УДК 623.465.34

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ АЭРОБАЛЛИСТИЧЕСКОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

И.Е. Бакулин
(представил д.т.н. В.И. Антюфеев)

Предложена усовершенствованная математическая модель погрешностей инерциальной навигационной системы (ИНС) аэробаллистического летательного аппарата (ЛА), которая, в отличие от известных, дополнительно учитывает зависимость погрешностей ИНС от текущей высоты полета ЛА. Приведены результаты имитационного моделирования процесса компенсации погрешностей ИНС ЛА с использованием предложенной модели.

Постановка проблемы. Уменьшение инструментальных погрешностей ИНС ЛА связано, в первую очередь, с качественным улучшением основных характеристик гироскопов и акселерометров, однако резервы повышения их точности на сегодняшний день практически исчерпаны. В метрологии известен [1] метод частичной компенсации погрешностей измерений аналитическим путем на основе вычисления их значений, для чего необходимо знать источники и причины возникновения последних. Для вычисления и дальнейшей компенсации на борту ЛА погрешностей навигационных измерений, необходимо разработать математическую модель погрешностей ИНС, аналитически описывающую связь между входными погрешностями ИНС, обусловленными недостатками гироскопов и акселерометров, и ее выходными погрешностями в определении текущих параметров движения (ПД) ЛА. При этом эффективность компенсации возрастающих с течением времени полета погрешностей ИНС напрямую зависит от адекватности используемой математической модели погрешностей ИНС реальным процессам навигационных измерений.

Анализ литературы. Анализ большого количества работ, в частности [2 – 7], показал, что общепринятым, при разработке математических моделей погрешностей ИНС ЛА, допущением является пренебрежение зависимостью погрешностей ИНС от текущей высоты полета. Указанное допущение строго справедливо для математических моделей погрешностей ИНС подвижных объектов, перемещающихся по земной поверхности. Для существующих ЛА, отношение высоты полета h которых к радиусу земного экватора а не превосходит величины квадрата земного эксцентриситета e^2, безразмерная величина h/a будет такого же порядка малости как и входные погрешности реальных ИНС [2]. Тогда, при $h \le ae^2 = 52{,}18$ км, зависимости погрешностей ИНС от текущей высоты полета будут величинами второго и более высоких порядков малости относительно указанных малых величин, что и позволяет пренебречь ими без существенного снижения точности вычислений.

На основании данного анализа можно сделать предположение, что для ЛА, высота полета которых существенно превышает вышеуказанное значение, непосредственное применение такого допущения, при разработке математической модели погрешностей ИНС, приведет к существенным ошибкам вычислений с ее использованием.

Целью статьи является разработка усовершенствованной математической модели погрешностей ИНС аэробаллистического ЛА, высота полета которого в апогее может превышать 160 км. Указанное обстоятельство не позволяет непосредственно применять существующие математические модели для компенсации инструментальных погрешностей ИНС аэробаллистического ЛА и вынуждает учитывать зависимость погрешностей ИНС от текущей высоты полета при разработке математической модели ее погрешностей.

Исходные положения. За основу математической модели невозмущенного функционирования ИНС аэробаллистического ЛА примем математическую модель ИНС на базе гиростабилизированной платформы (ГСП) с геодезической ориентацией опорного трехгранника, рассмотренную в работе [4]. В математической модели ИНС аэробаллистического ЛА, в отличие от модели, рассмотренной в работе [4], используем точные соотношения для вычисления радиусов кривизны главных нормальных сечений земного эллипсоида, а для вычисления текущих значений ускорения свободного падения на высоте h, над поверхностью земного эллипсоида, воспользуемся формулой Гельмерта-Кассиниса. Это позволит уменьшить методические погрешности ИНС аэробаллистического ЛА до пренебрежимо малых величин.

Текущее состояние рассматриваемой ИНС описывается [4] вектором фазовых координат

$$\bar{y} = (W_x, W_y, W_z, B, L, h)^T, \tag{1}$$

где $\bar{y}$ – вектор фазовых координат ИНС; W_x, W_y, W_z – проекции вектора скорости ЛА на соответствующие оси опорного трехгранника ИНС; B, L, h – геодезические координаты ЛА.

