УДК 621.396.96

ОПТИМІЗАЦІЯ СТРУКТУРИ БАЗОВОЇ МЕРЕЖІ ВИМІРЮВАЛЬНИХ ПУНКТІВ БАГАТОПОЗИЦІЙНОЇ ДАЛЕКОМІРНОЇ СИСТЕМИ

к.т.н. М.В. Грушенко, к.т.н. В.В. Косенко,
к.т.н. Ю.С. Литвинов, к.в.н. І.М. Майборода
(подав д.т.н., проф. Ю.В. Стасєв)

Проведений аналіз можливих варіантів структур багатопозиційної далекомірної системи відносно зменшення помилок вимірювання, який дозволив зробити висновки щодо вимог до побудови базової мережі вимірювальних пунктів.

Вступ. Наявність у параметрах, вимірюваних багатопозиційною далекомірною системою (БДС), систематичних або повільнозмінних погрішностей приводить до зсувів оцінок параметрів траєкторії об'єкта, які необхідно враховувати або введенням відповідних виправлень, обумовлених за апріорними математичними моделями і за попередніми юстирувальними вимірами [1], або за спільними із шуканими параметрами траєкторій об'єкта оцінками [2]. Однак існують повільнозмінні погрішності, що не піддаються урахуванню. [3, 4]. До них відноситься погрішність, викликана зміною на інтервалі спостереження затримки сигналу в бортовий пристрій для прийому об'єкта. Так, у [5] на прикладі навігаційної системи містознаходження NAVSTAR обґрунтована необхідність обліку відходів бортових еталонів часу, що викликають повільнозмінні погрішності у вимірах дальності від супутників до споживача, шляхом спільної оцінки координат споживача і систематичної погрішності у вимірах. Таким чином, з урахуванням зростаючих вимог до точнісних характеристик вимірювальних систем проблема виявлення і компенсації повільнозмінних погрішностей у вимірах у даний час є **актуальною**. Одним з підходів, що дозволяє зменшити вплив помилок такого роду, є вибір структури базової мережі вимірювальних пунктів БДС [6]. Таким чином, **метою дійсної роботи** є проведення дослідження впливу взаємної геометрії вимірювальної системи й об'єкта на якісні показники спільної оцінки координат об'єкта і систематичної погрішності вимірів за спостереженнями БДС.

1. Формалізація задачі. Нехай з m рознесених у просторі вимірювальних пунктів з відомими координатами виробляються синхронні спостереження похилих дальностей до візуального об'єкта в довільний заданий момент часу, що супроводжуються систематичною і випадковою погрішностями, так що

$$R_i^* = R_i + \Delta + \xi_i \quad (i = \overline{1,m}), \tag{1}$$

де R_i^* – вимірювані величини; $R_i = \left[(x - X_i)^2 + (y - Y_i)^2 + (z - Z_i)^2\right]^{1/2}$ – похила дальність „об'єкт – і-й вимірювальний пункт”; Δ – постійна на інтервалі спостереження систематична погрішність; ξ_i $(i = \overline{1,m})$ – випадкові нормально розподілені перешкоди з нульовим середнім значенням і відомою кореляційною матрицею; $N_{\xi ij} = \left\langle \xi_i \xi_j \right\rangle$ $(i, j = \overline{1,m})$; X_i, Y_i, Z_i $(i = \overline{1,m})$ – апріорно відомі координати вимірювальних пунктів; x, y, z – координати об'єкта в заданий момент часу.

Уведемо вектор оцінюваних параметрів $\vec{\lambda}$ у розглянутій задачі

$$\vec{\lambda} = \| x, y, z, \Delta \|^{T}. \tag{2}$$

Відомо [3], що потенційна точність оцінок шуканих параметрів при прийнятій моделі (1) характеризується кореляційною матрицею спільно-ефективних оцінок S_λ, зворотної до інформаційної матриці C_λ, що у розглянутому випадку представимо як

$$S_\lambda = C_\lambda^{-1} = (G^T W G)^{-1}, \tag{3}$$

де $W = N_\xi^{-1}$ – вагова позитивно визначена матриця, зворотна до кореляційної матриці погрішностей вимірів; G – матриця похідних параметрів, вимірюваних за обумовленим:

$$G = D^{-1}F = \begin{Vmatrix} R_1 & & 0 \\ & R_2 & \\ & \cdots & \\ 0 & & R_m \end{Vmatrix}^{-1} \begin{Vmatrix} x - X_1 & y - Y_1 & z - Z_1 & R_1 \\ x - X_2 & y - Y_2 & z - Z_2 & R_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x - X_m & y - Y_m & z - Z_m & R_m \end{Vmatrix}, \tag{4}$$

причому елементи всіх матриць у (3) і (4) обчислюються для істинних значень оцінюваних параметрів.

