

УДК 519.7

Л.В. Шабанова-Кушнарченко

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

ПОСТРОЕНИЕ СТРУКТУРЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА ДЛЯ ПРЕДИКАТНОЙ МОДЕЛИ МЕТРИКИ

Разработано абстрактное определение метризирующего предиката, что позволило ввести на множестве N структуру линейного пространства над полем вещественных чисел, согласованную с операциями внутреннего и внешнего равноделения точек. Совокупность свойств введенного метризирующего предиката образуют полную систему условий, обеспечивающих существование метризирующего предиката.

Ключевые слова: метризирующий предикат, метрика, предикатная модель, компараторная идентификация.

Введение

В [1] было введено понятие метризирующего предиката и сформулированы некоторые из его характеристических свойств. Поставим теперь задачу, используя эти и некоторые другие свойства как исходные положения, получить аксиоматическое, т.е. абстрактное определение метризирующего предиката. Для решения этой задачи сначала введем на множестве N с помощью операций внутреннего и внешнего равноделения точек структуру n -мерного векторного пространства. Она может не совпадать с исходной структурой n -мерного арифметического пространства N . Множество N с введенной на нем новой структурой векторного пространства будем обозначать символом N^* .

1. Введение структуры линейного пространства

Выберем в качестве нулевого вектора пространства N^* какой-нибудь элемент множества N . Обозначим его символом 0 . Операцию сложения векторов x, y пространства N^* определяем следующим образом:

$$x+y = 0^*(xoy). \quad (1)$$

С содержательной точки зрения (т.е. исходя из первоначального конкретного определения метризирующего предиката) вектор $\varphi(x+y)$ в пространстве N' образуется из векторов $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ по правилу параллелограмма (рис. 1), в котором, как известно, диагонали делятся пополам точкой их пересечения.

Точка $\varphi(0)$ играет в пространстве N' роль нулевого вектора. Вектор $\varphi(x+y)$ представляет собой сумму векторов $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ пространства N' .

Множество N вместе с заданной на нем операцией сложения (1) образует абелеву группу [2]. Действительно, коммутативность сложения

$$x + y = y + x \quad (2)$$

вытекает из определения (1) и коммутативности операции внутреннего равноделения o . Проверим свойство нуля

$$0 + x = x. \quad (3)$$

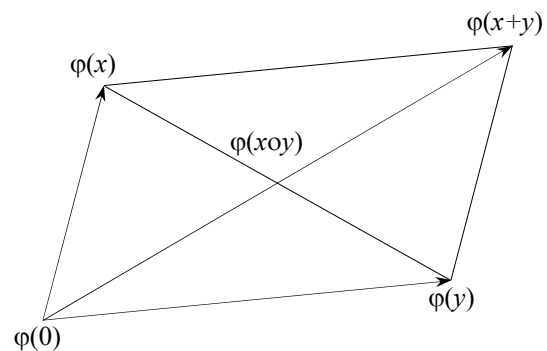


Рис. 1. Правило параллелограмма

Операция $*$ является обратной по отношению к операции o , поэтому $0 + x = 0^*(0ox) = x$.

Доказываем единственность нуля. Предположим, что существуют два нулевых вектора $0'$ и $0''$, так что для любого $x \in N$ имеем $0'+x=x$ и $0''+x=x$. В частности, $0'+0''=0''$ и $0'+0''=0'$. В силу коммутативности сложения получаем $0'=0''$, что и требовалось доказать. Однозначность решения уравнения $x+y=0$ при любом $x \in N$ относительно y выводится следующим образом: из равенства $x+y=0$ и (1) следует $0^*(xoy)=0$, откуда с учетом свойства $xox=x$ получаем $xoy=0o0=0$, $y=x*0$. Таким образом,

$$-x = x*0. \quad (4)$$

Доказываем ассоциативность сложения

$$(x + y) + z = x + (y + z). \quad (5)$$

Полагая в законе четырехугольника $t=z$, имеем $(xoy)o(zoz)=(zox)o(yoz)$. Пользуясь коммутативностью операции внутреннего равноделения и свойством $xox = x$, приходим к закону дистрибутивности для операции o : при любых $x, y, z \in N$:

$$(xoy)oz=(xoz)o(yoz). \quad (6)$$

В равенстве (6) заменяем x на z^*x у на z^*y . Тогда $((z^*x)o(z^*y))oz=((z^*x)oz)o((z^*y)oz)$, $((z^*x)o(z^*y))oz=$
 $=xoy$, $(z^*x)o(z^*y)=z^*(xoy)$. После замены x на y , y на z и z на x приходим еще к одному закону дистрибутивности: при любых $x, y, z \in N$

$$(x^*y)oz = (x^*z)o(y^*z). \quad (7)$$

Полагая в аксиоме четырехугольника $t=0$, имеем: $(xoy)o(0oz) = (0ox)o(yoz)$. Из последнего равенства с помощью (7) выводим: $0^*((xoy)o(0oz))=0^*((0ox)o(yoz)) = (0^*(xoy))o(0^*(0oz)) = (0^*(0ox))o(0^*(yoz)) = (x+y)oz=xo(y+z)$. Наконец, приходим к закону ассоциативности: $0^*((x+y)oz)=(0^*(xo(y+z)))$, $(x+y)+z=x+(y+z)$. Итак, множество N вместе с заданной на нем операцией сложения (1) образует абелеву группу.

Приступаем к введению операции умножения вещественного числа на вектор x пространства N^* . Полагаем по определению операции умножения

$$0x = 0, \quad (8)$$

$$1x = x, \quad (9)$$

$$(-1)x = -x. \quad (10)$$

Определяем операцию удвоения $2x$ и операцию деления пополам $\frac{1}{2}x$ вектора x . Полагаем $2x=x+x$.

Это означает, что

$$2x = 0^*x. \quad (11)$$

Принимаем, что $y=\frac{1}{2}x$ тогда и только тогда, когда $2y=x$. Отсюда выводим

$$\frac{1}{2}x = 0ox. \quad (12)$$

Определяем умножение числа 2^k на вектор x k -кратным применением операции удвоения к вектору x :

$$2^kx=2(2\dots(2x)\dots). \quad (13)$$

Умножение числа 2^{-k} на вектор x определяем k -кратным применением операции деления пополам к вектору x :

$$2^{-k}x = \left(\frac{1}{2} \dots \left(\frac{1}{2}x\right) \dots\right). \quad (14)$$

Здесь k – произвольное натуральное число.

Далее, определяем операцию умножения суммы и произведения чисел 2^k и 2^l на вектор x :

$$(2^k+2^l)x=2^kx+2^lx, \quad (15)$$

$$(2^k 2^l)x=2^k(2^lx). \quad (16)$$

Здесь k, l – целые числа. Для любого целого k по определению полагаем:

$$(-2^k)x=2^k(-x). \quad (17)$$

Докажем, что

$$-(2x)=2(-x). \quad (18)$$

Для этого вводим векторы $u=0^*x$ и $v=u^*0$. Согласно тождеству $xox=x$ имеем $(uov)o(uov)=uov$. Применяя к полученному равенству свойство коммутативности операции o и ее свойство дистрибутивности (6), получаем $(uov)o(uov)=uov$. Из равенства $u^*0=v$ выводим $uov=0$, поэтому $(0ou)o(0ov)=0$. Из равенства $0^*x=u$ выводим $0^*u=x$, поэтому $xo(0ov)=0$.

Отсюда $0ov=x^*0$, $0^*(x^*0)=v=u^*0=(0^*x)^*0$. Итак, $(0^*x)^*0=0^*(x^*0)$. Используя (4) и (1), последнее равенство переписываем в виде $(2x)0=0^*(-x)$, а затем в виде $-(2x)=2(-x)$. Тождество (18) доказано.