При отсутствии погрешностей ИНС, оси xyz ГСП точно совпадают с трехгранником $\xi\eta\zeta$, являющимся опорным для данной ИНС, а вычисляемые в ИНС значения W_x, W_y, W_z, B, L и h совпадают с действительными. Однако, из-за наличия угловых скоростей $\omega_{в1}(t)$, $\omega_{в2}(t)$, $\omega_{в3}(t)$ дрейфа гироскопов и инструментальных погрешностей $a_{вx}(t)$, $a_{вy}(t)$, $a_{вz}(t)$ акселерометров, трехгранник xyz будет отклоняться от номинального его положения $\xi\eta\zeta$ на малые углы $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$, как это показано на рис. 1. Указанные погрешности, являющиеся входными для ИНС, вызывают появление выходных погрешностей ИНС в определении текущих значений вектора скорости и координат, а также углов курса, крена и тангажа ЛА.

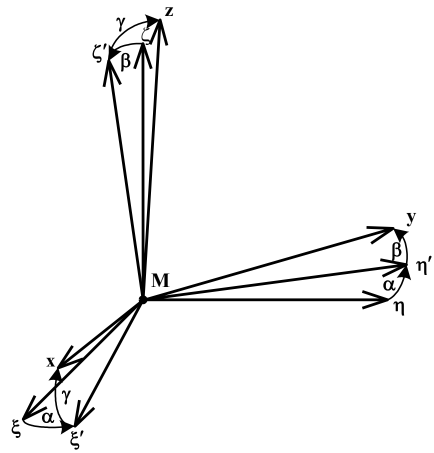

Рис. 1. Отклонение опорного трехгранника ИНС от своего номинального положения

Примем во внимание, что погрешности современных гироскопов и акселерометров, входящих в состав ИНС, сравнительно невелики и носят случайный характер [2, 3, 5]. Вследствие этого, при непродолжительном времени функционирования, диапазон выходных погрешностей ИНС будет сравнительно небольшим. Анализ соотношений, составляющих математическую модель невозмущенного функционирования ИНС, показывает, что последние, не будучи линейными во всем диапазоне изменения своих аргументов, являются практически линейными в узком диапазоне их случайных изменений и могут быть линеаризованы. Это позволяет применить для разработки математической модели погрешностей ИНС метод линеаризации функций, зависящих от нескольких случайных аргументов [8]. Данный метод позволяет на основании математической модели невозмущенного функционирования какой либо системы получить уравнения в вариациях (отклонениях), представляющие собой линеаризованные уравнения первого приближения относительно выходных ошибок системы, правые части которых будут состоять из линейной комбинации возмущений (ошибок) на входе рассматриваемой системы.

Математическая постановка задачи. В общем виде систему уравнений, составляющую математическую модель ИНС, можно представить как некоторую систему функции зависящих от своих случайных аргументов $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ описываемую соотношением

$$\bar{y} = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n). \qquad (2)$$

Тогда, в рамках метода линеаризации функций, математическую постановку задачи разработки математической модели погрешностей ИНС можно сформулировать следующим образом: для системы функции, описываемой соотношением (2), необходимо получить систему уравнений в отклонениях, общий вид которой может быть представлен [8] соотношением

$$\Delta\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{df}{dx_i} \Delta x_i. \qquad (3)$$

При разработке модели примем следующие допущения:

– входные погрешности ИНС являются величинами такого же порядка малости как и значение квадрата эксцентриситета земного эллипсоида;

– зависимости выходных погрешностей ИНС от текущей высоты полета являются величинами первого порядка малости;

– погрешностями бортового вычислителя при обработке навигационной информации можно пренебречь.

Результаты расчетов и их анализ. Анализ системы дифференциальных уравнений, составляющих математическую модель невозмущенного функционирования ИНС аэробаллистического ЛА, позволил представить искомые уравнения в отклонениях следующей системой функциональных зависимостей:

$$\dot{\alpha} = f_1(\beta, \gamma, \Delta W_\xi, \Delta B, \Delta h, \omega_{в3}); \; \dot{\beta} = f_2(\alpha, \gamma, \Delta W_\eta, \Delta h, \omega_{в1});$$

$$\dot{\gamma} = f_3(\alpha, \beta, \Delta W_\xi, \Delta B, \Delta h, \omega_{в2});$$

