

АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗНОРОДНЫХ БОЕВЫХ СРЕДСТВ ПО КРИТЕРИЮ МАКСИМУМА СРЕДНЕВЗВЕШЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ СУММАРНОГО КОЛИЧЕСТВА ОСНОВНЫХ СИЛ ОПЕРИРУЮЩЕЙ СТОРОНЫ В КОНЦЕ КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЁННОСТИ ПРИ ПОСТОЯННЫХ ПАРАМЕТРАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СРЕДСТВ

к.т.н. В.Б. Кононов
(представил д.т.н., проф. Б.Ф. Самойленко)

В статье рассмотрен алгоритм оптимального распределения разнородных боевых средств по критерию максимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил оперирующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости и постоянных параметрах распределения сил и средств стороны А.

Постановка задачи. При решении задач планирования в конфликтных ситуациях необходимо определить законы оптимального управления распределением разнородных сил и средств, имеющихся у оперирующей стороны, исходя при этом от поставленных целей, складывающейся ситуации и вероятных действий противника.

Планирование и последующее управление распределением разнородных сил и средств, а также управление распределением сил и средств резерва в условиях современной конфликтной ситуации представляет собой важную военно-научную задачу, актуальность которой определяется необходимостью создания в Вооружённых Силах Украины автоматизированной системы управления войсками и оружием.

Анализ литературы. Задачи оптимального управления распределением неоднородных сил и средств оперирующих сторон рассматривались в работах [1 – 5]. Так, в [1] сформулирована задача исследования и предложены критерии оптимального распределения сил и средств оперирующей стороны в динамических процессах конфликтных ситуаций. В [2] рассмотрен метод решения задачи распределения сил и средств в конфликтной ситуации. В [3] рассмотрена методика решения задач определения соотношения сил и средств сторон для случая разнородных средств. В [4] изложена методика решения задачи оптимального управ-

ления распределением разнородных сил и средств конфликтующей стороны по критерию минимума среднего суммарного количества основных сил противника. В [5] рассматривается решение задач оптимального управления распределением неоднородных сил и средств конфликтующей стороны по критериям максимума среднего суммарного количества основных сил в конце конфликтной ситуации, минимума среднего суммарного количества основных сил противника и максимума среднего суммарного количества основных сил за весь период конфликтной ситуации. В [6] ставится задача оптимального управления распределением разнородных сил и средств сторон по критериям максимума и минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противоборствующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях полной и неполной определённости и постоянных и переменных параметрах распределения сил и средств стороны А. Однако в этих работах не рассматривались способы решения поставленных задач и, естественно, не предлагался алгоритм их решения применительно к варианту конфликтной ситуации, в котором поставлена цель добиться того, чтобы в конце конфликтной ситуации средневзвешенное математическое ожидание основных сил оперирующей стороны было максимальным.

Цель статьи. Целью статьи является разработка оптимального распределения разнородных сил и средств сторон по критерию максимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил оперирующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости при постоянных параметрах распределения сил и средств стороны А.

Основной материал. Математические модели оптимального распределения разнородных сил и средств стороны А, описанные в статьях [1 – 5] предполагают, что оперирующая сторона А владеет информацией о стратегии, которой будет придерживаться сторона В.

Задача оптимального управления распределением разнородных боевых средств по критерию максимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил оперирующей стороны в конце боя в условиях определённости при постоянных параметрах распределения сил и средств стороны А рассмотрена в статье [6].

В данной задаче оптимального распределения разнородных сил и средств оперирующая сторона А стремится выбрать свои управляющие параметры $\alpha = \left\| \alpha_{ji} \right\|_{n,m}$ так, чтобы к концу боя средневзвешенное математическое ожидание суммарного количества своих основных сил было

максимальным при условии известной стратегии распределения сил и средств стороны В.

Математическая модель данной задачи представлена следующим образом:

$$\max_{\{\alpha_j\}} \sum_{i=1}^{m_1} v_i x_i(T); \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = -\sum_{j=1}^n \beta_{ij} b_{ij} y_j(t), & i = \overline{1, m}; \\ \frac{dy_j}{dt} = -\sum_{i=1}^m \alpha_{ji} a_{ji} x_i(t), & j = \overline{1, n}; \end{cases} \quad (2)$$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, m}; \quad y_j(0) = y_j^0, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \beta_{ij} = 1, & j = \overline{1, n}; \quad \beta_{ij} \geq 0; \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}; \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} = 1, & i = \overline{1, m}; \quad \alpha_{ji} \geq 0; \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (3)$$

