УДК 623.55.02

КОНТАКТ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ВЫТАЧКОЙ И ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

к.т.н. М.Е. Резуненко, к.т.н. А.В. Довбня, Т.В. Коновалова
(представил д.т.н., проф. В.И. Карпенко)

Рассмотрена задача взаимодействия оболочки отрицательной или нулевой гауссовой кривизны и упругого штампа. Найдена плотность контактных усилий p(x) и длина зоны контакта 2l в зависимости от величины силы P, прижимающей оболочку к полуплоскости (упругому штампу).

Постановка проблемы. При решении контактных задач ставятся требования как о наиболее точном описании процессов деформирования в контактируемых телах, так и об удобстве алгоритмизации соответствующих методов. Это обусловлено тем, что основная сложность решения задач такого типа состоит в необходимости определения зоны контакта, ее изменения в процессе нагружения, учета физических постоянных материалов взаимодействующих конструкций. Все это заставляет принимать разумные упрощения точных соотношений теории.

Анализ литературы. Задача контактного взаимодействия в аналогичной постановке, но другим методом решалась в [3]. Ниже задача решается на основе полученных в [2] ассимптотичеких формул, имеющих более простой вид по сравнению с полученными ранее.

Цель статьи. Основной целью статьи является получение выражений для зависимостей плотности контактных усилий и длины зоны контакта от величины прижимающей силы P, удовлетворяющих требованиям к точности описания процессов деформирования в контактируемых телах и к удобству их алгоритмизации.

Основной раздел. Задачи контактного взаимодействия оболочек имеют специфические особенности [1]. Одна из них состоит в том, что взаимодействие элементов происходит по узкой двумерной области, которую можно моделировать отрезком дуги. Ниже рассматривается именно такая постановка задачи.

Рассмотрена задача взаимодействия оболочки отрицательной или нулевой гауссовой кривизны и упругого штампа с выступом радиуса R_2 (рис. 1).

Этот контакт приводит к появлению нормальных усилий. Предполагается, что взаимодействие происходит с помощью нормальных контактных усилий. Касательными компонентами взаимодействия пренебрегаем.

Ложемент расположен в плоскости XOZ. Он симметричен относительно оси OZ. Необходимо вычислить длину зоны контакта 2l и контактной нагрузки $p(\xi)$, зависящей от силы P, прижимающей рассматриваемое тонкостенное тело к упругому штампу, уравнение контура которого имеет вид $z = z(x)$.

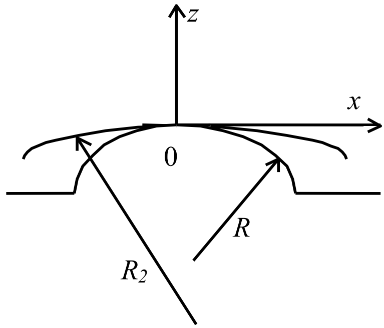

Рис. 1. Схема задачи

Данная модель описывается следующим интегральным уравнением:

$$w(x, 0) + w_1(x) = \delta + \gamma x^2. \tag{1}$$

где δ – неизвестная константа, характеризующая сближение контактируемых тел; $w(x, 0)$, $w_1(x)$ – перемещения срединной поверхности оболочки и контура штампа соответственно; $\gamma = 1/2R - 1/2R_2$; R – радиус оболочки.

Так как зона контакта предполагается малой, то в качестве фундаментального решения $w_1(x)$ используем решение для полуплоскости.

$$w_1(x) = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E_1 h_1}\left\{\int_{-l}^{l} p(\xi)\ln|y-\xi|d\xi + P\left[\frac{1}{2(1-\nu^2)} - \ln R_2\right]\right\},$$

где E_1 – коэффициент Пуассона полуплоскости; ν_1 – модуль Юнга полуплоскости; h_1 – толщина полуплоскости; $p(\xi)$ – контактное давление.

Перемещение срединной поверхности пологой оболочки описывается уравнением, определяющим прогиб под воздействием нормальной нагрузки. В асимптотической форме это уравнение для пологой оболочки неположительной кривизны λ $(-1 \le \lambda \le 0)$ имеет вид [2]:

$$w(x,0) = \frac{(bx)^2}{16\pi b^2 D}\left\{2\ln\frac{\left|bx\sqrt{1-\lambda}\right|}{2} + 2C + \frac{1+\lambda}{1-\lambda} - 2\right\} + \frac{1}{4\pi b^2 D} I.$$

где $I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left|\cos^2\varphi + \lambda \sin^2\varphi\right|}$; $b^2 = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{hR}$; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$; C – постоянная Эйлера ($C \approx 0.5772$); E, ν – физические постоянные оболочки; h – толщина оболочки. Тогда уравнение (1) перепишем в виде:

$$\int_{-l}^{l} p(t)\left[\frac{1}{16D\pi}(y-t)^2\{C_1+2\ln|y-t|\}-\frac{L}{\pi}\ln|y-t|\right]dt-\frac{M}{\pi}=\delta+\gamma x^2, \qquad (2)$$

где $C_1=2\ln\frac{b\sqrt{1-\lambda}}{2}+2C+\frac{1+\lambda}{1-\lambda}-2$; $L=\frac{2(1-\nu^2)}{E_1 h_1}$; $M=P\left[\frac{1}{2(1-\nu^2)}-\ln R_2\right]+\frac{1}{b^2 D}PI$.

