УДК 623.021:005

АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗНОРОДНЫХ БОЕВЫХ СРЕДСТВ ПО КРИТЕРИЮ МАКСИМУМА СРЕДНЕВЗВЕШЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ СУММАРНОГО КОЛИЧЕСТВА ОСНОВНЫХ СИЛ ОПЕРИРУЮЩЕЙ СТОРОНЫ В КОНЦЕ КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЁННОСТИ ПРИ ПОСТОЯННЫХ ПАРАМЕТРАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СРЕДСТВ

к.т.н. В.Б. Кононов
(представил д.т.н., проф. Б.Ф. Самойленко)

В статье рассмотрен алгоритм оптимального распределения разнородных боевых средств по критерию максимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил оперирующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости и постоянных параметрах распределения сил и средств стороны А.

Постановка задачи. При решении задач планирования в конфликтных ситуациях необходимо определить законы оптимального управления распределением разнородных сил и средств, имеющихся у оперирующей стороны, исходя при этом от поставленных целей, складывающейся ситуации и вероятных действий противника.

Планирование и последующее управление распределением разнородных сил и средств, а также управление распределением сил и средств резерва в условиях современной конфликтной ситуации представляет собой важную военно-научную задачу, актуальность которой определяется необходимостью создания в Вооружённых Силах Украины автоматизированной системы управления войсками и оружием.

Анализ литературы. Задачи оптимального управление распределением неоднородных сил и средств оперирующих сторон рассматривались в работах [1 – 5]. Так, в [1] сформулирована задача исследования и предложены критерии оптимального распределения сил и средств оперирующей стороны в динамических процессах конфликтных ситуаций. В [2] рассмотрен метод решения задачи распределения сил и средств в конфликтной ситуации. В [3] рассмотрена методика решения задач определения соотношения сил и средств сторон для случая разнородных средств. В [4] изложена методика решение задачи оптимального управления распределением разнородных сил и средств конфликтующей стороны по критерию минимума среднего суммарного количества основных сил противника. В [5] рассматривается решение задач оптимального управления распределением неоднородных сил и средств конфликтующей стороны по критериям максимума среднего суммарного количества основных сил в конце конфликтной ситуации, минимума среднего суммарного количества основных сил противника и максимума среднего суммарного количества основных сил за весь период конфликтной ситуации. В [6] ставится задача оптимального управления распределением разнородных сил и средств сторон по критериям максимума и минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противоборствующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях полной и неполной определённости и постоянных и переменных параметрах распределения сил и средств стороны А. Однако в этих работах не рассматривались способы решения поставленных задач и, естественно, не предлагался алгоритм их решения применительно к варианту конфликтной ситуации, в котором поставлена цель добиться того, чтобы в конце конфликтной ситуации средневзвешенное математическое ожидание основных сил оперирующей стороны было максимальным.

Цель статьи. Целью статьи является разработка оптимального распределения разнородных сил и средств сторон по критерию максимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил оперирующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости при постоянных параметрах распределения сил и средств стороны А.

Основной материал. Математические модели оптимального распределения разнородных сил и средств стороны А, описанные в статьях [1 – 5] предполагают, что оперирующая сторона А владеет информацией о стратегии, которой будет придерживаться сторона В.

Задача оптимального управления распределением разнородных боевых средств по критерию максимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил оперирующей стороны в конце боя в условиях определённости при постоянных параметрах распределения сил и средств стороны А рассмотрена в статье [6].

В данной задаче оптимального распределения разнородных сил и средств оперирующая сторона А стремится выбрать свои управляющие параметры $\alpha = \left\| \alpha_{ji} \right\|_{n,m}$ так, чтобы к концу боя средневзвешенное математическое ожидание суммарного количества своих основных сил было максимальным при условии известной стратегии распределения сил и средств стороны В.

Математическая модель данной задачи представлена следующим образом:

$$\max_{\{\alpha\}} \sum_{i=1}^{m_1} v_i x_i(T); \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = -\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{ij} b_{ij} y_j(t), \quad i = \overline{1, m}; \\ \dfrac{dy_j}{dt} = -\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{ji} a_{ji} x_i(t), \quad j = \overline{1, n}; \end{cases} \tag{2}$$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, m}; \quad y_j(0) = y_j^0, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}; \quad \beta_{ij} \ge 0; \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ji} = 1, \quad i = \overline{1, m}; \quad \alpha_{ji} \ge 0; \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m}, \end{cases} \tag{3}$$

где $v_i \left(i = \overline{1, m_1}\right)$ – коэффициент важности основного средства i-го типа оперирующей стороны А; m_1 – количество типов основных средств стороны А; $\beta_{ij} \left(i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}\right)$ – заданные параметры распределения сил и средств стороны В; $\alpha_{ji} \left(j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m}, \quad 0 \le t \le T\right)$ – искомые управляющие параметры распределения сил и средств стороны А по силам и средствам стороны В; $x_i^0, y_j^0 \left(i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}\right)$ – количество сил и средств i-го типа стороны А и j-го типа стороны В в начале конфликтной ситуации; $a_{ji}, b_{ij} \left(i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}\right)$ – эффективные скорострельности средств i-го типа стороны А и j-го типа стороны В соответственно.