где $v_i (i = \overline{1, m_1})$ – коэффициент важности основного средства i -го типа оперирующей стороны А; m_1 – количество типов основных средств стороны А; $\beta_{ij} (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ – заданные параметры распределения сил и средств стороны В; $\alpha_{ji} (j = \overline{1, n}, i = \overline{1, m}, 0 \leq t \leq T)$ – искомые управляющие параметры распределения сил и средств стороны А по силам и средствам стороны В; $x_i^0, y_j^0 (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ – количество сил и средств i -го типа стороны А и j -го типа стороны В в начале конфликтной ситуации; $a_{ji}, b_{ij} (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ – эффективные скорострельности средств i -го типа стороны А и j -го типа стороны В соответственно.

Для решения рассматриваемой задачи воспользуемся методом условного градиента, позволяющим предложить численное решение задачи оптимизации непрерывного дифференцируемого функционала $F(u)$ на выпуклом ограниченном множестве U гильбертова пространства H :

$$F(u) \rightarrow \min, \quad u \in U.$$

Согласно этому методу для k -го приближения $u^k \in U$ решение определяется вначале вспомогательное приближение $\bar{u}^k \in U$ как решение следующей задачи:

$$\langle F'(u^k), \bar{u}^k \rangle = \max_{u \in U} \langle F'(u^k), u \rangle,$$

где $F'(u^k)$ – градиент функционала $F(u)$ в точке u^k .

Очередное $k+1$ приближение решения задачи находят из соотношения

$$u^{k+1} = u^k + \rho_k (\bar{u}^k - u^k), \quad 0 \leq \rho_k \leq 1, \quad (4)$$

где ρ_k – шаг поиска.

Если градиент $F'(u)$ выпуклого функционала удовлетворяет условию Липшица на множестве U с константой $L \geq 0$, то последовательность (4) максимизирует этот функционал на U и слабо сходится к множеству оптимальных точек U^* :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(u^k) = F(u^*), \quad u^* \in U^*.$$

Обоснование применения метода условного градиента докажем с помощью следующей теоремы.

Теорема. Последовательность (4) для задачи (1) – (3) максимизирует функционал $J(\alpha)$.

Доказательство. Так как функционал $J(\alpha)$ линеен в силу линейности по α правых частей системы (2), то он выпукл. Множество D ограничений управлений α замкнуто и ограничено в R^{mn} . Функционал $J(\alpha)$ непрерывен и дифференцируем по α , причём его градиент представим в виде:

$$\begin{aligned} J'(\alpha) &= -\nabla_{\alpha} H(x, y, \varphi, \eta, \alpha) = \\ &= \nabla_{\alpha} \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\beta_{ij} b_{ij} y_j(t) \Psi_i(t) + \alpha_{ji} a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) \right] \right\} = \\ &= \left\| a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) \right\|_{m, n}. \end{aligned}$$

Это справедливо потому, что условие Липшица выполняется при $L=0$. В связи с вышесказанным следует справедливость теоремы.

Приведём обоснование алгоритма решения задачи (1) – (3).

1. Определение вспомогательного приближения.

$$\begin{aligned} \max_{\alpha \in D} \langle J'(\alpha^k), \alpha \rangle &= \max_{\alpha \in D} \int_0^T \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) \alpha_{ji} \right] dt = \\ \text{Так как} \end{aligned} \quad (5)$$

$$= \max_{\alpha \in D} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\int_0^T a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) dt \right) \alpha_{ji},$$

то максимум в (5) достигается при

$$\overline{\alpha}_{ji}^k = \begin{cases} 1, & j = j_k, \quad i = \overline{1, m}; \\ 0, & j \neq j_k, \quad i = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{где} \quad (j_k, i) = \arg \max_{1 \leq j \leq n} \left[\int_0^T a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) dt \right]. \quad (7)$$

Интегралы в (5) вычисляются по соотношениям:

$$I_{ij} = \int_0^T a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) dt \approx \frac{a_{ji}}{N} \int_0^T x_i(t_s) \eta_j(t_s) dt_s, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (8)$$

