УДК 519.7

Л.В. Шабанова-Кушнаренко

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

ПОСТРОЕНИЕ СТРУКТУРЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА ДЛЯ ПРЕДИКАТНОЙ МОДЕЛИ МЕТРИКИ

Разработано абстрактное определение метризующего предиката, что позволило ввести на множестве N структуру линейного пространства над полем вещественных чисел, согласованную с операциями внутреннего и внешнего равноделения точек. Совокупность свойств введенного метризующего предиката образуют полную систему условий, обеспечивающих существование метризующего предиката.

Ключевые слова: *метризующий предикат, метрика, предикатная модель, компараторная идентификация.*

Введение

В [1] было введено понятие метризующего предиката и сформулированы некоторые из его характеристических свойств. Поставим теперь задачу, используя эти и некоторые другие свойства как исходные положения, получить аксиоматическое, т.е. абстрактное определение метризующего предиката. Для решения этой задачи сначала введем на множестве N с помощью операций внутреннего и внешнего равноделения точек структуру n-мерного векторного пространства. Она может не совпадать с исходной структурой n-мерного арифметического пространства N. Множество N с введенной на нем новой структурой векторного пространства будем обозначать символом N^*.

1. Введение структуры линейного пространства

Выберем в качестве нулевого вектора пространства N^* какой-нибудь элемент множества N. Обозначим его символом 0. Операцию сложения векторов x, y пространства N^* определяем следующим образом:

$$x+y = 0*(xoy). \qquad (1)$$

С содержательной точки зрения (т.е. исходя из первоначального конкретного определения метризующего предиката) вектор φ(x+y) в пространстве N' образуется из векторов φ(x) и φ(y) по правилу параллелограмма (рис. 1), в котором, как известно, диагонали делятся пополам точкой их пересечения.

Точка φ(0) играет в пространстве N' роль нулевого вектора. Вектор φ(x+y) представляет собой сумму векторов φ(x) и φ(y) пространства N'.

Множество N вместе с заданной на нем операцией сложения (1) образует абелеву группу [2]. Действительно, коммутативность сложения

$$x + y = y + x \qquad (2)$$

вытекает из определения (1) и коммутативности операции внутреннего равноделения o. Проверяем свойство нуля

$$0 + x = x. \qquad (3)$$

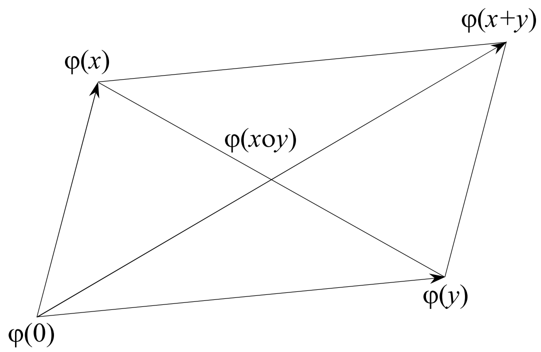

Рис. 1. Правило параллелограмма

Операция * является обратной по отношению к операции o, поэтому 0 + x = 0*(0ox) = x.

Доказываем единственность нуля. Предположим, что существуют два нулевых вектора 0' и 0'', так что для любого $x\in N$ имеем 0'+x=x и 0''+x=x. В частности, 0'+0''=0'' и 0'+0''=0'. В силу коммутативности сложения получаем 0'=0'', что и требовалось доказать. Однозначность решения уравнения x+y=0 при любом $x\in N$ относительно y выводится следующим образом: из равенства x+y=0 и (1) следует 0*(xoy)=0, откуда с учетом свойства xox=x получаем xoy=0o0=0, y=x*0. Таким образом,

