, наприклад, мати такий вигляд (рис. 2):

$$\phi(\alpha, v) = \begin{cases} \mathrm{th}(3, v), & \text{при } v > 0; \\ \mathrm{th}(1, v), & \text{при } v < 0. \end{cases} \qquad (4)$$

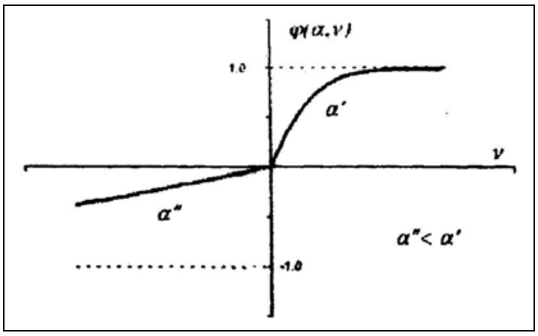

Рис. 2. Приклад функції корисності і ризику загального вигляду

Із (3) та (4) слідує, що, у випадку якщо показник інтенсивності впливу сторін точно відомий, наприклад, за даними оцінки обстановки перед прийняттям рішення (він може бути розрахований як різниця інтенсивностей заходів, прийнятих протидіючими сторонами), значення функцій корисності і ризику може бути розраховано для будь-якого заданого значення виграшу ($v>0$) і програшу ($v<0$).

Оскільки значення, наприклад, для ситуації (4) на практиці звичайно невідомі, то вони повинні бути визначені, наприклад, методами статистичного прогнозування за сукупністю декількох дискретних значень функції корисності і ризику, взятих з урахуванням міркувань ОПР про деякі очікувані початкові значення виграшу і втрат.

Отримані прогнозні оцінки параметрів тренду функції корисності та ризику дозволяють мати прогнозні значення функції корисності і ризику для виграшу і втрат повільного рівня, а також визначати очікуваний рівень виграшу і втрат, коли значення функції корисності відомі.

Вирішимо завдання програмування параметрів функції втрат і ризику для більш загального випадку, коли ця функція є безперервною та диференційємою функцією двох параметрів і має вигляд, подібний рис. 2, характерний для „сміливо-оптимістичного” відношення ОПР до успіху і до своїх втрат.

Із цією метою модифікуємо (3), тобто перетворимо непарну функцію у функцію загального вигляду шляхом її зрушення на постійну величину по обом осям координат:

$$\phi(\alpha, v_0, v) = \frac{\mathrm{th}\left[\frac{\alpha}{2}(v - v_0)\right] + \mathrm{th}\left(\frac{\alpha}{2} v_0\right)}{1 + \mathrm{th}\left(\frac{\alpha}{2} v_0\right)} = \frac{e^{\alpha v} - 1}{e^{\alpha v} + e^{\alpha v_0}}, \qquad (5)$$

де α – показник різниці відносних інтенсивностей впливу сторін, нормованих рівнями власних втрат; v_0 – показник асиметрії функції корисності і ризику, що відображає ступінь оптимістичності відношення ОПР до очікуваних наслідків прийнятого рішення.

Вигляд функції (5) корисності і ризику представлений на рис. 3.

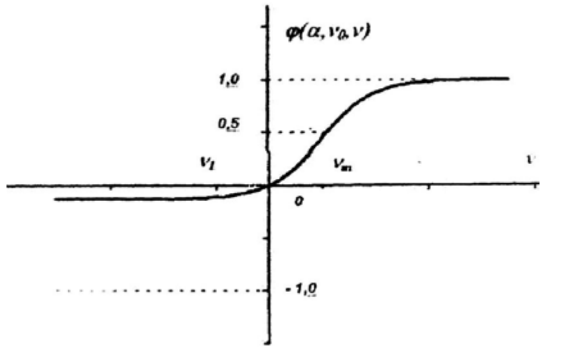

Рис. 3. Функція корисності та ризику

2. Алгоритм та погрішності оцінок максимальної правдоподібності параметрів функції корисності і ризику

Сумісні оцінки α і v_0, тобто параметрів функції (5), без прийняття спеціальних заходів для лінеаризації цієї функції знайти неможливо. Тому знайдемо їх у два прийоми.