Для решения рассматриваемой задачи воспользуемся методом условного градиента, позволяющим предложить численное решение задачи оптимизации непрерывного дифференцируемого функционала $F(u)$ на выпуклом ограниченном множестве U гильбертова пространства H:

$$F(u) \to \min, \quad u \in U.$$

Согласно этому методу для k-го приближения $u^k \in U$ решение определяется вначале вспомогательное приближение $\bar{u}^k \in U$ как решение следующей задачи:

$$\left\langle F'\left(u^k\right), \bar{u}^k \right\rangle = \max_{u \in U} \left\langle F'\left(u^k\right), u \right\rangle,$$

где $F'\left(u^k\right)$ – градиент функционала $F(u)$ в точке u^k.

Очередное $k+1$ приближение решения задачи находят из соотношения

$$u^{k+1} = u^k + \rho_k\left(\bar{u}^k - u^k\right), \quad 0 \le \rho_k \le 1, \tag{4}$$

где ρ_k – шаг поиска.

Если градиент $F'(u)$ выпуклого функционала удовлетворяет условию Липшица на множестве U с константой $L \ge 0$, то последовательность (4) максимизирует этот функционал на U и слабо сходится к множеству оптимальных точек U^*:

$$\lim_{k \to \infty} F\left(u^k\right) = F\left(u^*\right), \quad u^* \in U^*.$$

Обоснование применение метода условного градиента докажем с помощью следующей теоремы.

Теорема. Последовательность (4) для задачи (1) – (3) максимизирует функционал $J(\alpha)$.

Доказательство. Так как функционал $J(\alpha)$ линеен в силу линейности по α правых частей системы (2), то он выпукл. Множество D ограничений управлений α замкнуто и ограничено в R^{mn}. Функционал $J(\alpha)$ непрерывен и дифференцируем по α, причём его градиент представим в виде:

$$J'(\alpha) = -\nabla_\alpha H(x, y, \varphi, \eta, \alpha) =$$

$$= \nabla_\alpha \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left[\beta_{ij} b_{ij} y_j(t) \Psi_i(t) + \alpha_{ji} a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) \right] \right\} =$$

$$= \left\| a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) \right\|_{m,n}.$$

Это справедливо потому, что условие Липшица выполняется при $L = 0$. В связи с вышесказанным следует справедливость теоремы .

Приведём обоснование алгоритма решения задачи (1) – (3).

1. Определение вспомогательного приближения.

Так как

$$\max_{\alpha\in D}\left\langle J'\left(\alpha^{k}\right),\alpha\right\rangle=\max_{\alpha\in D}\int_0^T\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ji}x_i(t)\eta_j(t)\alpha_{ji}\right]dt=$$
$$=\max_{\alpha\in D}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^T a_{ji}x_i(t)\eta_j(t)dt\right)\alpha_{ji},\tag{5}$$

то максимум в (5) достигается при

$$\overline{\alpha_{ji}^{k}}=\begin{cases}1, & j=j_k,\quad i=\overline{1,m};\\ 0, & j\neq j_k,\quad i=\overline{1,m},\end{cases}\tag{6}$$

где

$$\left(j_k,i\right)=\arg\max_{1\le j\le n}\left[\int_0^T a_{ji}x_i(t)\,\eta_j(t)\,dt\right].\tag{7}$$

Интегралы в (5) вычисляют по соотношениям:

$$I_{ij}=\int_0^T a_{ji}x_i(t)\,\eta_j(t)\,dt\approx\frac{a_{ji}T}{N}\sum_{s=0}^{N-1}x_i\left(t_s\right)\eta_j\left(t_s\right),\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n},\tag{8}$$

где N – количество промежутков разбиения отрезка $[0;T]$, $t_s=\dfrac{sT}{N}$, $s=\overline{0,N-1}$, а значение функций $x_i(t_s),\eta_j(t_s)$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, $s=\overline{0,N-1}$ в (8) определяются как численное решения системы дифференциальных уравнений (2) по методу Рунге – Кутта 4-го порядка при $\alpha=\alpha^{k}$:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_i}{dt}=-\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}b_{ij}y_j(t), & i=\overline{1,m};\\ \dfrac{dy_j}{dt}=-\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ji}^{k}a_{ji}x_i(t), & j=\overline{1,n};\end{cases}\tag{9}$$

$$x_i(0)=x_i^0,\quad i=\overline{1,m};\quad y_j(0)=y_j^0,\quad j=\overline{1,n};$$