Докажем, что

$$-\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}(-x). \quad (19)$$

Для этого вводим вектор $y=x^*0$. Согласно тождеству $xox=x$ имеем: $(xoy)o(xoy)=xoy$. Применяя к полученному равенству свойство коммутативности операции o и ее свойство дистрибутивности (6), получаем: $((xoy)ox)o((xoy)oy)=xoy$. Из равенства $y=x^*0$ выводим $xoy=0$, поэтому $(0ox)o(0oy)=0$. Из последнего равенства выводим $(0ox)^*0=0oy=0o(x^*0)$. Итак, $(0ox)^*0=0o(x^*0)$. Используя (5) и (12), последнее равенство переписываем в виде: $\left(\frac{1}{2}x\right)^*0=0o(-x)$. Тождество (19) доказано.

Из определений (13) и (14) и тождеств (18), (19) непосредственно вытекает тождество

$$-(2^kx) = 2^k(-x), \quad (20)$$

справедливое при любом целом k . Из определений (13), (14) также следует тождество

$$2^k(2^lx) = 2^{k+l}x, \quad (21)$$

справедливое при любых целых k и l .

Докажем, что при любом целом k имеет место тождество

$$2^kx+2^ky = 2^k(x+y). \quad (22)$$

Действительно, при $k=0$ тождество (22) выполняется: $2^0x+2^0y=1x+1y=x+y=1(x+y)=2^0(x+y)$. Выполняется оно и при $k=1$: $2^1x+2^1y=2x+2y=(x+x)+(y+y)=(x+y)+(x+y)=2(x+y)=2^1(x+y)$.

Предположим, что при некотором $k>0$ тождество (22) выполняется. Тогда $2^{k+1}x+2^{k+1}y = 2^k(2x)+2^k(2y) = 2^k(2x+2y)=2^k(2(x+y)) = 2^{k+1}(x+y)$. Для случая $k<0$ свойство (22) доказывается аналогично. Из (20) и (22) вытекает, что

$$2^kx-2^ky = 2^k(x-y). \quad (23)$$

Назовем двоично-рациональным любое число вида

$$l = \sum_{k=-m}^n a_k 2^k, \quad (24)$$

где $a_k \in \{-1, 0, 1\}$, а m и n – некоторые натуральные числа. При любом двоично-рациональном l определяем операцию lx равенством

$$lx = \sum_{k=-m}^n a_k (2^k x). \quad (25)$$

Корректность этого определения принимаем без доказательства.

Чтобы перейти от двоично-рациональных чисел к вещественным, придется опереться на закон непрерывности и еще на одно дополнительное свойство метризирующего предиката: закон сходимости – для любой сходящейся последовательности двоично-рациональных чисел $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ и произвольного $x \in \mathbb{N}$ существует $\lim l_n x$. Законы непрерывности и сходимости позволяют определить операцию умножения произвольного вещественного числа l на любой элемент x множества \mathbb{N} :

$$Lx = \lim l_n x, \quad (26)$$

где $\{l_n\}$ – последовательность двоично-рациональных чисел, для которой $\lim l_n x = l$.

Корректность определения (26) обосновывается тем, что любое вещественное число l единственным способом представляется бесконечным двоичным кодом, а, следовательно, предел последовательности (26) для числа l может быть только один. Из определения (26) и перечисленных выше свойств метризирующего предиката следует справедливость равенств (13) – (15) [1] для любых вещественных чисел l и m . Итак, мы ввели на множестве \mathbb{N} структуру линейного пространства над полем вещественных чисел, согласованную с операциями внутреннего и внешнего равноделения точек. Этим доказано

Утверждение 1. Из законов парной рефлексивности, симметричности и транзитивности, одиночной симметричности, тождества, равноделения, непрерывности, четырехугольника и сходимости следует существование на области задания метризирующего предиката структуры линейного пространства над полем вещественных чисел с операцией сложения векторов, определяемой равенством (17) [1].

Кроме того, имеет место следующее очевидное

Утверждение 2. Любой метризирующий предикат подчиняется закону сходимости.

