УДК 621. 517

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ СИГНАЛА ПО ШКАЛЕ ВЕЙВЛЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

д.т.н., проф. А.С. Клейман, О.В. Романько

В статье установлена функциональная взаимосвязь оценок распределения энергии сигнала по параметрам Фурье и вейвлетного преобразования.

Введение. Вопросы приложения вейвлетного анализа к исследованию спектрального состава случайных процессов вызывают в настоящее время большой интерес и привлекают внимание исследователей, работающих в различных областях науки [1 – 4]. Это связано с тем, что, с одной стороны, привычный спектральный анализ, основанный на преобразовании и рядах Фурье, не всегда помогает понять, как устроен анализируемый сигнал.

С другой стороны, с самого начала возникновения вейвлетного преобразования была установлена его методологическая связь с преобразованием Фурье [5].

Однако до сих пор при оценке распределения энергии по частоте для Фурье-преобразования и по параметру масштаб для вейвлетного преобразования у различных авторов встречаются разночтения даже в более поздних работах ((1.21) [6] и (30) [7]).

Цель работы. Установить функциональную взаимосвязь оценок распределения энергии сигнала по параметрам Фурье и вейвлетного преобразований.

Основная часть. Одномерное непрерывное вейвлетного преобразование сигнала s(t), называемое масштабно-временным спектром (или вейвлет-спектром), задается по формальной аналогии с преобразованием Фурье путем вычисления вейвлет-коэффициентов по формуле

$$W(\gamma,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,\psi^{*}_{\gamma,\tau}(t)\,dt\,, \tag{1}$$

где функция $\psi_{\gamma,\tau}(t)$ называется вейвлетом, а символ (*) обозначает операцию комплексного сопряжения.

Двухпараметрическая вейвлетная функция $\psi_{\gamma,\tau}(t)$ получается из материнского вейвлета $\psi_0(t)$ путем его масштабирования и сдвига вдоль временной оси:

$$\psi_{\gamma,\tau}(t) = |\gamma|^{-1/2}\psi_0\left(\frac{t-\tau}{\gamma}\right), \tag{2}$$

где γ – параметр масштаба; τ – параметр сдвига.

Условие

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{\psi}_0(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \tag{3}$$

где $\tilde{\psi}_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(t)e^{-j\omega t}dt$ – преобразование Фурье от материнской функции, является условием существования вейвлета.

Параметры сдвига, сжатия или расширения меняются непрерывно с ограничением $\gamma \neq 0$. Для практических приложений достаточно условия $\gamma > 0$. При этом переменная масштаба γ может интерпретироваться как гиперболическое преобразование частоты $\gamma = \omega_0/\omega$, где ω_0 – постоянная, определяющая единицы измерения связанных переменных.

В этом случае, если условие (3) выполняется, существует обратное вейвлет-преобразование:

$$s(t) = C_\psi{}^{-1} \int_0^{\infty} \frac{d\gamma}{\gamma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\gamma,\tau}(t) W(\gamma,\tau)\, d\tau.$$

По аналогии с распределением энергии сигнала по частоте преобразования Фурье можно ввести в рассмотрение интегральное распределение энергии по масштабам вейвлетного преобразования

$$I(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} |W(\gamma,\tau)|^2 d\tau, \tag{4}$$

которое характеризует интенсивность всех пульсаций сигнала заданного масштаба.

Учитывая, что

$$\tilde{\psi}(\omega) = \gamma \cdot e^{-j\tau\omega}\tilde{\psi}_0(\gamma\omega),$$

в соответствии с равенством Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\, f_2^*(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_1(\omega)\, \tilde{f}_2^*(\omega)\, d\omega, \tag{5}$$

из (1) с учетом (2) получим:

$$W(\gamma, \tau) = \frac{\sqrt{\gamma}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_0{}^*(\gamma\omega)\, \tilde{s}(\omega)\, e^{j\tau\omega} d\omega. \tag{6}$$

Как известно, равенство Парсеваля (5) позволяет установить взаимосвязь между энергией сигнала, рассчитанной во временной области, и интегральной оценкой его спектральной плотности энергии:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(\omega)|^2 d\omega, \tag{7}$$

где $\tilde{s}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t}$ – преобразование Фурье сигнала.

Для выражения (6) введем обозначение

$$\tilde{g}(\omega) = \tilde{\psi}_0{}^*(\gamma\omega)\, \tilde{s}(\omega), \tag{8}$$

и для (4) дважды применим равенство Парсеваля, записанное в форме (7):

$$\begin{aligned} I(\gamma) &= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\omega)\, e^{j\omega\tau} d\omega \right|^2 d\tau = \\ &= \gamma \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|^2 d\tau = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \tag{9}$$

Раскроем в выражении (9) подстановку (8). Таким образом,

$$I(\gamma) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \tilde{\psi}_0^*(\gamma\omega) \right|^2 |\tilde{s}(\omega)|^2 d\omega. \tag{10}$$

Из соотношения (10) следует, что интегральное распределение энергии вейвлетного спектра (1) по масштабам вейвлет-преобразования представляет собой сглаженный спектр энергии преобразования Фурье, причем характер сглаживания определяется частотными свойствами материнского вейвлета.

Выводы. Оценка распределения энергии сигнала по масштабам вейвлетного преобразования, отнесенная к величине масштаба, представляет собой сглаженную Фурье-образом материнского вейвлета спектральную плотность энергии этого сигнала, полученную в результате преобразования Фурье.

Предметом дальнейших исследований в данном направлении является рассмотрение соотношения между распределением энергии по частоте Фурье и масштабу вейвлет преобразований для дискретных сигналов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новиков Л.В. Спектральный анализ сигналов в базисе вейвлетов // Научное приборостроение. – 2000. – Т. 10, № 3. – С. 57 – 64.*
2. *Le G.M., Wang J.L. Wavelet analysis of several periodic properties in the relative sunspot numbers // Chinese journal of astronomy and astrophysics. – 2003. – Vol. 3, № 5. – P. 391 – 394.*
3. *Bradley A.P., Wilson W.J. On wavelet analysis of auditory evoked potentials // Clinical Neurophysiology. – 2004. – № 115. – P. 1114 – 1128.*
4. *Клейман А.С., Романько О.В. Спектральная плотность мощности фазы в базисе вейвлетов // Труди IV Міжнародної науково-технічної конференції "Метрологія та вимірювальна техніка", Харків, 12-14 жовтня 2004 р. – С. 198 – 200.*
5. *Chui K. Wavelets – a tutorial in theory and application. – New York: Academic Press, 1992. – 603 p.*
6. *Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 176 с.: ил.*
7. *Поршнев С.В. Применение непрерывного вейвлет-преобразования для обработки широкополосных частотно-модулированных сигналов // Вычислительные методы и программирование. – 2003. – Т. 4. – С. 104 – 116.*

Поступила 25.10.2004

***КЛЕЙМАН Александр Самуилович**, доктор техн. наук, профессор, начальник лаборатории ННЦ «Институт метрологии». Закончил в 1954 году радиофак ХПИ. Область научных интересов – метрология и метрологическое обеспечение.*

***РОМАНЬКО Ольга Владимировна**, младший научный сотрудник Научного метрологического центра военных эталонов. В 2001 году закончила НАУ «ХАИ». Область научных интересов – спектральный анализ в базисе вейвлетов.*