

## **КОНТАКТ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ВЫТАЧКОЙ И ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ**

к.т.н. М.Е. Резуненко, к.т.н. А.В. Довбня, Т.В. Коновалова  
(представил д.т.н., проф. В.И. Карпенко)

*Рассмотрена задача взаимодействия оболочки отрицательной или нулевой гауссовой кривизны и упругого штампа. Найдена плотность контактных усилий  $p(x)$  и длина зоны контакта  $2l$  в зависимости от величины силы  $P$ , прижимающей оболочку к полуплоскости (упругому штампу).*

**Постановка проблемы.** При решении контактных задач ставятся требования как о наиболее точном описании процессов деформирования в контактируемых телах, так и об удобстве алгоритмизации соответствующих методов. Это обусловлено тем, что основная сложность решения задач такого типа состоит в необходимости определения зоны контакта, ее изменения в процессе нагружения, учета физических постоянных материалов взаимодействующих конструкций. Все это заставляет принимать разумные упрощения точных соотношений теории.

**Анализ литературы.** Задача контактного взаимодействия в аналогичной постановке, но другим методом решалась в [3]. Ниже задача решается на основе полученных в [2] асимптотических формул, имеющих более простой вид по сравнению с полученными ранее.

**Цель статьи.** Основной целью статьи является получение выражений для зависимостей плотности контактных усилий и длины зоны контакта от величины прижимающей силы  $P$ , удовлетворяющих требованиям к точности описания процессов деформирования в контактируемых телах и к удобству их алгоритмизации.

**Основной раздел.** Задачи контактного взаимодействия оболочек имеют специфические особенности [1]. Одна из них состоит в том, что взаимодействие элементов происходит по узкой двумерной области, которую можно моделировать отрезком дуги. Ниже рассматривается именно такая постановка задачи.

Рассмотрена задача взаимодействия оболочки отрицательной или нулевой гауссовой кривизны и упругого штампа с выступом радиуса  $R_2$  (рис. 1).

Этот контакт приводит к появлению нормальных усилий. Предполагается, что взаимодействие происходит с помощью нормальных контактных усилий. Касательными компонентами взаимодействия пренебрегаем.

Ложемент расположен в плоскости XOZ. Он симметричен относительно оси OZ. Необходимо вычислить длину зоны контакта  $2l$  и контактную нагрузку  $p(\xi)$ , зависящей от силы  $P$ , прижимающей рассматриваемое тонкостенное тело к упругому штампу, уравнение контура которого имеет вид  $z = z(x)$ .

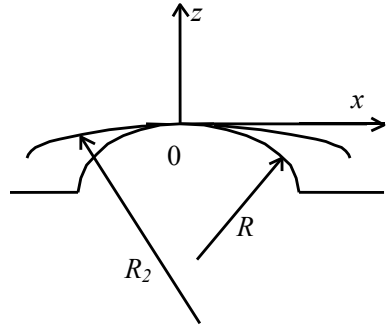


Рис. 1. Схема задачи

Данная модель описывается следующим интегральным уравнением:

$$w(x, 0) + w_1(x) = \delta + \gamma x^2. \quad (1)$$

где  $\delta$  – неизвестная константа, характеризующая сближение контактируемых тел;  $w(x, 0)$ ,  $w_1(x)$  – перемещения срединной поверхности оболочки и контура штампа соответственно;  $\gamma = 1/2R - 1/2R_2$ ;  $R$  – радиус оболочки.

Так как зона контакта предполагается малой, то в качестве фундаментального решения  $w_1(x)$  используем решение для полуплоскости.

$$w_1(x) = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E_1 h_1} \left\{ \int_{-l}^l p(\xi) \ln|y - \xi| d\xi + P \left[ \frac{1}{2(1-\nu^2)} - \ln R_2 \right] \right\},$$

где  $E_1$  – коэффициент Пуассона полуплоскости;  $\nu_1$  – модуль Юнга полуплоскости;  $h_1$  – толщина полуплоскости;  $p(\xi)$  – контактное давление.

Перемещение срединной поверхности полой оболочки описывается уравнением, определяющим прогиб под воздействием нормальной нагрузки. В асимптотической форме это уравнение для полой оболочки неположительной кривизны  $\lambda$  ( $-1 \leq \lambda \leq 0$ ) имеет вид [2]:

$$w(x, 0) = \frac{(bx)^2}{16\pi b^2 D} \left\{ 2 \ln \frac{|bx\sqrt{1-\lambda}|}{2} + 2C + \frac{1+\lambda}{1-\lambda} - 2 \right\} + \frac{1}{4\pi b^2 D} I.$$

где  $I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{|\cos^2 \varphi + \lambda \sin^2 \varphi|}$ ;  $b^2 = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{hR}$ ;  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ;  $C$  – постоянная

Эйлера ( $C \approx 0.5772$ );  $E$ ,  $\nu$  – физические постоянные оболочки;  $h$  – толщина оболочки. Тогда уравнение (1) перепишем в виде:

$$\int_{-l}^l p(t) \left[ \frac{1}{16D\pi} (y-t)^2 \{C_1 + 2 \ln|y-t|\} - \frac{L}{\pi} \ln|y-t| \right] dt - \frac{M}{\pi} = \delta + \gamma x^2, \quad (2)$$

где  $C_1 = 2 \ln \frac{b\sqrt{1-\lambda}}{2} + 2C + \frac{1+\lambda}{1-\lambda} - 2$ ;  $L = \frac{2(1-\nu^2)}{E_1 h_1}$ ;  $M = P \left[ \frac{1}{2(1-\nu^2)} - \ln R_2 \right] + \frac{1}{b^2 D} P l$ .