где N – количество промежутков разбиения отрезка $[0; T]$, $t_s = \frac{sT}{N}$, $s = \overline{0, N-1}$, а значение функций $x_i(t_s)$, $\eta_j(t_s)$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $s = \overline{0, N-1}$ в (8) определяются как численные решения системы дифференциальных уравнений (2) по методу Рунге – Кутты 4-го порядка при $\alpha = \alpha^k$:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} b_{ij} y_j(t), & i = \overline{1, m}; \\ \frac{dy_j}{dt} = - \sum_{i=1}^m \alpha_{ji}^k a_{ji} x_i(t), & j = \overline{1, n}; \end{cases} \quad (9)$$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, m}; \quad y_j(0) = y_j^0, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji}^k a_{ji} \eta_j(t), & i = \overline{1, m}; \\ \frac{d\eta_j}{dt} = \sum_{i=1}^m \beta_{ij} b_{ij} \varphi_i(t), & j = \overline{1, n}; \end{cases} \quad (10)$$

$$\varphi_i(T) = -v_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad \eta_j(T) = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Для сопряжённой системы интегрирование проводится в обратном порядке от $t = T$ к $t = 0$.

2. Определение шага поиска.

Приближение α^{k+1} будем находить по соотношению

$$\overline{\alpha}_{ji}^k = \begin{cases} 1, & j = j_k, \quad i = \overline{1, m}; \\ 0, & j \neq j_k, \quad i = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (11)$$

где

$$(j_k, i) = \arg \min_{1 \leq j \leq n} \left[\int_0^T a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) dt \right]; \quad (12)$$

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k + \rho_k \left(\overline{\alpha}^k - \alpha^k \right), \quad 0 \leq \rho_k \leq 1, \quad (13)$$

а величину шага ρ_k по формуле

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k + \rho_k \left(\overline{\alpha}^k - \alpha^k \right), \quad 0 \leq \rho_k \leq 1, \quad (14)$$

где $\overline{\alpha}^k = \left\| \overline{\alpha}_{j,i}^k \right\|_{n,m}$.

Определим длину шага ρ_k как оптимальную из соотношения

$$\varphi(\rho_k) = \min_{0 \leq \rho \leq 1} \varphi(\rho) = \min_{0 \leq \rho \leq 1} J \left[\alpha^k + \rho \left(\overline{\alpha}^k - \alpha^k \right) \right]. \quad (15)$$

3. Критерий оптимальности

Критерием останова алгоритма является выполнение неравенства

$$\Delta_k = \left| \sum_{i=1}^m v_i \left[x_i^{k+1}(T) - x_i^k(T) \right] \right| < \varepsilon. \quad (16)$$

Выводы.

1. В статье описан разработанный алгоритм оптимального управления распределением разнородных сил и средств оперирующих сторон по критерию максимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил оперирующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости при постоянных параметрах распределения сил и средств стороны А

2. Алгоритм оптимального управления распределением разнородных сил и средств оперирующих сторон по критерию максимума сред-

невзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил оперирующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости при постоянных параметрах распределения сил и средств стороны А можно использовать при решении задач, связанных с созданием автоматизированной системы управления войсками и оружием ВС Украины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кононов В.Б., Евстрат Д.И., Рафальский Ю.И., Бабий И.Ф. *Задачи оптимального распределения сил и средств в динамических процессах конфликтных ситуаций // Системы обработки інформації.* – Х.: ХФВ «Транспорт України». – 2001. – Вып. 1 (11). – С. 129 – 133.
2. Кононов В.Б. *Метод решения задачи распределения сил и средств в конфликтной ситуации // Системы обработки інформації.* – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вып. 2 (18). – С. 155 – 158.
3. Кононов В.Б., Рафальский Ю.И., Гурин А.П. *Оптимальное управление распределением средств резерва // Системы обработки інформації.* – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вып. 5 (21). – С. 45 – 47.
4. Кононов В.Б., Нестеренко А.П., Кожушко Я.Н. *Оптимальное управление распределением неоднородных сил и средств по критерию минимума среднего суммарного количества основных сил противника в конфликтной ситуации // Системы обработки інформації.* – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вып. 6 (22). – С. 277 – 280.
5. Кононов В.Б. *Задачи оптимального управления распределением неоднородных сил и средств // Системы обработки інформації.* – Х.: ХВУ. – 2002. – Вып. 1. – С. 59 – 62.
6. Кононов В.Б. *Оптимальное управление распределением разнородных сил и средств по критериям максимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил оперирующей стороны и минимума сил противника // Моделивання та інформаційні технології.* – К.: НАНУ, ИПМЕ ім. Г.Є. Пухова. – 2004. – Вып. № 26. – С. 87 – 92.

Поступила 20.09.2004

КОНОНОВ Владимир Борисович, кандидат технических наук, доцент, начальник кафедры ХУ ВС. В 1987 году окончил ХВВКИУ РВ. Область научных интересов – исследование операций.