Якість спільних оцінок елементів вектора $\vec{\lambda}$ буде тим вище, чим вище ступінь обумовленості інформаційної матриці C_λ. Якщо матриця C_λ вироджується, то кореляційна матриця спільно-ефективних оцінок елементів вектора $\vec{\lambda} - S_\lambda$ втрачає значення. У цьому випадку досягається границя стійкого рішення розглянутої задачі й однозначне відшукання спільних оцінок шуканих параметрів неможливо. З іншого боку, виродження матриці C_λ означає при позитивній визначеності матриці W лінійну залежність стовпців матриці похідних G. Тому відшукання умов, при яких стовпці матриці G стають лінійно залежними, дозволить уникнути небажаних ситуацій при плануванні і проведенні траєкторних вимірів.

2. Аналіз матриці похідних параметрів. З урахуванням позитивної визначеності матриці D ($R_i > 0 \ (i = \overline{1,m}$) будемо шукати умови лінійної незалежності стовпців матриці F (4), тобто умови, при яких

$$\text{rang } F = 4, \tag{5}$$

що, вочевидь, може виконуватися тільки за умови

$$m \geq 4. \tag{6}$$

Знайдемо умови, при яких перші три стовпці матриці лінійно залежні. Для цього розглянемо мінори порядку трьох видів

$$\nabla_{3ijk} = \begin{vmatrix} x - X_i & y - Y_i & z - Z_i \\ x - X_j & y - Y_j & z - Z_j \\ x - X_k & y - Y_k & z - Z_k \end{vmatrix} \quad \left(\underset{i<j<k}{i, j, k = \overline{1,m}} \right). \tag{7}$$

Відомо [4], що довільний мінор виразу (7) дорівнює нулю, якщо координати X, Y, Z задовольняють рівнянню площини, яка задана i-ю, j-ю та k-ю точками. Отже, всі мінори порядку 3 (7) одночасно дорівнюють нулю, якщо всі m вимірювальних пунктів і об'єкт лежать в одній площині, і перші три стовпці матриці F (4) стають лінійно залежними. Відзначимо, що умова, при якій перші три стовпці матриці F (4) лінійно незалежні, тобто пункти й об'єкт не належать одній площини, є необхідною і достатньою (при дотриманні (6)) умовою однозначного рішення задачі відшукання тільки координат об'єкта (систематична погрішність виключена з вектора оцінюваних параметрів).

Перейдемо до відшукування таких конфігурацій вимірювальна система – об'єкт, при яких всі чотири стовпці матриці F (4) взаємно лінійно залежні. Мінори порядку чотирьох матриці F (4) можна представити як

$$\nabla_{4ijk\ell} = -\begin{vmatrix} x & y & z & 1 & 0 \\ X_i & Y_i & Z_i & 1 & R_i \\ X_j & Y_j & Z_j & 1 & R_j \\ X_k & Y_k & Z_k & 1 & R_k \\ X_\ell & Y_\ell & Z_\ell & 1 & R_\ell \end{vmatrix} \quad \left(\underset{i<j<k<\ell}{i, j, k, \ell = \overline{1,m}} \right). \tag{8}$$

Зафіксувавши координати об'єкта та i-го, j-го і k-го пунктів одержимо після розкладання рівняння щодо координат ℓ-го пункту:

$$aX_\ell + bY_\ell + cZ_\ell + d + fR_\ell = 0, \tag{9}$$

де $a = \begin{vmatrix} y & z & 1 & 0 \\ Y_i & Z_i & 1 & R_i \\ Y_j & Z_j & 1 & R_j \\ Y_k & Z_k & 1 & R_k \end{vmatrix}$; $b = \begin{vmatrix} x & z & 1 & 0 \\ X_i & Z_i & 1 & R_i \\ X_j & Z_j & 1 & R_j \\ X_k & Z_k & 1 & R_k \end{vmatrix}$; $c = \begin{vmatrix} x & y & 1 & 0 \\ X_i & Y_i & 1 & R_i \\ X_j & Y_j & 1 & R_j \\ X_k & Y_k & 1 & R_k \end{vmatrix}$;

$$d = \begin{vmatrix} x & y & z & 0 \\ X_i & Y_i & Z_i & R_i \\ X_j & Y_j & Z_j & R_j \\ X_k & Y_k & Z_k & R_k \end{vmatrix}; \quad f = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ X_i & Y_i & Z_i & 1 \\ X_j & Y_j & Z_j & 1 \\ X_k & Y_k & Z_k & 1 \end{vmatrix}.$$