Спочатку за відомими дискретними значеннями $\phi(\alpha, v_0, v_k)$, $\forall_k = \overline{1,m}$ знайдемо опорні значення

$$\alpha = \alpha^0; \qquad v_0 = v_0^0.$$

Припустимо, що відомі декілька початкових значень функції (5) і значення $\phi_{v_1} = \phi(\alpha, v_0, v_1)$ та $\phi_{v_m} = \phi(\alpha, v_0, v_m)$, що взяті на кінцях кожного з полуінтервалів. Тоді опорні значення α_0 і v_0^0 знаходимо відповідно (5) у вигляді

$$\begin{gathered}\alpha^0 = -{v_m}^{-1} \ln\left[\left(\phi_{v_1}/\phi_{v_m}\right)(\phi_{v_m}-1)\right];\\ v_0^0 = v_m \cdot \ln(-\phi_{v_1}) \Big/ \ln\left[\left(\phi_{v_1}/\phi_{v_m}\right)(\phi_{v_m}-1)\right].\end{gathered} \tag{6}$$

Для знаходження оптимальних оцінок параметрів α і v_0 тренда функції (5) методом максимальної правдоподібності з урахуванням їх опорних значень (6) та всіх значень на інтервалі, відомих з погрішностями, вводячи позначення

$$\begin{gathered}\alpha = \alpha^0 + \Delta\alpha = \alpha_1 = \alpha_1^0 + \Delta\alpha_1;\\ v_0 = v_0^0 + \Delta v = \alpha_2 = \alpha_2^0 + \Delta\alpha_2,\end{gathered} \tag{7}$$

розкладемо функцію (5) у ряд Тейлора по параметрам (α,v) в околі вектора (α_0, v_0^0), обмежившись першими членами ряду. При цьому отримаємо:

$$\begin{gathered}\phi(v_k) = \phi_{0,0}(v_k) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial\phi(v_k)}{\partial\alpha_i(\alpha_{0,i})}(\alpha_i - \alpha_i^0) =\\ \phi_{0,0}(v_k) + \phi_1(v_k)\Delta\alpha_1 + \phi_2(v_k)\Delta\alpha_2,\end{gathered} \tag{8}$$

де
$$\phi_{0,0}(v_k) = \frac{e^{\alpha_1^0 v_k} - 1}{e^{\alpha_1^0 v_k} + e^{\alpha_1^0 \alpha_2^0}};$$

де
$$\phi_{1k} = \phi_1(v_k) = (v_k - \alpha_2)\frac{e^{\alpha_1(v_k+\alpha_2)}}{(e^{\alpha_1 v_k} + e^{\alpha_1\alpha_2})^2}; \tag{9}$$

$$\phi_{2k} = \phi_2(v_k) = \alpha_1 \frac{e^{\alpha_1\alpha_2} - e^{\alpha_1(v_k+\alpha_2)}}{(e^{\alpha_1 v_k} + e^{\alpha_1\alpha_2})^2}.$$

Для всіх $t = t_k, k = \overline{1,m}$ вирази типу (8) складають систему вигляду

$$A^T\Delta\alpha = C, \tag{10}$$

$$A = \begin{pmatrix}\phi_1(v_1)\ldots\phi_1(v_m)\\ \phi_2(v_1)\ldots\phi_2(v_m)\end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix}\phi(v_1) - \phi_{0,0}(v_1)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \phi(v_m) - \phi_{0,0}(v_m)\end{pmatrix}; \tag{11}$$

$$\Delta\alpha = \left(\Delta\alpha_1/\Delta\alpha_2\right).$$

Перш ніж перейти до пошуку вектору оцінок $\Delta\hat{\alpha}$, знайдемо, використовуючи правило Саррюса, визначник інформаційної матриці Фішера, який, згідно (11), дорівнює

$$\left|A^T A\right| = \sum_{k=1}^{m}\phi_1^2(v_k)\sum_{k=1}^{m}\phi_2^2(v_k) - \left[\sum_{k=1}^{m}\phi_1(v_k)\phi_2(v_k)\right]^2. \tag{12}$$

Із (12), маючи на увазі (9) можна зробити висновок про те, що визначник матриці $A^T A$ не дорівнює нулю, тобто при розв'язанні рівняння (10) можна отримати оцінки, які мають кінцеву дисперсію.