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}^{k}a_{ji}\eta_j(t), & i=\overline{1,m};\\ \dfrac{d\eta_j}{dt}=\sum_{i=1}^{m}\beta_{ij}b_{ij}\varphi_i(t), & j=\overline{1,n};\end{cases}\tag{10}$$

$$\varphi_i(T)=-v_i,\quad i=\overline{1,m};\quad \eta_j(T)=0,\quad j=\overline{1,n}.$$

Для сопряжённой системы интегрирование проводится в обратном порядке от $t = T$ к $t = 0$.

2. Определение шага поиска.

Приближение α^{k+1} будем находить по соотношению

$$\overline{\alpha_{ji}^{k}} = \begin{cases} 1, & j = j_k, \quad i = \overline{1, m}; \\ 0, & j \neq j_k, \quad i = \overline{1, m}, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$(j_k, i) = \arg \min_{1 \le j \le n} \left[\int_0^T a_{ji} x_i(t) \eta_j(t)\, dt \right]; \tag{12}$$

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k + \rho_k \left(\overline{\alpha}^k - \alpha^k \right), \quad 0 \le \rho_k \le 1, \tag{13}$$

а величину шага ρ_k по формуле

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k + \rho_k \left(\overline{\alpha}^k - \alpha^k \right), \quad 0 \le \rho_k \le 1, \tag{14}$$

где $\overline{\alpha}^k = \left\| \overline{\alpha}^k_{j,i} \right\|_{n,m}$.

Определим длину шага ρ_k как оптимальную из соотношения

$$\varphi(\rho_k) = \min_{0 \le \rho \le 1} \varphi(\rho) = \min_{0 \le \rho \le 1} J\left[\alpha^k + \rho\left(\overline{\alpha}^k - \alpha^k \right) \right]. \tag{15}$$

3. Критерий оптимальности

Критерием останова алгоритма является выполнение неравенства

$$\Delta_k = \left| \sum_{i=1}^{m} v_i \left[x_i^{k+1}(T) - x_i^k(T) \right] \right| \langle\ \varepsilon. \tag{16}$$

Выводы.

1. В статье описан разработанный алгоритм оптимального управления распределением разнородных сил и средств оперирующих сторон по критерию максимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил оперирующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости при постоянных параметрах распределения сил и средств стороны А

2. Алгоритм оптимального управления распределением разнородных сил и средств оперирующих сторон по критерию максимума сред-

невзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил оперирующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости при постоянных параметрах распределения сил и средств стороны А можно использовать при решении задач, связанных с созданием автоматизированной системы управления войсками и оружием ВС Украины.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кононов В.Б., Евстрат Д.И., Рафальский Ю.И., Бабий И.Ф. Задачи оптимального распределения сил и средств в динамических процессах конфликтных ситуаций // Системи обробки інформації. – Х.: ХФВ «Транспорт України». – 2001. – Вип. 1 (11). – С. 129 – 133.*
2. *Кононов В.Б. Метод решения задачи распределения сил и средств в конфликтной ситуации // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 2 (18). – С. 155 – 158.*
3. *Кононов В.Б., Рафальский Ю.И., Гурин А.П. Оптимальное управление распределением средств резерва // Системи обробки інформації. – Х.:НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 5 (21). – С. 45 – 47.*
4. *Кононов В.Б., Нестеренко А.П., Кожушко Я.Н. Оптимальное управление распределением неоднородных сил и средств по критерию минимума среднего суммарного количества основных сил противника в конфликтной ситуации // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 6 (22). – С. 277 – 280.*
5. *Кононов В.Б. Задачи оптимального управление распределением неоднородных сил и средств // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ. – 2002. – Вип. 1. – С. 59 – 62.*
6. *Кононов В.Б. Оптимальное управление распределением разнородных сил и средств по критериям максимума средневзвешеного математического ожидания суммарного количества основных сил оперирующей стороны и минимума сил противника // Моделювання та інформаційні технології. – К.: НАНУ, ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова. – 2004. – Вип. № 26. – С. 87 – 92.*

Поступила 20.09.2004

***КОНОНОВ Владимир Борисович**, кандидат технических наук, доцент, начальник кафедры ХУ ВС. В 1987 году окончил ХВВКИУ РВ. Область научных интересов – исследование операций.*