$$-x = x*0. \qquad (4)$$

Доказываем ассоциативность сложения

$$(x + y) + z = x + (y + z). \qquad (5)$$

Полагая в законе четырехугольника t=z, имеем (xoy)o(zoz)=(zox)o (yoz). Пользуясь коммутативностью операции внутреннего равноделения и свойством xox = x, приходим к закону дистрибутивности для операции o: при любых x, y, $z\in N$:

$$(xoy)oz=(xoz)o(yoz). \quad (6)$$

В равенстве (6) заменяем x на z*x y на z*y. Тогда ((z*x)o(z*y))oz=((z*x)oz)o((z*y)oz), ((z*x)o(z*y))oz= =xoy, (z*x)o(z*y)=z*(xoy). После замены x на y, y на z и z на x приходим еще к одному закону дистрибутивности: при любых x, y, $z \in N$

$$(x*y)oz = (x*z)o(y*z). \quad (7)$$

Полагая в аксиоме четырехугольника t=0, имеем: (xoy)o(0oz) = (0ox)o (yoz). Из последнего равенства с помощью (7) выводим: 0*((xoy)o(0oz))=0*((0ox)o o(yoz)) = (0*(xoy))o(0*(0oz)) = (0*(0ox))o(0*(yoz)) = (x+y)oz=xo(y+z). Наконец, приходим к закону ассоциативности: 0*((x+y)oz)=(0*(xo(y+z)), (x+y)+ +z=x+(y+z). Итак, множество N вместе с заданной на нем операцией сложения (1) образует абелеву группу.

Приступаем к введению операции умножения вещественного числа на вектор x пространства N^*. Полагаем по определению операции умножения

$$0x = 0, \quad (8)$$

$$1x = x, \quad (9)$$

$$(-1)x = -x. \quad (10)$$

Определяем операцию удвоения 2x и операцию деления пополам $\frac{1}{2}x$ вектора x. Полагаем 2x=x+x. Это означает, что

$$2x = 0*x. \quad (11)$$

Принимаем, что $y=\frac{1}{2}x$ тогда и только тогда, когда 2y=x. Отсюда выводим

$$\frac{1}{2}x = 0ox. \quad (12)$$

Определяем умножение числа 2^k на вектор x k-кратным применением операции удвоения к вектору x:

$$2^kx=2(2...(2x)...). \quad (13)$$

Умножение числа 2^{-k} на вектор x определяем k-кратным применением операции деления пополам к вектору x:

$$2^{-k}x= (\frac{1}{2}...(\frac{1}{2}x)...). \quad (14)$$

Здесь k – произвольное натуральное число.

Далее, определяем операцию умножения суммы и произведения чисел 2^k и 2^l на вектор x:

$$(2^k+2^l)x=2^kx+2^l x, \quad (15)$$

$$(2^k 2^l)x=2^k(2^lx). \quad (16)$$

Здесь k, l – целые числа. Для любого целого k по определению полагаем:

$$(-2^k)x=2^k(-x). \quad (17)$$

Докажем, что

$$-(2x)=2(-x). \quad (18)$$

Для этого вводим векторы u=0*x и v=u*0. Согласно тождеству xox=x имеем (uov)o(uov)=uov. Применяя к полученному равенству свойство коммутативности операции o и ее свойство дистрибутивности (6), получаем (uov)ou)o((uov)ov)=uov. Из равенства u*0=v выводим uov=0, поэтому (0ou)o(0ov)=0. Из равенства 0*x=u выводим 0*u=x, поэтому xo(0ov)=0.

Отсюда 0ov=x*0, 0*(x*0)=v=u*0=(0*x)*0. Итак, (0*x)*0=0*(x*0). Используя (4) и (1), последнее равенство переписываем в виде (2x)0=0*(-x), а затем в виде -(2x)=2(-x). Тождество (18) доказано.