Условие равновесия штампа под действием внешней силы:  $\int_{-l}^l p(t) dt = P$ .

Решение интегрального уравнения (2), данное И.Я. Штаерманом [3], имеет вид:

$$p(x) = -\frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{\pi^2} \int_{-l}^l \frac{f'(t) dt}{\sqrt{l^2 - t^2} (t-x)};$$

$$f(x) = -\frac{\gamma \pi x^2}{L} + \frac{1}{16DL} \int_{-l}^l p(t) (y-t)^2 [C_1 + 2 \ln|x-t|] dt + \frac{M\pi}{L} + \frac{\delta\pi}{L}. \quad (3)$$

Для нахождения контактного давления  $p(x)$  методом итераций предположим, что оболочка – абсолютно жесткая. Тогда  $f(x)$  примет вид

$$f(x) = -\frac{\gamma x^2}{L},$$

и, следовательно, для контактного давления получим:

$$p(x) = \frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{\pi^2 L} \int_{-l}^l \frac{2\gamma \pi dt}{\sqrt{l^2 - t^2} (t-x)} = 2\gamma \frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{\pi L} \int_{-l}^l \frac{tdt}{\sqrt{l^2 - t^2} (t-x)} =$$

$$= 2\gamma \frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{\pi L} \left( \int_{-l}^l \frac{dt}{\sqrt{l^2 - t^2}} + x \int_{-l}^l \frac{dt}{\sqrt{l^2 - t^2} (t-x)} \right) = 2\gamma \frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{L}. \quad (4)$$

Принимая теперь, что оболочка не является абсолютно жесткой, и, подставляя (4) в (3), после первой итерации получим:

$$p(x) = \frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{\pi L} \left\{ \int_{-l}^l \frac{2\gamma t dt}{\sqrt{l^2 - t^2} (t-x)} - \frac{\gamma}{4DL^2} \int_{-l}^l \frac{dt}{\sqrt{l^2 - t^2} (t-x)} \times \right.$$

$$\left. \times \int_{-l}^l \sqrt{l^2 - \xi^2} (t-\xi) (C_1 + 2 \ln|t-\xi|) d\xi \right\}. \quad (5)$$

Здесь мы воспользовались теоремой о дифференцировании под знаком интеграла. Легко проверить, что выполнены все ее условия, т.е.:

- 1) функция  $g(\xi, t) = \int_{-l}^l \sqrt{l^2 - \xi^2} (t - \xi)(C_1 + 2 \ln|t - \xi|) d\xi$  непрерывна по  $\xi$  в прямоугольнике  $[-l, l; -l, l]$  при любом фиксированном  $t \in [-l, l]$ ;
- 2) во всей области существует частная производная  $g'_t(\xi, t)$ , непрерывная как функция двух переменных.

После вычислений (5) получим:

$$p(x) = \gamma \frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{L} \left[ 2 - \frac{\pi l^2}{4DL} \left( \frac{1 + \lambda}{2(1 - \lambda)} + C + \ln \frac{bl\sqrt{1 - \lambda}}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right) \right].$$

Зависимость между длиной зоны контакта  $2l$  и величиной прижимающей силы  $P$  определяется уравнением:

$$P = \gamma \frac{l^2 \pi}{L} \left[ 1 - \frac{\pi l^2}{32DL} \left( 8C + 8 \ln \frac{bl\sqrt{1 - \lambda}}{4} + 2 \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} - 1 \right) \right].$$

**Вывод.** Таким образом, полученные выражения для плотности контактных усилий  $p(x)$  и зависимости длины зоны контакта  $2l$  от величины силы  $P$ , прижимающей оболочку к полуплоскости (упругому штампу), позволяют достаточно просто алгоритмизировать описание процессов деформирования в контактируемых телах.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980. – 324 с.
2. Нерубайло Б.В., Ольшанский В.П., Резуненко М.Е. Об одной форме фундаментального решения уравнений оболочек отрицательной гауссовой кривизны // Известия АН. Механика твердого тела. – М., 1997. – № 4. – С. 144 – 149.
3. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1949. – 160 с.
4. Ольшанский В.П. Интегральные уравнения изгиба пологих оболочек // Вычислительная прикладная математика. – 1982. – Вып. 47. – С. 103 – 110.

Поступила 16.09.2004

**РЕЗУНЕНКО Марина Евгеньевна**, канд. тех. наук, доцент УИПА. В 1993 году окончила ХГУ. Область научных интересов – механика твердого тела.

**ДОВБНЯ Александр Владимирович**, канд. техн. наук, научн. сотр. ОНИУ ВС. Окончил ХВУ в 1997 году. Область научных интересов – АСУ и системы обработки радиолокационной информации.

**КОНОВАЛОВА Татьяна Васильевна**, научн. сотр. ОНИУ ВС. В 1990 году окончила ХАИ. Область научных интересов – системы управления и обработки информации.