Перенесемо член fR_ℓ у праву частину рівняння (9) і зведемо дві частин у квадрат, що дозволяє одержати вираз

$$\begin{aligned} a_{11}X_\ell^2 + a_{22}Y_\ell^2 + a_{33}Z_\ell^2 + 2a_{12}X_\ell Y_\ell + 2a_{13}X_\ell Z_\ell + 2a_{23}Y_\ell Z_\ell + \\ + 2a_{14}X_\ell + 2a_{24}Y_\ell + 2a_{34}Z_\ell + a_{44} = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

де $a_{11} = a^2 - f^2$; $a_{22} = b^2 - f^2$; $a_{33} = c^2 - f^2$; $a_{12} = ab$; $a_{13} = ac$; $a_{23} = bc$; $a_{14} = ad + f^2x$; $a_{24} = bd + f^2y$; $a_{34} = cd + f^2z$; $a_{44} = d^2 - f^2(x^2 + y^2 + z^2)$.

Дискримінант A рівняння (10)

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad (a_{ij} = a_{ji} \text{ при } i \neq j;\ i, j = \overline{1,4}) \tag{11}$$

дорівнює нулеві, а це означає, що поверхня другого порядку (10) – вироджена [4]. Конкретний вид цієї поверхні легко визначити, записавши рівняння (10) до канонічної форми:

$$\lambda_1 X_\ell'^2 + \lambda_2 Y_\ell'^2 + \lambda_3 Z_\ell'^2 = 0, \tag{12}$$

де λ_1, λ_2, λ_3 – власні значення дійсної симетричної матриці

$$H = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (a_{ij} = a_{ji} \text{ при } i \neq j;\ i, j = 1, 3), \tag{13}$$

причому припускають, що початок системи координат підібрано таким чином, що коефіцієнти рівняння (10) a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44} дорівнюють нулеві [4].

Прийнявши за початок системи координат положення об'єкта, одержимо після нескладних перетворень:

$$\lambda_1 = -(f^2 - a^2 - b^2 - c^2); \quad \lambda_{23} = -f^2. \tag{14}$$

3. Аналіз просторових перетворень. Тому що власні значення λ_2 і λ_3

рівні між собою, то рівняння (12) є рівнянням кругового конуса [4], у вершині якого розташований об'єкт. Геометричний смисл проведених перетворень полягає в тім, що знайдено таку систему координат з центром у точці положення об'єкта, що повернена в просторі щодо старої таким чином, що матриця (13) стає діагональною, причому в новій системі координат

$$b' = c' = d' = 0\,, \tag{15}$$

а віссю кругового конуса (12) є вісь OX'.

Перепишемо рівняння (12) з урахуванням (14) у новій системі координат

$$a'^2 X_\ell'^2 - f'^2 R_\ell^2 = 0\,, \tag{16}$$

або

$$(a' X_\ell' + f' R_\ell)(a' X_\ell' - f' R_\ell) = 0\,. \tag{17}$$

У цій системі координат рівняння (9) з урахуванням (15) приймає вигляд

$$a' X_\ell' + f' R_\ell = 0\,. \tag{18}$$

Порівняння (17) і (18) вказує на те, що рівняння (17) має два рішення, з яких рівнянню (18) задовольняє тільки перше (відкинуте зайве рішення, що виникло при зведенні в квадрат рівняння (9).

Установимо, при яких умовах коефіцієнти b' і c' дорівнюють нулю, тобто коли виконується (15) з урахуванням того, що всі точки (i, j, k) лежать на поверхні круглого конуса (16). Очевидно, координата будь-якої точки на його поверхні визначається співвідношенням

$$X = \pm \cos \alpha R \quad (0 \le \cos \alpha \le 1), \tag{19}$$

де α – кут між віссю обертання й утворюючого цього конуса. Знаки "$\pm$" у (19) указують на те, що розглянута точка може знаходитися як на правій, так і на лівій частині поверхні цього конуса, щодо площини $y'z'$. З цього випливає, що коефіцієнти b' й c' одночасно дорівнюють нулеві, якщо знаки величин X_i', X_j', X_k' однакові. З урахуванням цього, кожну координату X_n' $(n = i, j, k)$ можна представити як

$$X_n' = \operatorname{sign}(X_i') \cos \alpha R n \quad (n = i, j, k)\,. \tag{20}$$

Тоді підстановка (20) у вираз для коефіцієнтів a' і f' (18) приводить до рівняння

$$X_\ell' = \operatorname{sign}(X_i') \cos \alpha R_\ell\,. \tag{21}$$

Таким чином, знак координати X_ℓ' визначається знаком цієї ж координати i-го, j-го і k-го пунктів, тобто всі пункти у випадку дотримання (18) лежать на одній половині поверхні кругового конуса.