Условие равновесия штампа под действием внешней силы: $\int_{-l}^{l} p(t)\,dt=P$.

Решение интегрального уравнения (2), данное И.Я. Штаерманом [3], имеет вид:

$$p(x)=-\frac{\sqrt{l^2-x^2}}{\pi^2}\int_{-l}^{l}\frac{f'(t)dt}{\sqrt{l^2-t^2}\,(t-x)};$$

$$f(x)=-\frac{\gamma\pi x^2}{L}+\frac{1}{16DL}\int_{-l}^{l}p(t)\,(y-t)^2\left[C_1+2\ln|x-t|\right]dt+\frac{M\pi}{L}+\frac{\delta\pi}{L}. \qquad (3)$$

Для нахождения контактного давления p(x) методом итераций предположим, что оболочка – абсолютно жесткая. Тогда f(x) примет вид

$$f(x)=-\frac{\gamma x^2}{L},$$

и, следовательно, для контактного давления получим:

$$p(x)=\frac{\sqrt{l^2-x^2}}{\pi^2 L}\int_{-l}^{l}\frac{2\gamma\pi dt}{\sqrt{l^2-t^2}\,(t-x)}=2\gamma\frac{\sqrt{l^2-x^2}}{\pi L}\int_{-l}^{l}\frac{t dt}{\sqrt{l^2-t^2}\,(t-x)}=$$

$$=2\gamma\frac{\sqrt{l^2-x^2}}{\pi L}\left(\int_{-l}^{l}\frac{dt}{\sqrt{l^2-t^2}}+x\int_{-l}^{l}\frac{dt}{\sqrt{l^2-t^2}\,(t-x)}\right)=2\gamma\frac{\sqrt{l^2-x^2}}{L}. \qquad (4)$$

Принимая теперь, что оболочка не является абсолютно жесткой, и, подставляя (4) в (3), после первой итерации получим:

$$p(x)=\frac{\sqrt{l^2-x^2}}{\pi L}\left\{\int_{-l}^{l}\frac{2\gamma\, t dt}{\sqrt{l^2-t^2}\,(t-x)}-\frac{\gamma}{4DL^2}\int_{-l}^{l}\frac{dt}{\sqrt{l^2-t^2}\,(t-x)}\times\right.$$

$$\left.\times\int_{-l}^{l}\sqrt{l^2-\xi^2}\,(t-\xi)\left(C_1+2\ln|t-\xi|\right)d\xi\right\}. \qquad (5)$$

Здесь мы воспользовались теоремой о дифференцировании под знаком интеграла. Легко проверить, что выполнены все ее условия, т.е.:

1) функция $g(\xi,t)=\int\limits_{-l}^{l}\sqrt{l^2-\xi^2}\,(t-\xi)\left(C_1+2\ln|t-\xi|\right)d\xi$ непрерывна по ξ в прямоугольнике $[-l,l;-l,l]$ при любом фиксированном $t\in[-l,l]$;

2) во всей области существует частная производная $g'_t(\xi,t)$, непрерывная как функция двух переменных.

После вычислений (5) получим:

$$p(x)=\gamma\frac{\sqrt{l^2-x^2}}{L}\left[2-\frac{\pi l^2}{4DL}\left(\frac{1+\lambda}{2(1-\lambda)}+C+\ln\frac{\left|bl\sqrt{1-\lambda}\right|}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{l}\right)^2\right)\right].$$

Зависимость между длиной зоны контакта 2l и величиной прижимающей силы P определяется уравнением:

$$P=\gamma\frac{l^2\pi}{L}\left[1-\frac{\pi l^2}{32DL}\left(8C+8\ln\frac{\left|bl\sqrt{1-\lambda}\right|}{4}+2\frac{1+\lambda}{1-\lambda}-1\right)\right].$$

Вывод. Таким образом, полученные выражения для плотности контактных усилий p(x) и зависимости длины зоны контакта 2l от величины силы P, прижимающей оболочку к полуплоскости (упругому штампу), позволяют достаточно просто алгоритмизировать описание процессов деформирования в контактируемых телах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980. – 324 с.*
2. *Нерубайло Б.В., Ольшанский В.П., Резуненко М.Е. Об одной форме фундаментального решения уравнений оболочек отрицательной гауссовой кривизны // Известия АН. Механика твердого тела. – М., 1997. – № 4. – С. 144 – 149.*
3. *Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1949. – 160 с.*
4. *Ольшанский В.П. Интегральный уравнения изгиба пологих оболочек // Вычислительная прикладная математика. – 1982. – Вып. 47. – С. 103 – 110.*

Поступила 16.09.2004

***РЕЗУНЕНКО Марина Евгеньевна**, канд. тех. наук, доцент УИПА. В 1993 году окончила ХГУ. Область научных интересов – механика твердого тела.*

***ДОВБНЯ Александр Владимирович**, канд. техн. наук, научн. сотр. ОНИУ ВС. Окончил ХВУ в 1997 году. Область научных интересов – АСУ и системы обработки радиолокационной информации.*

***КОНОВАЛОВА Татьяна Васильевна**, научн. сотр. ОНИУ ВС. В 1990 году окончила ХАИ. Область научных интересов – системы управления и обработки информации.*