С содержательной точки зрения закон сходимости означает следующее. Если задаться произвольным вещественным числом l и попытаться экспериментально найти точку lx для произвольно выбранной точки x множества \mathbb{N} , то это всегда удастся сделать, причем при повторном выполнении процедуры отыскания точки lx придется выполнить ту же самую последовательность внутренних и внешних равноделений.

Поскольку любая физическая система, являющаяся объектом идентификации, имеет конечную чувствительность, то процесс отыскания точки lx не будет длиться бесконечно долго, а закончится за конечное число шагов.

2. Система условий существования предикатной модели метрики

Сформулируем еще два свойства метризирующего предиката и докажем, что они, вместе со свойствами, введенными ранее, образуют полную систему условий, обеспечивающих существование метризирующего предиката.

Сформулируем закон n -мерности – пространство \mathbb{N}^* , введенное в предыдущем подразделе, n -мерно. В развернутой форме закон n -мерности запишем в следующем виде: существуют векторы $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^* \in \mathbb{N}^*$, такие, что равенство

$$\Phi \left(a, a, x, \sum_{i=1}^n a_i(x) e_i^* \right) = 1 \quad (27)$$

выполняется для каждого $x \in \mathbb{N}^*$ при единственном наборе коэффициентов $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$. Здесь a – какой-нибудь вектор из \mathbb{N}^* ; a_1, a_2, \dots, a_n – фиксированные функции, определенные на \mathbb{N}^* со значениями в поле вещественных чисел.

Согласно второму закону тождества условие (30) равносильно равенству

$$x = \sum_{i=1}^n a_i(x) e_i^*, \quad (28)$$

которое означает, что любой вектор x выражается в виде линейной комбинации векторов $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ при единственном наборе коэффициентов a_1, a_2, \dots, a_n , а именно к этому сводится содержание закона n -мерности.

С содержательной точки зрения закон n -мерности означает следующее. Пусть в пространстве \mathbb{N}^* произвольно выбрана точка x . Возьмем n фиксированных точек $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^* \in \mathbb{N}^*$ и попытаемся из них и из нулевой точки пространства \mathbb{N}^* , комбинируя их многократно и в различной последовательности, с помощью операций внутреннего и внешнего равноделения, получить точку x . Закон n -мерности требует, чтобы существовала такая система точек $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$, при которой попытки такого рода всегда заканчиваются успешно. Он также требует, чтобы при использовании меньшего числа каких бы то ни было фиксированных точек не было возможности получить из них и из точки 0 точку x .

Возьмем в роли \mathbb{N}' n -мерное арифметическое пространство \mathbb{R}^n , а в роли φ' – функцию, отображающую пространство \mathbb{N}^* на \mathbb{N}' так, что вектору $x \in \mathbb{N}^*$ с координатами x_1, x_2, \dots, x_n соответствует в \mathbb{N}' точка $x' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Предполагается, что базис в \mathbb{N}^* зафиксирован. Очевидно, что φ' есть гомеоморфизм. В арифметическом пространстве любой размерности может быть введена евклидова метрика. Вместе с тем, все евклидовы пространства одинаковой размерности гомеоморфны [3]. Пространства

N и N' – арифметические и имеют одну и ту же размерность N , следовательно, существует гомеоморфизм φ , отображающий пространство N на пространство N' .

Отсюда непосредственно следует существование гомеоморфизма $\varphi''=(\varphi')^{-1}\varphi$, отображающего пространство N на пространство N^* .

Для аксиоматического обоснования структуры метрического предиката Φ , задаваемой соотношениями (1) [1] и (3) [1], осталось доказать возможность введения такого базиса $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ в N , при котором метрика, индуцируемая предикатом Φ , оказалась бы согласованной с метрикой пространства N' . Сказанное означает, что расстояние $r(x', y')$ между точками x', y' пространства N' , определяемое формулой (3) [1], должно удовлетворить условию (1) [1].