Докажем, что

$$-(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}(-x). \quad (19)$$

Для этого вводим вектор y=x*0. Согласно тождеству xox=x имеем: (xoy)o(xoy)=xoy. Применяя к полученному равенству свойство коммутативности операции o и ее свойство дистрибутивности (6), получаем: ((xoy)ox)o((xoy)oy)=xoy. Из равенства y=x*0 выводим xoy=0, поэтому (0ox)o(0oy)=0. Из последнего равенства выводим (0ox)*0=0oy=0o(x*0). Итак, (0ox)*0=0o (x*0). Используя (5) и (12), последнее равенство переписываем в виде: $(\frac{1}{2}x)*0=0o(-x)$. Тождество (19) доказано.

Из определений (13) и (14) и тождеств (18), (19) непосредственно вытекает тождество

$$-(2^kx) = 2^k(-x), \quad (20)$$

справедливое при любом целом k. Из определений (13), (14) также следует тождество

$$2^k(2^lx) = 2^{k+l}x, \quad (21)$$

справедливое при любых целых k и l.

Докажем, что при любом целом k имеет место тождество

$$2^kx+2^ky = 2^k(x+y). \quad (22)$$

Действительно, при k=0 тождество (22) выполняется: $2^0x+2^0y=1x+1y=x+y=1(x=y)=2^0(x+y)$. Выполняется оно и при k=1: $2^1x+2^1y=2x+2y= =(x+x)+(y+y)=(x+y)+(x+y)=2(x+y)=2^1(x+y)$.

Предположим, что при некотором k>0 тождество (22) выполняется. Тогда $2^{k+1}x+2^{k+1}y = 2^k(2x)+2^k(2y) = 2^k(2x+2y)=2^k(2(x+y)) = 2^{k+1}(x+y)$. Для случая k<0 свойство (22) доказывается аналогично.

Из (20) и (22) вытекает, что

$$2^kx-2^ky = 2^k(x-y). \quad (23)$$

Назовем двоично-рациональным любое число вида

$$l = \sum_{k=-m}^{n} a_k 2^k, \quad (24)$$

где $a_k \in \{-1, 0, 1\}$, а m и n – некоторые натуральные числа. При любом двоично-рациональном l определяем операцию lx равенством

$$\mathrm{l}x = \sum_{k=-m}^{n} a_k (2^k x). \qquad (25)$$

Корректность этого определения принимаем без доказательства.

Чтобы перейти от двоично-рациональных чисел к вещественным, придется опереться на закон непрерывности и еще на одно дополнительное свойство метризующего предиката: закон сходимости – для любой сходящейся последовательности двоично-рациональных чисел $\{l_n\}_{n=1}$ и произвольного $x \in N$ существует $\lim l_n x$. Законы непрерывности и сходимости позволяют определить операцию умножения произвольного вещественного числа l на любой элемент x множества N:

$$Lx = \lim l_n x, \qquad (26)$$

где $\{l_n\}$ – последовательность двоично-рациональных чисел, для которой $\lim l_n x = l$.

Корректность определения (26) обосновывается тем, что любое вещественное число l единственным способом представляется бесконечным двоичным кодом, а, следовательно, предел последовательности (26) для числа l может быть только один. Из определения (26) и перечисленных выше свойств метризующего предиката следует справедливость равенств (13) – (15) [1] для любых вещественных чисел l и m. Итак, мы ввели на множестве N структуру линейного пространства над полем вещественных чисел, согласованную с операциями внутреннего и внешнего равноделения точек. Этим доказано

Утверждение 1. Из законов парной рефлексивности, симметричности и транзитивности, одиночной симметричности, тождества, равноделения, непрерывности, четырехугольника и сходимости следует существование на области задания метризующего предиката структуры линейного пространства над полем вещественных чисел с операцией сложения векторов, определяемой равенством (17) [1].

Кроме того, имеет место следующее очевидное

Утверждение 2. Любой метризующий предикат подчиняется закону сходимости.