$$\Delta\dot{W}_\xi = f_4(\alpha, \gamma, \Delta W_\xi, \Delta W_\eta, \Delta W_\zeta, \Delta B, \Delta h, a_{вx});$$

$$\Delta\dot{W}_\eta = f_5(\alpha, \beta, \Delta W_\xi, \Delta W_\eta, \Delta W_\zeta, \Delta B, \Delta h, a_{вy}); \qquad (4)$$

$$\Delta\dot{W}_\zeta = f_6(\beta, \gamma, \Delta W_\xi, \Delta W_\eta, \Delta B, \Delta h, a_{вz});$$

$$\Delta\dot{B} = f_7(\Delta W_\eta, \Delta h); \; \Delta\dot{L} = f_8(\Delta W_\xi, \Delta B, \Delta h); \; \Delta\dot{h} = f_9(\Delta W_\zeta).$$

В состав данной системы включены зависимости для определения погрешностей углового положения ГСП в пространстве. Указанные погрешности можно рассматривать как выходные погрешности ИНС при определении текущих значений курса, крена и тангажа ЛА.

Входными значениями для математической модели погрешностей ИНС являются инструментальные погрешности гироскопов $\omega_{в1}$, $\omega_{в2}$, $\omega_{в3}$ и акселерометров $a_{вx}$, $a_{вy}$, $a_{вz}$. Инструментальные погрешности гироскопов в общем случае можно представить [2] соотношениями:

$$\omega_{в1}=\omega_{c1}+\omega_{ф1}\,;\;\; \omega_{в2}=\omega_{c2}+\omega_{ф2}\,;\;\; \omega_{в3}=\omega_{c3}+\omega_{ф3}\,;$$
$$\dot\omega_{c1}=0\,;\;\; \dot\omega_{c2}=0\,;\;\; \dot\omega_{c3}=0\,; \tag{5}$$
$$\dot\omega_{ф1}=-\mu\omega_{ф1}+\eta_1\,;\;\; \dot\omega_{ф2}=-\mu\omega_{ф2}+\eta_2\,;\;\; \dot\omega_{ф3}=-\mu\omega_{ф3}+\eta_3\,,$$

где ω_c – систематическая (постоянная) составляющая дрейфа гироскопа; $\omega_ф$ – флуктуационная составляющая дрейфа гироскопа; μ – коэффициент затухания корреляционной функции; η_i, ($i = 1\ldots3$) – интенсивности белых шумов, определяющих значения флуктуационных составляющих дрейфов гироскопов.

Инструментальные погрешности акселерометров в общем случае можно представить [2] независимыми белыми шумами η определенной интенсивности:

$$a_{вх}=\eta_4\,;\;\; a_{ву}=\eta_5\,;\;\; a_{вz}=\eta_6\,, \tag{6}$$

где η_i, ($i = 4\ldots6$) – интенсивности белых шумов, определяющих значения погрешностей акселерометров.

Проводя линеаризацию уравнений математической модели невозмущенного функционирования ИНС, на основании системы зависимостей (5) и с учетом соотношений (5) и (6), получаем следующие уравнения искомой математической модели погрешностей ИНС.

Уравнения для вычисления угловых погрешностей пространственного положения опорного трехгранника ИНС:

$$\dot\alpha=\left(\frac{W_\xi}{a+h}+\Omega\cos B\right)\beta-\frac{W_\eta\gamma}{a+h}+\frac{\mathrm{tg}B\Delta W_\xi}{a+h}+$$
$$+\left(\frac{W_\xi(1+\mathrm{tg}^2B)}{a+h}+\Omega\cos B\right)\Delta B-\frac{W_\xi\,\mathrm{tg}B\Delta h}{(a+h)^2}+\omega_{в3}\,;$$
$$\dot\beta=-\left(\frac{W_\xi}{a+h}+\Omega\cos B\right)\alpha-\left(\frac{W_\xi\mathrm{tg}B}{a+h}+\Omega\sin B\right)\gamma-\frac{\Delta W_\eta}{a+h}+\frac{W_\eta\Delta h}{(a+h)^2}+\omega_{в1}\,; \tag{7}$$
$$\dot\gamma=\frac{W_\eta\alpha}{a+h}+\left(\frac{W_\xi\mathrm{tg}B}{a+h}+\Omega\sin B\right)\beta-\frac{\Delta W_\xi}{a+h}+\Omega\sin B\Delta B+\frac{W_\xi\Delta h}{(a+h)^2}-\omega_{в2}\,.$$