Помітимо, що при значному видаленні об'єкта від вимірювальної системи, тобто коли дальності значно перевищують відстані між вимірювальними пунктами, $R_1 \approx R_2 \approx \ldots \approx R_m$, $x - X_i \approx x$, $y - Y_i \approx y$, $z - Z_i \approx z$ ($i = \overline{1, m}$), степінь лінійної залежності стовпців матриці F зростає й інформаційна матриця C_λ стає погано обумовленою. Звідси маємо висновок про те, що високі точнісні характеристики спільних оцінок елементів вектора $\vec{\lambda}$ (2) можна одержати тільки у випадку, якщо об'єкт знаходиться в ближній стосовно вимірювальної системи зоні, тобто коли дальності порівнянні з відстанями між вимірювальними пунктами.

Висновки. 1. Якщо до складу вимірювальної системи входять тільки чотири пункти і вони не розташовані в одній площині, то об'єкт не повинен знаходитися на прямих, що є продовженням ребер піраміди, вершини якої – вимірювальні пункти.

2. При розташуванні чотирьох вимірювальних пунктів в одній площині, щоб уникнути критичних випадків, пункти бажано мати у своєму розпорядженні такий образ, щоб один з них лежав усередині трикутника, утвореного іншими трьома.

3. У випадках, коли кількість вимірників надмірний ($m > 4$) і не всі пункти лежать в одній площині, критичних конфігурацій можна уникнути, розміщаючи пункти таким чином, щоб існувала хоча б одна група з п'яти пунктів, у якій ніякі три з п'яти не лежали б на одній прямій.

4. У випадку, якщо об'єкт попадає на критичні конфігурації або знаходиться поблизу них, рішення даної задачі можливо при розширенні кількості вимірників або складу вимірюваних параметрів.

Перспективою подальших досліджень є розширення отриманих результатів і для навігаційних супутникових систем.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Сетевые спутниковые радионавигационные системы / В.С. Шебшаевич, П.П. Дмитриев, Н.В. Иванцевич и др. – М.: Радио и связь, 1982. – 272 с.*
2. *[Электр. ресурс]. – Режим доступа: http://www.aiub.unibe.ch/ionosphere.html .*
3. *Глобальна система визначення місцеположення (GPS): Теорія і практика / Б. Гофманн-Велленгоф, Г. Ліхтенеггер, Д. Коллінз. – К.: Наук. думка, 1995. – 380 с.*
4. *Талькович С.Е., Хомяков Э.Н. Статистическая теория измерительных радиосистем. – М.: Радио и связь, 1981. – 288 с.*
5. *Жданюк Б.Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений. – М.: Сов. радио, 1978. – 384 с.*
6. *Schaer S. How to use CODE's Global Ionosphere Maps // IGS Position Paper. – IGS Analysis Centers Workshop, May 1997. – 9 p.*

Надійшла 6.10.2004

***ГРУШЕНКО Михайло Вікторович**, канд. техн. наук, начальник навчального відділу Харківського університету Повітряних Сил. В 1988 році закінчив Воєнну академію зв'язку. Область наукових інтересів – завадозахищеність авіаційних радіоліній.*

***КОСЕНКО Віктор Васильович**, канд. техн. наук, начальник ІОЦ Харківського університету Повітряних Сил. У 1982 році закінчив Харківське ВВКІУ. Область наукових*

інтересів – управління процесами в інформаційних системах.

***ЛИТВИНОВ Юрій Семенович**, канд. техн. наук, начальник НДЛ наукового центра при ХВУ. Закінчив Ленінградську ВА зв'язку ім. Буденного у 1987 році. Область наукових інтересів – ефективність складних систем.*

***МАЙБОРОДА Ігор Миколайович**, канд. воєн. наук, доцент, нач. кафедри. У 1987 році закінчив ХВАУРЕ. Область наукових інтересів – військова кібернетика.*