С содержательной точки зрения закон сходимости означает следующее. Если задаться произвольным вещественным числом l и попытаться экспериментально найти точку lx для произвольно выбранной точки x множества N, то это всегда удается сделать, причем при повторном выполнении процедуры отыскания точки lx придется выполнить ту же самую последовательность внутренних и внешних равноделений.

Поскольку любая физическая система, являющаяся объектом идентификации, имеет конечную чувствительность, то процесс отыскания точки lx не будет длиться бесконечно долго, а закончится за конечное число шагов.

2. Система условий существования предикатной модели метрики

Сформулируем еще два свойства метризующего предиката и докажем, что они, вместе со свойствами, введенными ранее, образуют полную систему условий, обеспечивающих существование метризующего предиката.

Сформулируем закон n-мерности – пространство N^*, введенное в предыдущем подразделе, n-мерно. В развернутой форме закон n-мерности запишем в следующем виде: существуют векторы e_1^*, e_2^*, ..., $e_n^* \in M^*$, такие, что равенство

$$\Phi\left(a, a, x, \sum_{i=1}^{n} a_i(x) e^*_i\right) = 1 \qquad (27)$$

выполняется для каждого $x \in N^*$ при единственном наборе коэффициентов $a_1(x)$, $a_2x)$, ..., $a_n(x)$. Здесь a – какой-нибудь вектор из N^*; a_1, a_2, ..., a_n – фиксированные функции, определенные на N^* со значениями в поле вещественных чисел.

Согласно второму закону тождества условие (30) равносильно равенству

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) e^*_i, \qquad (28)$$

которое означает, что любой вектор x выражается в виде линейной комбинации векторов e_1^*, e_2^*, ..., e_n^* при единственном наборе коэффициентов a_1, a_2, ..., a_n, а именно к этому сводится содержание закона n-мерности.

С содержательной точки зрения закон n-мерности означает следующее. Пусть в пространстве N^* произвольно выбрана точка x. Возьмем N фиксированных точек e_1^*, e_2^*, ..., $e_n^* \in N^*$ и попытаемся из них и из нулевой точки пространства N^*, комбинируя их многократно и в различной последовательности, с помощью операций внутреннего и внешнего равноделения, получить точку x. Закон n-мерности требует, чтобы существовала такая система точек e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*, при которой попытки такого рода всегда заканчиваются успешно. Он также требует, чтобы при использовании меньшего числа каких бы то ни было фиксированных точек не было возможности получить из них и из точки 0 точку x.

Возьмем в роли N' n-мерное арифметическое пространство R^n, а в роли φ' – функцию, отображающую пространство N^* на N' так, что вектору $x \in N^*$ с координатами x_1, x_2, ..., x_n соответствует в N' точка $x'=(x_1, x_2, ..., x_n)$. Предполагается, что базис в N^* зафиксирован. Очевидно, что φ' есть гомеоморфизм. В арифметическом пространстве любой размерности может быть введена евклидова метрика. Вместе с тем, все евклидовы пространства одинаковой размерности гомеоморфны [3]. Пространства

N и N' – арифметические и имеют одну и ту же размерность N, следовательно, существует гомеоморфизм φ, отображающий пространство N на пространство N'.

Отсюда непосредственно следует существование гомеоморфизма $\varphi''=(\varphi')^{-1}\varphi$, отображающего пространство N на пространство N^*.

Для аксиоматического обоснования структуры метрического предиката Ф, задаваемой соотношениями (1) [1] и (3) [1], осталось доказать возможность введения такого базиса $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ в N, при котором метрика, индуцируемая предикатом Ф, оказалась бы согласованной с метрикой пространства N'. Сказанное означает, что расстояние r(x', y') между точками x', y' пространства N', определяемое формулой (3) [1], должно удовлетворить условию (1) [1].

Сформулируем закон метричности – существует вектор $\eta\in N^*$ такой, что для любых $x, y\in N^*$ найдется единственное неотрицательное число a(x, y), для которого

$$\Phi(x, y, a(x, y)\eta, 0)=1. \quad (29)$$

Справедливы следующие утверждения:

Утверждение 3. Любой метризующий предикат подчиняется законам n-мерности и метричности.