Уравнения для вычисления погрешностей определения текущих значений проекций путевой скорости ЛА на координатные оси ГСП ИНС:

$$\Delta\dot W_\xi=a_\eta\alpha+a_\zeta\gamma+\frac{\mathrm{tg}BW_\eta-W_\zeta}{a+h}\Delta W_\xi+\left(\frac{W_\xi\mathrm{tg}B}{a+h}+2\Omega\sin B\right)\Delta W_\eta-$$
$$-\left(\frac{W_\xi}{a+h}+2\Omega\cos B\right)\Delta W_\zeta+\left(2\Omega\sin BW_\zeta+\frac{W_\eta W_\xi(1+\mathrm{tg}^2B)}{a+h}+2W_\eta\Omega\cos B\right)\Delta B-$$

$$-\frac{W_\xi(\mathrm{tg}BW_\eta - W_\zeta)}{(a+h)^2}\Delta h + a_{\text{вx}};$$

$$\Delta\dot{W}_\eta = -a_\xi\alpha + a_\zeta\beta - \left(\frac{2W_\xi \mathrm{tg}B}{a+h} + 2\Omega\sin B\right)\Delta W_\xi - \frac{W_\zeta}{a+h}\Delta W_\eta - \frac{W_\eta}{a+h}\Delta W_\zeta -$$

$$-\left(\frac{W_\xi{}^2(1+\mathrm{tg}^2 B)}{a+h} + 2W_\xi\Omega\cos B\right)\Delta B + \frac{W_\eta W_\zeta + W_\xi{}^2\mathrm{tg}B}{(a+h)^2}\Delta h + a_{\text{вy}}; \qquad (8)$$

$$\Delta\dot{W}_\zeta = -a_\eta\beta - a_\xi\gamma + \left(\frac{2W_\xi}{a+h} + 2\Omega\cos B\right)\Delta W_\xi + \frac{2W_\eta}{a+h}\Delta W_\eta - 2\Omega\sin B W_\xi \Delta B +$$

$$+\left(\frac{2ga^2}{(a+h)^3} - \frac{W_\eta{}^2 + W_\xi{}^2}{(a+h)^2}\right)\Delta h + a_{\text{вz}}.$$

Уравнения для вычисления погрешностей определения текущих значений геодезических координат ЛА:

$$\Delta\dot{B} = \frac{\Delta W_\eta}{a+h} - \frac{W_\eta \Delta h}{(a+h)^2};$$

$$\Delta\dot{L} = \frac{\Delta W_\xi}{(a+h)\cos B} + \frac{W_\xi \sin B \Delta B}{(a+h)\cos^2 B} - \frac{W_\xi \Delta h}{(a+h)^2 \cos B}; \qquad (9)$$

$$\Delta\dot{h} = \Delta W_\zeta .$$

Таким образом, предложенную математическую модель погрешностей ИНС составляет совокупность соотношений (5) – (9). Общую схему компенсации погрешностей ИНС с использованием данной математической модели удобно представить в виде функциональной схемы показанной на рис. 2.

Эффективность компенсации возрастающих с течением времени полета погрешностей ИНС зависит от того, насколько точно априорно известны численные значения дрейфов гироскопов и погрешностей акселерометров. Адекватность предложенной математической модели погрешностей ИНС реальным процессам подтверждается результатами имитационного моделирования с использованием нелинейной модели формирования погрешностей ИНС, представленными на рис. 3.

Из рис. 3 видно, что погрешности определения ИНС координат ЛА, при их компенсации с использованием предложенной модели, не будут превышать 8 – 10 м., что отвечает требуемой точности определения текущих координат аэробаллистического ЛА конечном участке траектории полета. Для сравнения на этом же рисунке представлен график некомпенсированных погрешностей ИНС, а также график зависимости погрешностей ИНС, при их компенсации с использованием математической модели, не учитывающей зависимость погрешностей от текущей высоты полета ЛА.