Сформулируем закон метричности – существует вектор $\eta \in N^*$ такой, что для любых $x, y \in N^*$ найдется единственное неотрицательное число $a(x, y)$, для которого

$$\Phi(x, y, a(x, y)\eta, 0)=1. \quad (29)$$

Справедливы следующие утверждения:

Утверждение 3. Любой метризирующий предикат подчиняется законам n -мерности и метричности.

Утверждение 4. Функция

$$r(x', y')=a(\varphi^{-1}(x'), \varphi^{-1}(y')) \quad (30)$$

обладает всеми свойствами евклидова расстояния и выражается в виде (3) [1].

Утверждение 5. Если принять $e_1=\varphi^{-1}(1, 0, 0, \dots, 0, 0)$, $e_2=\varphi^{-1}(0, 1, 0, \dots, 0, 0), \dots$, $e_n=\varphi^{-1}(0, 0, 0, \dots, 0, 1)$, то при любых $x_1, y_1, x_2, y_2 \in N$ равенство $r(x_1, y_1)=r(x_2, y_2)$ будет равносильно равенству $\Phi(x_1, y_1, x_2, y_2)=1$.

Из утверждений 1-5 непосредственно следует утверждение об условиях существования метризирующего предиката:

Утверждение 6. Для того чтобы предикат $\Phi(x_1, y_1, x_2, y_2)$ был метризирующим, необходимо и доста-

точно, чтобы он подчинялся законам парной рефлексивности, симметричности и транзитивности, одиночной симметричности, первому и второму законам тождества, законам внутреннего и внешнего равноведения, непрерывности, четырехугольника, сходимости, n -мерности и метричности.

Выводы

С содержательной точки зрения закон метричности означает следующее. Пусть в пространстве N^* произвольно выбраны точки x, y и точка η , отличная от нулевой точки. Тогда можно будет найти, причем единственным образом, такую точку $t=a(x, y)\eta$, лежащую на луче, исходящем из точки 0 и проходящем через точку η , которая находится на таком же расстоянии от точки 0 , что и точки x и y друг от друга. Это означает, что расстоянию между любыми двумя точками пространства N^* , индуцируемому предикатом Φ , можно поставить в соответствие числовую меру.

Таким образом, можно говорить не только о равенстве или неравенстве расстояний между точками пространства N' , но и о самом расстоянии, которое может быть измерено вещественным числом.

Список литературы

1. Шабанова-Кушнаренко Л.В. Построение предикатной аксиоматической модели метрики на пространстве прецедентов / Л.В. Шабанова-Кушнаренко // Изв. РАН. Теория и системы управления. СОИ. – 2015. – № 9(134). – С. 83-87.
2. Шилов Г.Е. Математический анализ (конечномерные линейные пространства) / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1969. – 432 с.
3. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. Изд. 6 / Л.С. Понтрягин. - М.: Наука, 2009. - 519 с.

Поступила в редколлегию 23.11.2015

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.Ф. Чалый, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ПОБУДОВА СТРУКТУРИ ЛІНІЙНОГО ПРОСТОРУ ДЛЯ ПРЕДИКАТНОЇ МОДЕЛІ МЕТРИКИ

Л.В. Шабанова-Кушнаренко

Розроблено абстрактне визначення предиката, що метризує. Це дозволило ввести на множині N структуру лінійного простору над полем дійсних чисел, погоджену з операціями внутрішнього і зовнішнього рівноподілення точок. Сукупність властивостей введеного предиката, що метризує, утворюють повну систему умов, які забезпечують існування метризуючого предиката.

Ключові слова: метризуючий предикат, метрика, предикатна модель, компараторна ідентифікація.

BUILDING THE LINEAR SPACE STRUCTURE FOR METRIC PREDICATE MODEL

L.V. Shabanova-Kushnarenko

Designed abstract definition parametrized predicate that allowed to introduce on the set N structure of a linear space over the field of real numbers, consistent with the operations of the internal and external points. The set of properties entered parametrized predicate form a complete system of conditions ensuring the existence of parametrized predicate.

Keywords: parametrized predicate, metric, predicate model, identification comparator.