Утверждение 4. Функция

$$r(x', y')=a(\varphi^{-1}(x'), \varphi^{-1}(y')) \quad (30)$$

обладает всеми свойствами евклидова расстояния и выражается в виде (3) [1].

Утверждение 5. Если принять $e_1=\varphi^{-1}(1, 0, 0, ..., 0, 0)$, $e_2=\varphi^{-1}(0, 1, 0, ..., 0, 0)$,..., $e_n=\varphi^{-1}(0, 0, 0, ..., 0, 1)$, то при любых $x_1, y_1, x_2, y_2\in N$ равенство $r(x_1, y_1)=r(x_2, y_2)$ будет равносильно равенству $\Phi(x_1, y_1, x_2, y_2)=1$.

Из утверждений 1-5 непосредственно следует утверждение об условиях существования метризующего предиката:

Утверждение 6. Для того чтобы предикат $\Phi(x_1, y_1, x_2, y_2)$ был метризующим, необходимо и достаточно, чтобы он подчинялся законам парной рефлексивности, симметричности и транзитивности, одиночной симметричности, первому и второму законам тождества, законам внутреннего и внешнего равноделения, непрерывности, четырехугольника, сходимости, n-мерности и метричности.

Выводы

С содержательной точки зрения закон метричности означает следующее. Пусть в пространстве N^* произвольно выбраны точки x, y и точка η, отличная от нулевой точки. Тогда можно будет найти, причем единственным образом, такую точку t=a(x, y)η, лежащую на луче, исходящем из точки 0 и проходящем через точку η, которая находится на таком же расстоянии от точки 0, что и точки x и y друг от друга. Это означает, что расстоянию между любыми двумя точками пространства N^*, индуцируемому предикатом Ф, можно поставить в соответствие числовую меру.

Таким образом, можно говорить не только о равенстве или неравенстве расстояний между точками пространства N', но и о самом расстоянии, которое может быть измерено вещественным числом.

Список литературы

1. *Шабанова-Кушнаренко Л.В. Построение предикатной аксиоматической модели метрики на пространстве прецедентов / Л.В. Шабанова-Кушнаренко // Изв. РАН. Теория и системы управления. СОИ. – 2015. – № 9(134). – С. 83-87.*
2. *Шилов Г.Е. Математический анализ (конечномерные линейные пространства) / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1969. – 432 с.*
3. *Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. Изд. 6 / Л.С. Понтрягин. - М.: Наука, 2009. - 519 с.*

Поступила в редколлегию 23.11.2015

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.Ф. Чалый, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ПОБУДОВА СТРУКТУРИ ЛІНІЙНОГО ПРОСТОРУ ДЛЯ ПРЕДИКАТНОЇ МОДЕЛІ МЕТРИКИ

Л.В. Шабанова-Кушнаренко

Розроблено абстрактне визначення предиката, що метрізує. Це дозволило ввести на множині N структуру лінійного простору над полем дійсних чисел, погоджену з операціями внутрішнього і зовнішнього рівноподілення точок. Сукупність властивостей введеного предиката, що метрізує, утворюють повну систему умов, які забезпечують існування метрізуючого предиката.

Ключові слова: *метрізуючий предикат, метрика, предикатна модель, компараторна ідентифікація.*

BUILDING THE LINEAR SPACE STRUCTURE FOR METRIC PREDICATE MODEL

L.V. Shabanova-Kushnarenko

Designed abstract definition parametrized predicate that allowed to introduce on the set N structure of a linear space over the field of real numbers, consistent with the operations of the internal and external points. The set of properties entered parametrized predicate form a complete system of conditions ensuring the existence of parametrized predicate.

Keywords: *parametrized predicate, metric, predicate model, identification comparator.*