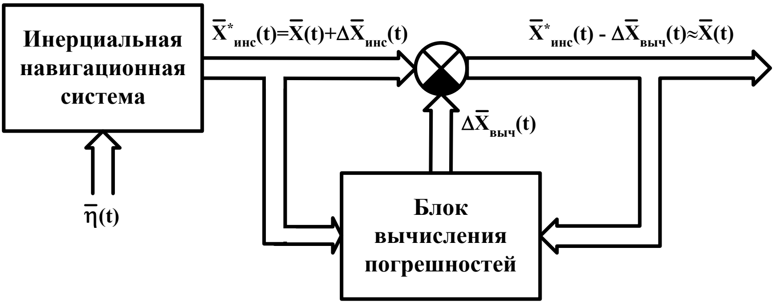

Рис. 2. Функциональная схема компенсации погрешностей инерциальной навигационной системы

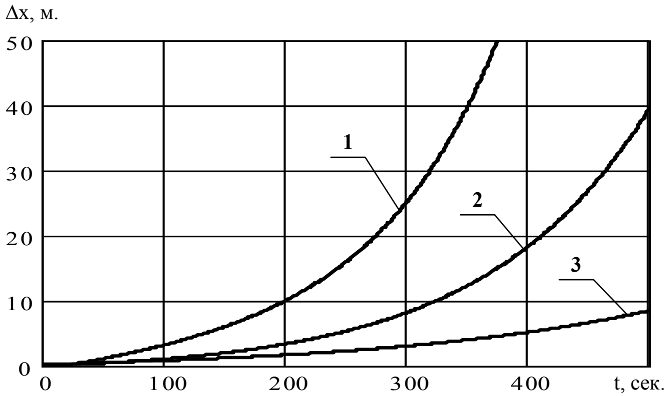

Рис. 3. Зависимость погрешностей определения текущих геодезических координат аэробаллистического ЛА от времени полета при их компенсации с использованием различных математических моделей погрешностей ИНС:

1 – некомпенсированная погрешность;

2 – компенсация с использованием существующей модели;

3 – компенсация с использованием предложенной модели.

Выводы. Пренебрежение зависимостью погрешностей ИНС от текущей высоты полета в математических моделях погрешностей ИНС

ЛА, высота полета которых превышает 40 – 50 км., приводит к существенным ошибкам вычислений, нарастающим с течением времени работы. При разработке математической модели погрешностей ИНС аэробаллистического ЛА, высота полета которого в апогее превышает 160 км., учет указанной зависимости является обязательным. Предложенная усовершенствованная математическая модель погрешностей ИНС аэробаллистического ЛА, в отличие от известных, дополнительно учитывает зависимость погрешностей ИНС от текущей высоты полета ЛА. Погрешности определения ИНС текущих координат ЛА, при их компенсации с использованием предложенной модели погрешностей, не будут превышать 8 – 10 м.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чинков В.М. Основи метрології та вимірювальної техніки: Підручник. – Х.: ХВУ, 2001. – 424 с.*
2. *Бабич О.А. Обработка информации в навигационных комплексах. – М.: Машиностроение, 1991. – 512 с.*
3. *Баллистика и навигация ракет: Учебник для втузов / А.А. Дмитриевский, Н.М. Иванов, Л.Н. Лысенко, С.С. Богодистов / Под ред. А.А. Дмитриевского. – М.: Машиностроение, 1985. – 312 с.*
4. *Бромберг П.В. Теория инерциальных систем навигации. – М.: Наука, 1979. – 296 с.*
5. *Помыкаев И.И., Селезнев В.П., Дмитроченко Л.А. Навигационные приборы и системы. / Под ред. проф. И.И. Помыкаева. – М.: Машиностроение, 1983. – 456 с.*
6. *Жбанов Ю.К., Климов Д.М., Урюпин М.А. Математическое моделирование инерциальных навигационных систем // Изв. АН. Техническая кибернетика. – 1993. – № 1. – С. 97 – 105.*
7. *Кузовков Н.Т., Салычев О.С. Инерциальная навигация и оптимальная фильтрация. – М.: Машиностроение, 1982. – 216 с.*
8. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1988. – 480 с.*

Поступила 1.11.2004

***БАКУЛИН Игорь Евгеньевич**, научный сотрудник Объединенного научно-исследовательского института Вооруженных Сил. В 1995 году окончил Харьковский военный университет. Область научных интересов – метрология, системы навигации летательных аппаратов.*