Візьмемо до уваги неточне описання залежності $\phi(v)$ на інтервалі $[v_1, v_m]$. Значення вектора C містить помилку. Таким чином, маємо випадковий вектор $C + \delta$, а його реалізація має вигляд

$$y = C + \delta. \tag{13}$$

Якщо помилки опису закономірності $\phi(v_k)$, $\forall_k = \overline{1,m}$ розподілені нормально з нульовим середнім значенням, то їх щільність імовірності має вигляд

$$\phi(\delta) = (2\pi)^{-m/2}\left|\Pi\right|^{-1/2}\exp\left\{-\delta^T\Pi^{-1}\delta\right\}. \tag{14}$$

Функція правдоподібності параметрів $\Delta\alpha$, які підлягають оцінці, згідно (13), (14), дорівнює

$$\begin{gathered}\psi(\Delta\alpha / y) = (2\pi)^{-m/2}\left|\Pi\right|^{-1/2} \times\\ \times\exp\left\{-\frac{1}{2}(y - A\Delta\alpha)^T\Pi^{-1}(y - A\Delta\alpha)\right\},\end{gathered} \tag{15}$$

де $A = A(\alpha_0)$; $\quad y = y(\Delta_{іст,}\delta)$.

Для незалежних помилок нерівноточного опису закономірності зміни функції корисності та ризику $\phi(v)$ матриця коваріацій та обернена їй – діагональні:

$$\Pi = \begin{pmatrix}\delta_1^2 & 0 & 0 \ldots 0\\ 0 & \delta_2^2 & 0 \ldots 0\\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 \quad \delta_m^2\end{pmatrix}; \; \Pi^{-1} = \begin{pmatrix}W_1 & 0 & 0 \ldots 0\\ 0 & W_2 & 0 \ldots 0\\ 0 & 0 & W_3 \ldots 0\\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 \quad W_m\end{pmatrix},$$

$$W_k = \delta_k^{-2}, \tag{16}$$

де δ_k^2 – дисперсія помилки k -го відрахунку $\phi(v_k)$, що дорівнює $\sigma_k^2 = M\left[\delta^2\right]$.

Рівняння правдоподібності одержується із (15) після диференціювання та порівнювання нулю логарифму ψ.

$$(A^T\Pi^{-1}A)\Delta\hat{\alpha} = A^T\Pi^{-1}y.$$

Згідно (11) і (16)

$$(A^T\Pi^{-1}A)^{-1} =$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{m} W_k\phi_{1k}^2 \sum_{k=1}^{m} W_k\phi_{2k}^2 - \left(\sum_{k=1}^{m} W_k\phi_{1k}\phi_{2k}\right)^2\right]^{-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m} W_k\phi_{1k}^2 & -\sum_{k=1}^{m} W_k\phi_{1k}\phi_{2k} \\ -\sum_{k=1}^{m} W_k\phi_{1k}\phi_{2k} & \sum_{k=1}^{m} W_k\phi_{2k}^2 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

У відповідності з (6, 7, 8, 9, 17) в результаті одержуються пошукові оцінки параметрів функції корисності та ризику, тобто оцінка показника інтенсивності вогневого впливу сторін, що нормована своїми втратами і оцінка асиметричності функції корисності та ризику.

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{v}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 + \dfrac{\sum_{l=1}^{m}\left[W_l\phi_{1l}\sum_{l=1}^{m}W_k\phi_{2k}^2 - W_l\phi_{2l}\sum_{k=1}^{m}W_k\phi_{1k}\phi_{2k}\right]y_l}{\sum_{k=1}^{m}W_k\phi_{1k}^2\sum_{k=1}^{m}W_k\phi_{2k}^2 - \left(\sum_{k=1}^{m}W_k\phi_{1k}\phi_{2k}\right)^2} \\ v_0^0 + \dfrac{\sum_{l=1}^{m}\left[W_l\phi_{2l}\sum_{l=1}^{m}W_k\phi_{1k}^2 - W_l\phi_{1l}\sum_{k=1}^{m}W_k\phi_{1k}\phi_{2k}\right]y_l}{\sum_{k=1}^{m}W_k\phi_{1k}^2\sum_{k=1}^{m}W_k\phi_{2k}^2 - \left(\sum_{k=1}^{m}W_k\phi_{1k}\phi_{2k}\right)^2} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Дисперсії цих оцінок згідно (17) дорівнюють

$$\sigma_{\hat{\alpha}}^2 = \frac{\sum_{k=1}^{m} W_k\phi_{1k}^2}{\sum_{k=1}^{m} W_k\phi_{1k}^2 \sum_{k=1}^{m} W_k\phi_{2k}^2 - \left(\sum_{k=1}^{m} W_k\phi_{1k}\phi_{2k}\right)^2};$$

$$\sigma_{\hat{v}_0}^2 = \frac{\sum_{k=1}^{m} W_k\phi_{2k}^2}{\sum_{k=1}^{m} W_k\phi_{1k}^2 \sum_{k=1}^{m} W_k\phi_{2k}^2 - \left(\sum_{k=1}^{m} W_k\phi_{1k}\phi_{2k}\right)^2}. \quad (19)$$

Підставляючи оцінки (18) в (5), одержуємо очікувану закономірність: залежність функції корисності і ризику від очікуваних результатів бойової протидії.

Висновки

1. За допомогою запропонованої моделі можна оцінювати, по-перше, рівень корисності і ризику при досягненні заданого рівня виграшу або втрат; по-друге, рівень очікуваних виграшу або втрат, якщо задано прийнятний рівень корисності або ризику.

2. Практичне застосування викладеного інструмента труднощів не викликає, особливо при застосуванні комп'ютера.

3. Істотно більше складною є проблема з'ясування об'єктивних вихідних даних про залежність між дискретними значеннями функції корисності і ризику та значеннями виграшу або втрат у відповідних точках при їхніх малих значеннях.

4. Погрішності прогнозованих значень параметрів тренду функції корисності і ризику залежать не тільки від погрішностей у вихідних даних, але і від тривалості інтервалу спостереження початкових значень залежності функції корисності і ризику від втрат і виграшів.

Список літератури

1. *Саркисян С.А. Теория прогнозирования и принятия решений / С.А. Саркисян. – М.: Сов. радио, 1977. – 355 с.*
2. *Фишберн П. Теория полезности для принятия решений / П.Фишберн. – М.: Знание, 1978. – 290 с.*
3. *Murthy D. Стохастическая модель для прогнозирования технологических изменений / D.Murthy // Экономика промышленности. –1980. – № 1. – С. 22-27.*
4. *Райфа Г. Анализ решений / Г. Райфа. – М.: Изд. Московского университета, 1977. – 186 с.*

Надійшла до редколегії 4.03.2010

Рецензент: д-р техн. наук, доц. В.В. Скачков? Науковий центр БЗ Сухопутних військ, Одеса.

ПРОГНОЗУВАННЯ ОЦІНКИ ВИГРАШУ І РИЗИКУ РІШЕНЬ, ЩО ПРИЙМАЮТЬСЯ В УМОВАХ БОЙОВОЇ ПРОТИДІЇ

В.М. Клименко, Б.О. Дем'янчук

Запропонована статистична модель, яка адекватно описує виграш і втрати, враховує наявність одночасного впливу факторів, що сприяють досягненню мети протидії, а також факторів, що перешкоджають досягненню цієї мети. В умовах безкомпромісної бойової протидії двох сторін наводиться ілюстрація застосування нелінійної функції корисності і ризику і метод оцінки параметрів її тренда.

Ключові слова: *статистична модель, функція корисності і ризику, особа, що приймає рішення, оцінка інтенсивності вогневого впливу сторін.*

FORECASTING OF BENEFIT AND RISK OF DECISION MADE IN THE CONDITIONS OF BATTLE COUNTERACTION

V.M. Klimenko, B.A. Demyanchuk

Statistical model adequately, which describes benefit and losses, allows for simultaneous influence of factors contributory to achievement of counteraction goal, as well as factors preventing achievement of this goal, is proposed. Illustration of usage of nonlinear utility function and risk and method of assessment of parameters of its trend is given in the conditions of uncompromising battle counteraction of two parties.

Keywords: *statistical model, utility and risk function, decision maker, assessment of parties' fire impact intensity.*